

Actividades de apoio

1. ¿En que punto a recta tanxente á curva $y = x^2 + 3x - 5$ é paralela á bisectriz do primeiro cuadrante? Escribe tamén a ecuación da devandita recta tanxente.
2. Descubre os intervalos de crecemento e decrecemento de $y = (2x - 3)^3$.
3. Descubre os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = \frac{1-x^2}{(x+3)^2}$
4. Acha os intervalos de crecemento e decrecemento de $y = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x$
5. Acha **a** e **b** para que $f(x) = x^3 + ax + b$ teña un mínimo no punto (1,1).
6. O valor dun rubí é proporcional ao cadrado do seu peso. Divide un rubí de 2 gramos en dúas partes de x gramos e $2 - x$ gramos, de forma que a suma dos valores dos dous rubís sexa mínima.
7. **a)** Determina razoadamente a e b na función $y = \frac{ax}{x^2+b}$ sabendo que ten un mínimo no punto $(-1, -1/2)$
b) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento no caso $a = b = 1$.
8. A temperatura T dunha reacción química vén dada, en función do tempo t (medido en horas) pola expresión $T(t) = 2t - t^2$, para $0 \leq t \leq 2$ horas. ¿Que temperatura haberá aos 15 minutos? ¿En qué momento volverá alcanzarse esta mesma temperatura? Acha as temperaturas máxima e mínima e os momentos nos que se producen.
9. Un granxeiro dispón de 3 000 € para cercar unha porción rectangular de terreo adxacente a un río, usando este como un lado da área cercada, é dicir, construír 3 cercas. O custo da cerca paralela ao río é de 5 € por metro instalado, e o da cerca para cada un dos dous lados restantes é de 3 € por metro instalado. Calcula as dimensións da área máxima que pode ser cercada.
10. Da función $f(x) = x^2 + ax + b$ sábese que ten un mínimo en $x = 2$ e que a súa gráfica pasa polo punto (2,2). Canto vale a función en $x = -1$?
11. Estuda a curvatura e descubre os puntos de inflexión das seguintes funcións:
a) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ **b)** $y = (x+1)e^{-3x}$
12. Acha os intervalos nos que as seguintes funcións son cóncavas e convexas, así como as coordenadas dos seus puntos de inflexión, se os teñen:
a) $y = e^{-x^2}$; **b)** $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
13. Descubre en que intervalos as seguintes funcións son cóncavas ou convexas, así como os seus puntos de inflexión: medio por unidade?
a) $\frac{x}{x^2 + 2}$ **b)** $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 5$

Soluciones:

1. ¿En que punto a recta tanxente á curva $y = x^2 + 3x - 5$ é paralela á bisectriz do primeiro cuadrante? Escribe tamén a ecuación da devandita recta tanxente.

Solución:

$f(x_0) = 2x_0 + 3 \Rightarrow 2x_0 + 3 = 1 \Rightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = y(-1) = -7 \Rightarrow (-1, -7)$ é o punto de tanxencia e a ecuación da recta é : $y + 7 = x + 1 \Rightarrow y = x - 6$

2. Descubre os intervalos de crecemento e decrecemento de $y = (2x - 3)^3$.

Solución:

$y' = 6(2x - 3)^2 > 0$ en $\mathbb{R} - \{3/2\} \Rightarrow$ e é sempre crecente. Carece de puntos críticos, pois aínda que $y' = 0$ en $x = 3/2$ é un punto de inflexión: $y'' = 24(2x - 3) \Rightarrow y''(3/2) = 0$.

3. Descubre os intervalos de crecemento e decrecemento de

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{(x + 3)^2}$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-2x(x + 3) - 2(1 - x^2)}{(x + 3)^3} = \frac{-2(1 + 3x)}{(x + 3)^3} \Rightarrow$$

Num = 0 $\Rightarrow x = -1/3$ e Den = 0 $\Rightarrow x = -3$ (triple)

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1/3)$	$(-1/3, \infty)$
$\text{sgn } f'$	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} = -$	$\begin{matrix} + \\ + \end{matrix} = +$	$\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} = -$
f	D↓	C↑	D↓

4. Acha os intervalos de crecemento e decrecemento de

$$y = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x$$

Solución:

$$y' = x^3 + 4x^2 - x - 4 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow (\text{Ruffini}) \Rightarrow$$

$$x = -4, x = -1 \text{ e } x = 1 \Rightarrow y' = (x+4)(x+1)(x-1)$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$\text{sgn } y'$	-	+	-	+
y	D↓	C↑	D↓	C↑

5. Acha **a** e **b** para que $f(x) = x^3 + ax + b$ teña un mínimo no punto (1,1).

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow f'(1) = 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3; f(1) = 1 - 3 + b = 1 \Rightarrow \mathbf{b = 3}.$$

6. O valor dun rubí é proporcional ao cadrado do seu peso. Divide un rubí de 2 gramos en dúas partes de x gramos e $2 - x$ gramos, de forma que a suma dos valores dos dous rubís sexa mínima.

Solución:

Función que se optimiza: $V(x) = k \cdot x^2$; (k é a constante de proporcionalidade e pode valer 1)

$$\text{polo tanto } V(x) = x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4 \Rightarrow V'(x) = 4x - 4 \Rightarrow V'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1; V''(1) = 4 > 0 \Rightarrow \text{mínimo para } \mathbf{x = 1 g}.$$

7.

a) Determina razoadamente a e b na función $y = \frac{ax}{x^2+b}$ sabendo que ten un mínimo no punto $(-1, -1/2)$

b) Estuda os intervalos de crecemento e de decrecemento no caso $a = b = 1$.

Solución:

$$\mathbf{a)} \quad y' = \frac{a(b-x^2)}{(x^2+b)^2} \Rightarrow y'(-1) = \frac{a(b-1)}{(b+1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (absurda)} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 0;$$

$$y'(-1) = \frac{ax}{x^2+1} \Rightarrow y(-1) = \frac{-a}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{a=1} \quad y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow y''(-1) = 1/2 < 0 \Rightarrow$$

y ten un mínimo no punto $(-1, -1/2)$ para $\mathbf{a=b=1}$.

b)

$$y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Num} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \text{Den} > 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
sgn y'	-	+	-
y	D↓	C↑	D↓

8. A temperatura T dunha reacción química vén dada, en función do tempo t (medido en horas) pola expresión $T(t) = 2t - t^2$, para $0 \leq t \leq 2$ horas. ¿Que temperatura haberá aos 15 minutos? ¿En qué momento volverá alcanzarse esta mesma temperatura? Acha as temperaturas máxima e mínima e os momentos nos que se producen.

Solución:

$15 \text{ min} = 1/4 \text{ h} \Rightarrow T(1/4) = 2 \cdot 1/4 - (1/4)^2 = 7/16$. $T(t_0) = 2t_0 - t_0^2 = 7/16 \Rightarrow t_0 = 1/4$
e $7/4 \Rightarrow$ han de pasar 90 minutos ($6/4 \text{ h}$). $T''(t) = -2 < 0 \Rightarrow$ a temperatura máxima
alcázase ao cabo de 1 hora, valendo $T_{\text{máx}} = T(1) = 1$

Como non se obtén ningún mínimo relativo, a temperatura mínima debe atoparse
nalgún dos extremos do intervalo: $T(0) = T(2) = 0 \Rightarrow T_{\text{mín}} = 0$, dita temperatura
mínima prodúcese ás 0 ou ás 2 horas.

9. Un granxeiro dispón de 3 000 € para cercar unha porción rectangular de
terreo adxacente a un río, usando este como un lado da área cercada, é dicir,
construíra 3 cercas. O custo da cerca paralela ao río é de 5 € por metro
instalado, e o da cerca para cada un dos dous lados restantes é de 3 € por
metro instalado. Calcula as dimensións da área máxima que pode ser
cercada.

Solución:

A función a optimizar é: $A(x,y) = x \cdot y$.

Relación de variables: $5x + 6y = 3000 \Rightarrow A(x) = \frac{3000x - 5x^2}{6} \Rightarrow A'(x) = 0$

$x = 300$; $A''(x) = -5/3 < 0 \Rightarrow$ Ten un máximo para **$x = 300$** e **$y = 200$** sendo
o area máxima cercada de 75.000 m^2 .

10. Da función $f(x) = x^2 + ax + b$ sábese que ten un mínimo en $x = 2$ e que a
súa gráfica pasa polo punto $(2,2)$. Canto vale a función en $x = -1$?

Solución:

$$f'(x) = 2x + a; f'(2) = 0 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4; f(2) = 2 \Rightarrow 4 - 8 + b = 2 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6 \Rightarrow f(-1) = 11.$$

11. Estuda a curvatura e descubre os puntos de inflexión das seguintes
funcións:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ **b)** $y = (x+1)e^{-3x}$

Solución:

a) No ten puntos de inflexion

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn } y''$	+	-	+
y	∪	∩	∪

b) Ten un punto de inflexión en $(-1/3, 2e/3)$

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, \infty)$
$\text{sgn } y''$	-	+
y	\cap	\cup

12. Acha os intervalos nos que as seguintes funcións son cóncavas e convexas, así como as coordenadas dos seus puntos de inflexión, se os teñen:

a) $y = e^{-x^2}$; b) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

Solución:

a) Os puntos de inflexión son:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$\text{sgn } y''$	+	-	+
y	\cup	\cap	\cup

b) Os puntos de inflexión son:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$\text{sgn } y''$	-	+	-
y	\cap	\cup	\cap

13. Descubre en que intervalos as seguintes funcións son cóncavas ou convexas, así como os seus puntos de inflexión: medio por unidade?

a) $\frac{x}{x^2+2}$ b) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 5$

Solución:

a) Os puntos de inflexión son:

$$\left(-\sqrt{6}, \frac{-\sqrt{6}}{8}\right); (0,0); \left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$$

	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$(-\sqrt{6}, 0)$	$(0, \sqrt{6})$	$(\sqrt{6}, \infty)$
$\text{sgn } y''$	-	+	-	+
y	\cap	\cup	\cap	\cup

b) Os puntos de inflexión son

$$(-1, 17/4) \text{ e } (2,1)$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn } y''$	+	-	+
y	\cup	\cap	\cup