

Exercicios de Apoio tema 4

1. Dispoñemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Recomendánnos dous tipos de accións. As do tipo A, que renden o 10% e as do tipo B, que renden o 8%. Deciden invertir un máximo de 130.000 euros nas do tipo A e como mínimo 60.000 nas do tipo B. Ademais queremos que a inversión nas do tipo A sexa menor que o dobre da inversión en B. ¿Cal ten que ser a distribución da inversión para obter o máximo interese anual?

2. Nunha pastelería fanse dous tipos de tortas: Vienesa e San Marcos. Cada torta Vienesa necesita un cuarto de recheo por cada Kg. de biscoito e produce un beneficio de 2'50 Euros mentres que unha torta San Marcos necesita medio Kg. de recheo por cada Kg. de biscoito e produce 4 euros de beneficio. Na pastelería pódense facer diariamente ata 150 Kg. de biscoito e 50 Kg. de recheo, aínda que por problemas de maquinaria non poden facer mais de 125 tortas de cada tipo.
¿Cantas tortas Vienesas e cantas San Marcos deben vender ao día para que sexa máximo o beneficio

3. Unha escola prepara unha excursión para 400 alumnos. A empresa de transporte ten 8 autocares de 40 prazas e 10 autocares de 50 prazas, pero solo dispón de 9 condutores. O aluguer dun autocar grande custa 80 euros e o dun pequeno, 60 euros. Calcular cantos de cada tipo hai que utilizar para que a excursión resulte o mais económica posible para a escola.

4. Unha compañía posúe dúas minas: a mina A produce cada día 1 tonelada de ferro de alta calidade, 3 toneladas de calidade media e 5 de baixa calidade. A mina B produce cada día 2 toneladas de cada unha das tres calidades. A compañía necesita polo menos 80 toneladas de mineral de alta calidade, 160 toneladas de calidade media e 200 de baixa calidade. Sabendo que o custo diario da operación é de 2000 euros en cada mina ¿cantos días debe traballar cada mina para que o custo sexa mínimo?.

5. Vaise organizar unha planta dun taller de automóviles onde van traballar electricistas e mecánicos. Por necesidades de mercado, é necesario que haxa maior ou igual número de mecánicos que de electricistas e que o número de mecánicos non supere ao dobre que o de electricistas. En total hai dispoñibles 30 electricistas e 20 mecánicos. O beneficio da empresa por xornada é de 250 euros por electricista e 200 euros por mecánico. ¿Cantos traballadores de cada clase deben elixirse para obter o máximo beneficio e cual é este?

6. Para percorrer un determinado traxecto, unha compañía aérea desexa ofertar, como máximo, 5000 prazas de dous tipos: T(turista) e P(primer). A ganancia correspondente a cada praza de tipo T é de 30 euros, mentres que a ganancia do tipo P é de 40 euros. O número de prazas tipo T non pode exceder de 4500 e o do tipo P, debe ser, como máximo, o terceiro parte das do tipo T que se oferten. Calcular cuántas teñen que ofertarse de cada clase para que as ganancias sexan máximas.

7.- Dispónse de 120 refrescos de cola con cafeína e de 180 refrescos de cola sen cafeína. Os refrescos véndense en paquetes de dous tipos. Os paquetes de tipo A conteñen tres refrescos con cafeína e tres sen cafeína, e os de tipo B conteñen dous con cafeína e catro sen cafeína.

O vendedor gaña 6 euros por cada paquete que venda de tipo A e 5 euros por cada un que vende de tipo B. Calcular de forma razoada cántos paquetes de cada tipo debe vender para maximizar os beneficios e calcular este.

8.- Unha persoa para recuperarse de certa enfermidade ten que tomar na súa alimentación dúas clases de compoñentes que chamaremos A e B. Necesita tomar 70 unidades de A e 120 unidades de B. O médico dálle dous tipos de axudas de custo nas que a concentración dos devanditos compoñentes é:

dieta D1: 2 unidades de A e 3 unidades de B

dieta D2: 1 unidade de A e 2 unidades de B.

Sabendo que o prezo da dieta D1 é 2,5 €. e o da dieta D2 é 1,45 €. ¿cal é a distribución óptima para o menor custo?

9. Preténdese cultivar nun terreo dous tipos de oliveiras: A e B. Non se pode cultivar máis de 8 ha con oliveiras de tipo A, nin máis de 10 ha con oliveiras do tipo B. Cada hectárea de oliveiras de tipo A necesita 4 m³ de auga anuais e cada unha de tipo B, 3 m³. Dispónse anualmente de 44 m³ de auga. Cada hectárea de tipo A require unha inversión de 500 € e cada unha de tipo B, 225 €. Dispónse de 4500 € para realizar a devandita inversión. Se cada hectárea de oliveiral de tipo A e B producen, respectivamente, 500 e 300 litros anuais de aceite:

a) Obter razoadamente as hectáreas de cada tipo de oliveira que se deben plantar para maximizar a produción de aceite.

b) Obter a produción máxima.

10.- Unha empresa fabrica dous modelos de fundas de sofá, A e B, que deixan uns beneficios de 40 e 20 euros respectivamente. Para cada funda do modelo A precísanse 4 horas de traballo e 3 unidades de tea. Para fabricar unha do modelo B requirense 3 horas de traballo e 5 unidades de tea. A empresa dispón de 48 horas de traballo e 60 unidades de tea. Se como máximo poden facerse 9 fundas do modelo A. ¿Cantas fundas de cada modelo han de fabricarse para obter o máximo beneficio e cual sería este?

Solucions:

1. Dispoñemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Recomendánnos dous tipos de accións. As do tipo A, que renden o 10% e as do tipo B, que renden o 8%. Deciden invertir un máximo de 130.000 euros nas do tipo A e como mínimo 60.000 nas do tipo B. Ademais queremos que a inversión nas do tipo A sexa menor que o dobre da inversión en B. ¿Cal ten que ser a distribución da inversión para obter o máximo interese anual?

Solución:

É un problema de programación lineal.

Chamamos x á cantidade que invertamos en accións de tipo A

Chamamos y á cantidade que invertamos en accións de tipo B

Condicións que deben cumprirse (restricións):

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

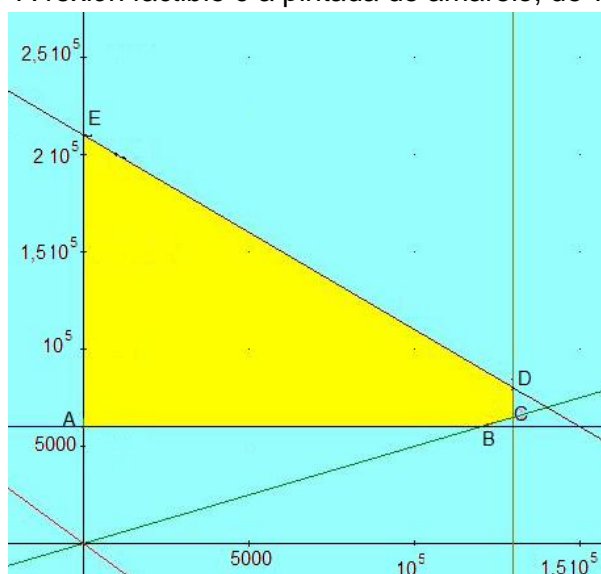
$$R_1 \quad x + y \leq 210000$$

$$R_2 \quad x \leq 130000$$

$$R_3 \quad y \geq 60000$$

$$R_4 \quad x \leq 2y$$

A rexión factible é a pintada de amarelo, de vértices A, B, C, D y E:



A función obxectivo é:

$$F(x, y) = 0,1x + 0,08y$$

A(0,60000), **B**(120000,60000),
C(130000,65000), **D**(130000, 80000) y
E(0, 210000)

O vértice mais afastado é o **D**, e polo tanto é a solución óptima.

2. Nunha pastelería fanse dous tipos de tortas: Vienesa e San Marcos. Cada torta Vienesa necesita un cuarto de recheo por cada Kg. de biscoito e produce un beneficio de 2'50 Euros mentres que unha torta San Marcos necesita medio Kg. de recheo por cada Kg. de biscoito e produce 4 euros de beneficio. Na pastelería pódense facer diariamente ata 150 Kg. de biscoito e 50 Kg. de recheo, aínda que por problemas de maquinaria non poden facer mais de 125 tortas de cada tipo.

¿Cantas tortas Vienesas e cantas San Marcos deben vender ao día para que sexa máximo o beneficio

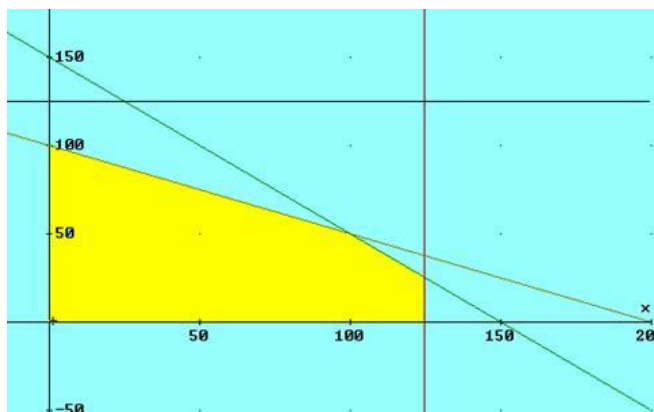
Solucion:

Función obxectivo (hai que obter o seu máximo): $f(x, y) = 2'5x + 4y$

Suxeita ás seguintes condicións (restricións do problema):

$$\begin{cases} x + y \leq 150 \\ 0,250x + 0,500y \leq 50 \\ x \leq 125 \\ y \leq 125 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

A rexión factible coloreámola de amarelo:



A función obxectivo: $f(x, y) = 2'5x + 4y$, substituíndo nos vértices obtemos

$$f(125, 0) = 312'50$$

$$f(125, 25) = 31.250 + 10.000 = 412'50$$

$$f(100, 50) = 25.000 + 20.000 = 450'00$$

$$f(0, 100) = 400'00$$

O máximo beneficio é **450 €** e obtense no punto **(100, 50)** polo que se teñen que vender **100 tortas vienasas e 50 tortas san marcos**.

3. Unha escola prepara unha excursión para 400 alumnos. A empresa de transporte ten 8 autocares de 40 prazas e 10 autocares de 50 prazas, pero solo dispón de 9 condutores. O aluguer dun autocar grande custa 80 euros e o dun pequeno, 60 euros. Calcular cantos de cada tipo hai que utilizar para que a excursión resulte o mais económica posible para a escola.

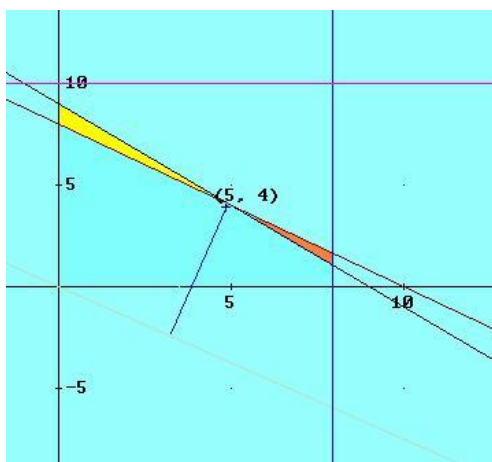
Solución:

Chamamos x ao nº de autocares de 40 prazas e y ao nº de autocares de 50 prazas que aluga a escola.

Polo tanto as restricións que nos van permitir calcular a rexión factible (conxunto de puntos solución onde se cumpren todas as condicións) son

$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0 \\ x \leq 8 & R_1 \\ y \leq 10 & R_2 \\ x + y \leq 9 & R_3 \\ 4x + 5y \geq 40 & R_4 \end{cases}$$

Tendo en conta as restricións (a de R4 é a parte de arriba e que a R3 é a parte de abaixo), atopa a rexión factible. No debuxo é o parte amarelo..



Resolvendo graficamente chégase a que o punto (5, 4) é a solución do problema. A solución óptima.

Comprobalo substituíndo en $F(x, y)$ todos os vértices e que este é o que dá menor valor (método analítico).

4. Unha compañía posúe dúas minas: a mina A produce cada día 1 tonelada de ferro de alta calidade, 3 toneladas de calidade media e 5 debaixo calidade. A mina B produce cada día 2 toneladas de cada unha das tres calidades. A compañía necesita polo menos 80 toneladas de mineral de alta calidade, 160 toneladas de calidade media e 200 de baixa calidade. Sabendo que o custo diario da operación é de 2000 euros en cada mina ¿cantos días debe traballar cada mina para que o custo sexa mínimo?.

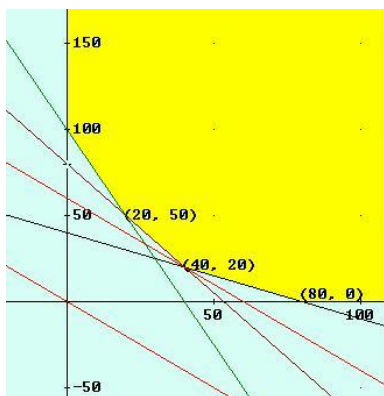
Solución:

A función obxectivo $C(x, y) = 2000x + 2000y$

As restriccions son:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A rexión factible é:



Os vértices son os puntos

A(0, 100), B(20, 50), C(40, 20), D(80, 0).

$C(0, 100) = 2000 \cdot 100 = 200000$

$C(20, 50) = 2000 \cdot 20 + 2000 \cdot 50 = 140000$

$C(40, 20) = 80000 + 40000 = 120000$ coste mínimo

$C(80, 0) = 2000 \cdot 80 = 160000$

Logo a solución é traballar **40 días na mina A e 20 na B**

5. Vaise organizar unha planta dun taller de automóviles onde van traballar electricistas e mecánicos. Por necesidades de mercado, é necesario que haxa maior ou igual número de mecánicos que de electricistas e que o número de mecánicos non supere ao dobre que o de electricistas. En total hai dispoñibles 30 electricistas e 20 mecánicos. O beneficio da empresa por xornada é de 250 euros por electricista e 200 euros por mecánico. ¿Cantos traballadores de cada clase deben elixirse para obter o máximo beneficio e cual é este?

Solución:

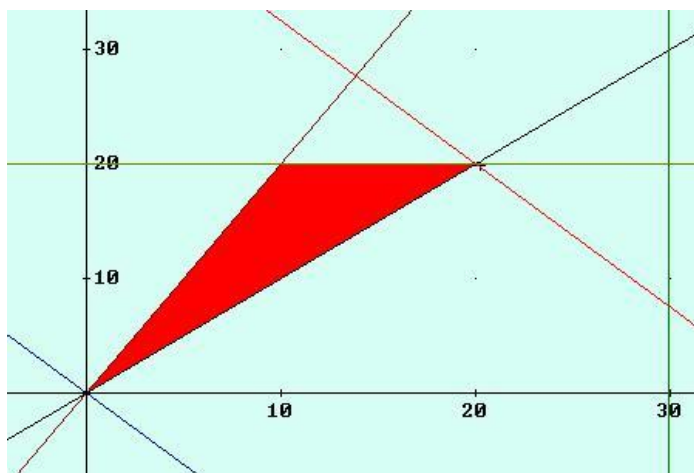
Sexan $x = n^{\circ}$ electricistas
 $y = n^{\circ}$ mecánicos

A función obxectivo $f(x, y) = 250x + 200y$,

E as restriccións

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A rexión factible sería para estas restriccións:



Apréciase graficamente (línea en vermello) que a solución óptima está no punto (20, 20). Polo tanto: **20 electricistas e 20 mecánicos** dan o máximo beneficio, e este é 9000 euros, xa que $f(x, y) = 250 \cdot 20 + 200 \cdot 20 = 9000$

6. Para percorrer un determinado traxecto, unha compañía aérea desexa ofertar, como máximo, 5000 prazas de dous tipos: T(turista) e P(primeira). A ganancia correspondente a cada praza de tipo T é de 30 euros, mentres que a ganancia do tipo P é de 40 euros. O número de prazas tipo T non pode exceder de 4500 e o do tipo P, debe ser, como máximo, o terceiro parte das do tipo T que se oferten. Calcular cuántas teñen que ofertarse de cada clase para que as ganancias sexan máximas.

Solución:

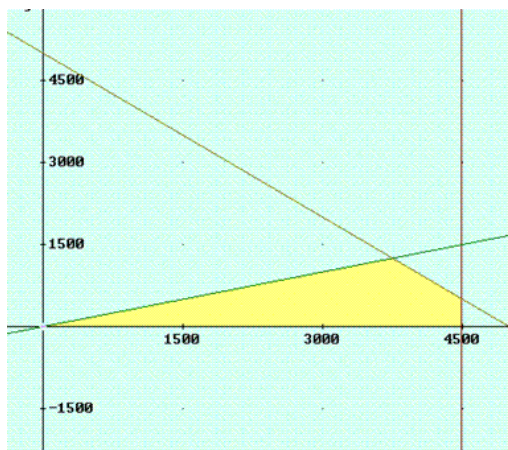
Sexa x o nº que se ofertan de tipo T, e y o nº que se ofertan de tipo P.

A función obxectivo e: $f(x, y) = 30x + 40y$

As restriccións:

$$\begin{cases} x + y \leq 5000 \\ x \leq 4500 \\ y \leq \frac{x}{3} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A rexión factible:



Os vértices, A(0, 5000), B(3750, 1250), C(4500, 500) y D(4500, 0) (comproba o punto B resolviendo o sistema correspondente)
O método gráfico dános que o punto solución é o **B (3750, 1250)**

7.- Dispónse de 120 refrescos de cola con cafeína e de 180 refrescos de cola sen cafeína. Os refrescos véndense en paquetes de dous tipos. Os paquetes de tipo A conteñen tres refrescos con cafeína e tres sen cafeína, e os de tipo B conteñen dous con cafeína e catro sen cafeína.

O vendedor gaña 6 euros por cada paquete que venda de tipo A e 5 euros por cada un que vende de tipo B. Calcular de forma razoada cántos paquetes de cada tipo debe vender para maximizar os beneficios e calcular este.

Solución:

O conxunto de restriccións é:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Os vértices son A(0, 0), B(0, 45), C(20, 30) y D(40, 0) (comproballo debuxando a rexión factible). A función obxectivo é: beneficio = $f(x, y) = 6x + 5y$

Utilizando o método analítico, o máximo estará nun dos vértices.

$$f(0, 0) = 0,$$

$$f(0, 45) = 225$$

$$f(20, 30) = 120 + 150 = 270$$

$$f(40, 0) = 240$$

É dicir **20 paquetes de A e 30 de B.**

8.- Unha persoa para recuperarse de certa enfermidade ten que tomar na súa alimentación dúas clases de compoñentes que chamaremos A e B. Necesita tomar 70 unidades de A e 120 unidades de B. O médico dálle dous tipos de axudas de custo nas que a concentración dos devanditos compoñentes é:

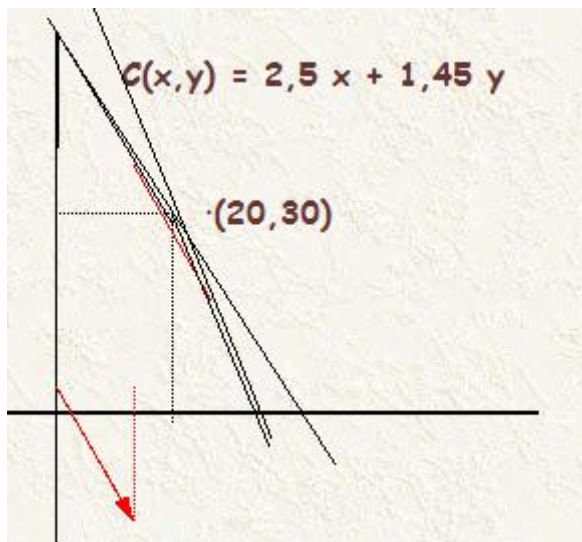
dieta D_1 : 2 unidades de A e 3 unidades de B

dieta D_2 : 1 unidade de A e 2 unidades de B.

Sabendo que o prezo da dieta D_1 é 2,5 €. e o da dieta D_2 é 1,45 €. ¿cal é a distribución óptima para o menor custo?

Solución:

Resolverémolo graficamente.



Sexan x e y o número de axudas de custo D_1 e D_2 respectivamente.

A función obxectivo é:

$$C(x,y) = 2,5x + 1,45y$$

As restriccións:

$$2x + y \geq 70 ; 3x + 2y \geq 120 ; x \geq 0 ; y \geq 0$$

Os vértices da rexión factible son:

$$(0,0), (0,60), (20,30) \text{ y } (40,0)$$

A solución óptima é **20 D_1 e 30 dietas D_2** .

9. Preténdese cultivar nun terreo dous tipos de oliveiras: A e B. Non se pode cultivar máis de 8 ha con oliveiras de tipo A, nin máis de 10 ha con oliveiras do tipo B. Cada hectárea de oliveiras de tipo A necesita 4 m³ de auga anuais e cada unha de tipo B, 3 m³. Dispónse anualmente de 44 m³ de auga. Cada hectárea de tipo A require unha inversión de 500 € e cada unha de tipo B, 225 €. Dispónse de 4500 € para realizar a devandita inversión. Se cada hectárea de oliveiral de tipo A e B producen, respectivamente, 500 e 300 litros anuais de aceite:

- Obter razoadamente as hectáreas de cada tipo de oliveira que se deben plantar para maximizar a produción de aceite.
- Obter a produción máxima.

Solución:

Se x indica ás hectáreas de oliveira A e y as de B, o obxectivo é maximizar:

$$P(x, y) = 500x + 300y$$

Restrinxido por: $x \leq 8$

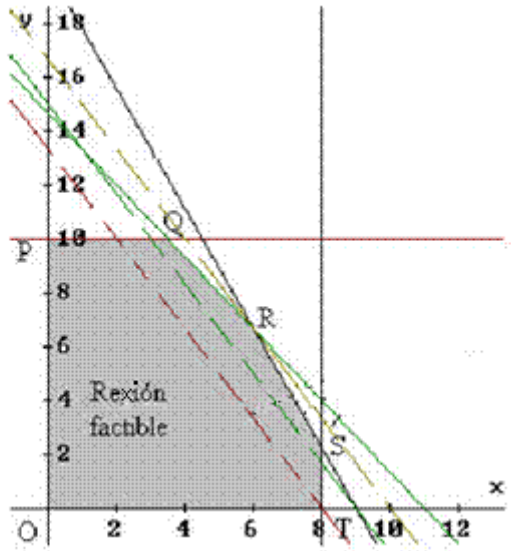
$$y \leq 10$$

$$4x + 3y \leq 44 \text{ (restrición por auga)}$$

$$500x + 225y \leq 4500 \text{ (restrición por inversión)}$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Estas restriccións xeran a rexión factible (sombreada) dada na seguinte figura.



O nivel máximo obtense no vértice R de coordenadas:
R = (6, 20/3) (método gráfico).

Hai que cultivar **6 hectáreas de oliveira A** e **20/3 hectáreas do tipo B**.

b) A produción máxima é:
 $P(6, 20/3) = 500 \cdot 6 + 300 \cdot (20/3) = \mathbf{5000 \text{ litros}}$

10.- Unha empresa fabrica dous modelos de fundas de sofá, A e B, que deixan uns beneficios de 40 e 20 euros respectivamente. Para cada funda do modelo A precísanse 4 horas de traballo e 3 unidades de tea. Para fabricar unha do modelo B requírense 3 horas de traballo e 5 unidades de tea. A empresa dispón de 48 horas de traballo e 60 unidades de tea. Se como máximo poden facerse 9 fundas do modelo A. ¿Cantas fundas de cada modelo han de fabricarse para obter o máximo beneficio e cual sería este?

Solucion:

As restriccións son

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 48 \\ 3x + 5y \leq 60 \\ x \leq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

A función obxectivo é **$f(x, y) = 40x + 20y$**

Dibuxamos a rexión factible

Os vértices son (0, 0), (9, 0), (9, 4), (60/11, 96/11) y (0, 12).

Polo método gráfico vemos que o máximo se alcanza no punto **(9, 4)**.

