

Actividades

1. Atopar as solucións das inecuacións: **a)** $x \geq 0$; **b)** $y \geq 0$; **c)** $x \geq 1$; **d)** $x+y \leq 3$.

2. Encontra a solución xeral da inecuación $-\frac{3}{2}x - \frac{2}{5}y > x - y - 2$.

3. Representa o conxunto de puntos solución do sistema $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ y \leq 2 \end{cases}$

4. Debuxa as rexións factibles ou solucións dos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ x - 2y \geq -10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y \leq 15 \\ x + y \geq 3 \\ x \geq 7; y \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ x - 3y \leq 5 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 4y \geq 8 \\ x - 2y \leq -6 \\ x \geq 0 \end{cases}$

5. Sexa o sistema de inecuacións $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 13 \\ x + 3y \geq -3 \\ x \geq 0 \end{cases}$

a) Debuxa o recinto cuxos puntos son as solucións do sistema e obtén os seus vértices.

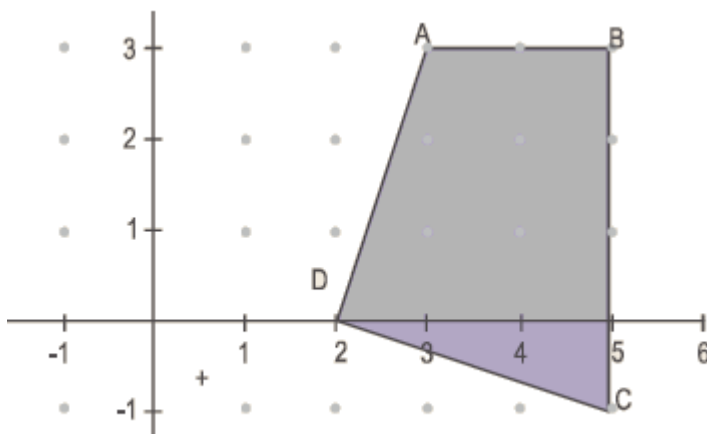
b) Acha os puntos do recinto nos que a función $F(x, y) = x - 2y$ toma os valores máximo e mínimo, e determina estes.

6. Considérase a función $z = x - y$.

a) Representa o conxunto $A = \{(x, y) / 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 6, 0, y \geq 0\}$ e calcula o valor máximo de $F(x, y)$ en A. Algunha das desigualdades que definen o conxunto A podería eliminarse de forma que se segue sendo o mesmo conxunto?

b) Di se a función $F(x, y)$ alcanza valor máximo no conxunto $B = \{(x, y) / 3x + y \leq 15, y - x \leq -5, x \geq 0\}$. En caso afirmativo calcula o devandito valor.

7. O cuadrilátero ABCD é a rexión solución dun sistema de inecuacións lineais. Os lados do cuadrilátero tamén forman parte da rexión solución.



a) Acha o valor máximo e o mínimo da función $F(x, y) = x + 3y$ na devandita rexión.

b) En que puntos da rexión solución toma a función do apartado anterior o valor máximo e en que puntos o valor mínimo?

8. Maximiza e minimiza se é posible a función $F(x, y) = 3x + 2y$, suxeita ás

$$\text{restricións seguintes: } \begin{cases} -7x + 5y \leq 10 \\ -7x + 3y \geq -15 \\ 2x - 3y \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

9. Maximiza e minimiza no primeiro cuadrante a función $z = 6x - 2y$, suxeita ás

$$\text{restricións seguintes: } \begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ 2y \geq 1 + x \\ 4x \leq 1 \end{cases}$$

10. Un autobús Madrid-París ofrece prazas para fumadores ao prezo de 100 euros e para non fumadores ao prezo de 60 euros. Ao non fumador déixaselle levar 50 kg de peso e ao fumador 20 kg. Se o autobús ten 90 prazas e admite unha equipaxe de ata 3000 kg, cal debe ser a oferta de prazas da compañía para optimizar o beneficio?

11. O xefe de seguridade dun museo estuda combinar 2 novos sistemas antirroubo: cámaras de vixilancia nas salas e alarmas en puntos estratéxicos do edificio. Quérese utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con elas as salas máis importantes, e un máximo de 15 cámaras, coas que quedarían todas as salas cubertas. Igualmente, necesítanse polo menos 6 alarmas para cubrir as máis importantes entradas e saídas do edificio. Finalmente, tense un presuposto máximo de 36000 euros, e cada cámara custa 1000 euros mentres que cada alarma custa 500 euros.

a) Que combinacións de unidades de cada sistema se poden instalar cumprindo os requirimentos anteriores? Formula o problema e representa graficamente o conxunto de solucións. Podería instalar 7 cámaras e 59 alarmas?

b) Se o obxectivo é colocar o maior número de dispositivos entre cámaras e alarmas, cantos ha de colocar de cada modalidade? Nese caso, cal será o custo total?

12. Un fabricante de abanos dispón de dous modelos, A e B. O modelo A require, para a súa elaboración, 20 cm² de papel, 120 cm² de lámina de madeira e 1 enganche metálico. O modelo B require: 60 cm² de papel, 80 cm² de lámina de madeira e 1 enganche metálico. O custo de produción de cada modelo é 1,20 euros o A e 1,30 euros o B. O prezo de venda é de 1,80 euros cada un. independentemente do modelo. Tendo en conta que as existencias son de 3000 cm² de papel, 7200 cm² de lámina de madeira e 70 enganches:

a) Representa a rexión factible.

b) Determina o número de abanos de cada modelo que ha de facer para obter un beneficio máximo.

c) Calcula cal é ese beneficio.

13. Na preparación de dous paquetes de café, C_1 e C_2 , úsase café brasileiro e café colombiano. Cada paquete do tipo C_1 contén 300 g de café brasileiro e 200 g de café colombiano, e cada paquete do tipo C_2 contén 100 g de café brasileiro e 400 g de café colombiano. Con cada paquete do tipo C_1 obtense un beneficio de 0,90 euros e con cada paquete do tipo C_2 obtense un beneficio de 1,20 euros. Dispónse de 900 g de café brasileiro e 1600 g de café colombiano.

- a) Cantos paquetes de cada tipo se han de preparar para obter un beneficio máximo?
- b) Cal é este beneficio máximo?

14. Sexa S a rexión do plano de coordenadas de valor maior ou igual que cero e tal que os seus puntos cumpren que:

- (i) A media aritmética das coordenadas é menor ou igual que 5.
- (ii) O dobre da abscisa máis a ordenada é maior ou igual que 5.

- a) Representa graficamente o conxunto S .
- b) Determina en que puntos de S a función $f(x, y) = 2x + y$ toma o valor máximo.

15. Un banco dispón de 18 millóns de euros para ofrecer empréstitos de risco alto e medio, con rendementos do 14% e 7%, respectivamente. Sabendo que se debe dedicar polo menos 4 millóns de euros a empréstitos de risco medio e que o diñeiro investido en alto e medio risco debe estar como máximo a razón de 4 a 5, determina canto debe dedicarse a cada un dos tipos de empréstitos para maximizar o beneficio e calcular este.

16. Un tren de mercadorías pode arrastrar, como máximo, 27 vagóns. En certa viaxe transporta coches e motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagóns e para motocicletas non menos da metade dos vagóns que dedica aos coches. Se os ingresos da compañía ferroviaria son 540 euros por vagón de coches e 360 euros por vagón de motocicletas, calcula como deben distribuírse os vagóns para que o beneficio dun transporte de coches e motocicletas sexa máximo e canto vale o devandito beneficio.

17. Un fabricante de coches lanza unha oferta especial en dous dos seus modelos, ofrecendo o modelo A a un prezo de 9000 euros e o modelo B un terzo máis caro. A oferta está limitada: polas existencias, son 20 coches do modelo A e 10 do B , e polo desexo de vender polo menos tantas unidades do modelo A como do modelo B . Por outra parte, para cubrir gastos desta campaña, os ingresos obtidos con ela deben ser polo menos de 36000 euros.

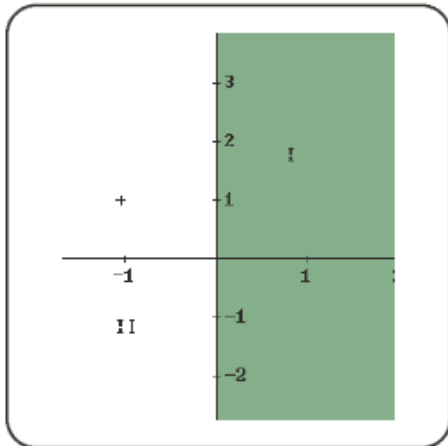
- a) Cantos coches de cada modelo deberá vender para maximizar os seus ingresos?
- b) Cal é o importe da venda?

Soluciones

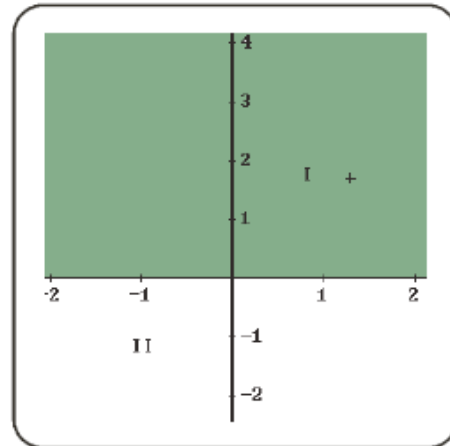
Actividades Sección 4

1. Atopar as solucións das inecuacións: **a)** $x \geq 0$; **b)** $y \geq 0$; **c)** $x \geq 1$; **d)** $x+y \leq 3$.

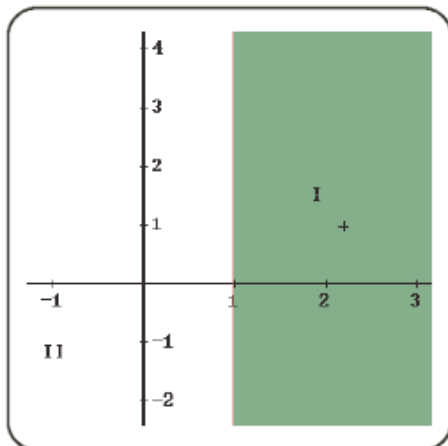
a)



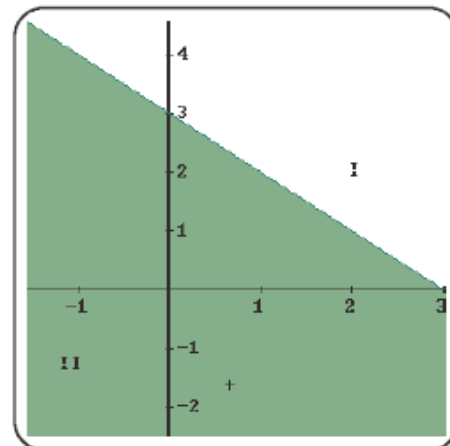
b)



c)



d)



2. Encontra a solución xeral da inecuación $-\frac{3}{2}x - \frac{2}{5}y > x - y - 2$

Solución:

En primeiro lugar simplifícase:

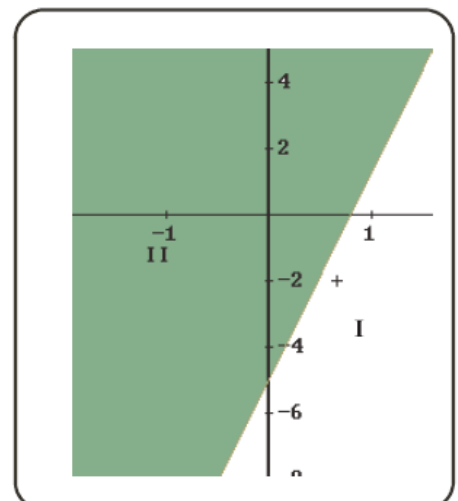
Súmase $-x + y$ aos dous membros:

$$-\frac{3}{2}x - x - \frac{2}{5}y + y > -2$$

Operáse: $-\frac{5}{2}x + \frac{3}{5}y > -2$

Multiplícase por (-10) : $25x - 6y < 20$

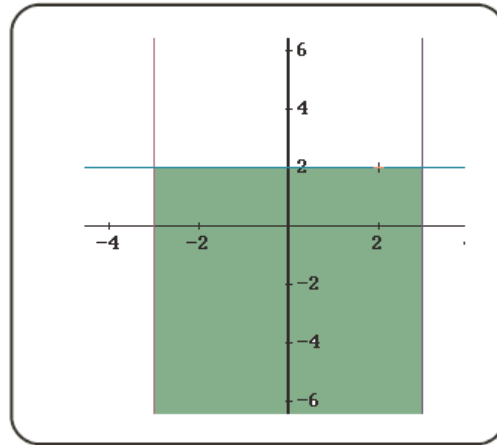
Represéntase graficamente



3. Representa o conxunto de puntos solución do sistema $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ y \leq 2 \end{cases}$

Solucion:

Representáanse os semiplanos solución de cada ecuación, a intersección dánsa a solución do sistema:

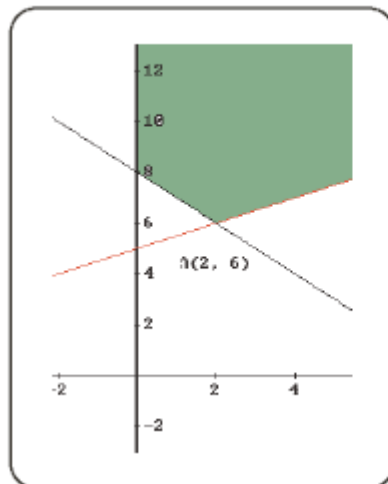


4. Debuxa as rexións factibles ou solucións dos sistemas:

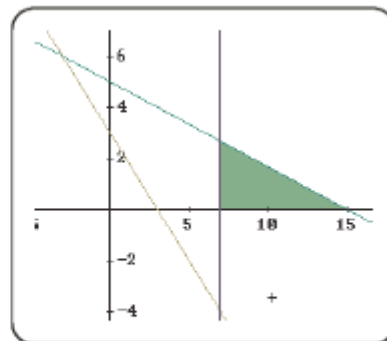
a) $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ x - 2y \geq -10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y \leq 15 \\ x + y \geq 3 \\ x \geq 7; y \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ x - 3y \leq 5 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 4y \geq 8 \\ x - 2y \leq -6 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Solucion: Procédese como na actividade anterior:

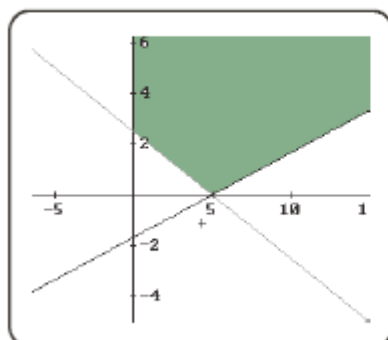
a)



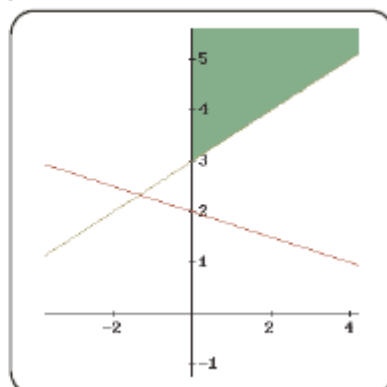
b)



c)



d)



5. Sexa o sistema de inecuacións
$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 13 \\ x + 3y \geq -3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Debuxa o recinto cuxos puntos son as solucións do sistema e obtén os seus vértices.

b) Acha os puntos do recinto nos que a función $F(x, y) = x - 2y$ toma os valores máximo e mínimo, e determina estes.

Solución:

a) Representase a rexión factible; que resulta ser o cuadrilátero ABCD.

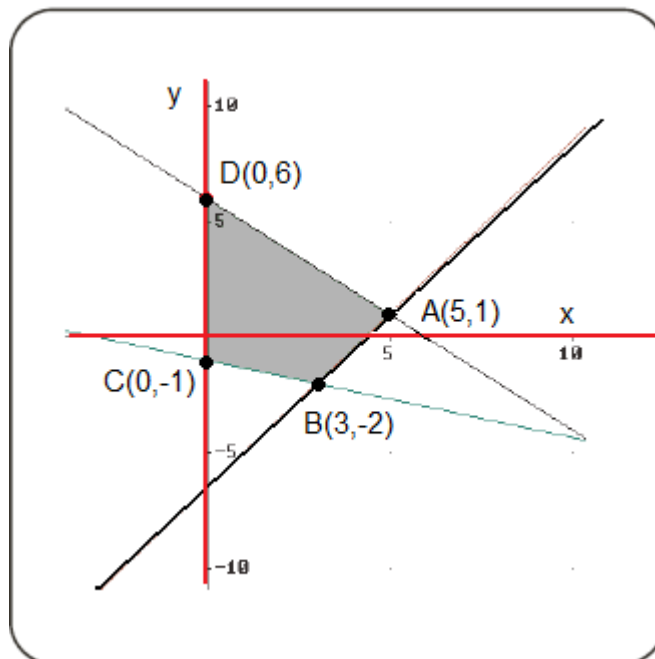
Calculanse os vértices:

Vértice **A**: $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x=5; y=1; \mathbf{A(5,1)}$

Vértice **B**: $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 9y = 9 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow -11y = 22 \Rightarrow y=-2; x=3; \mathbf{B(3,-2)}$

Vértice **C**: $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 3y = -3 \Rightarrow y=-1; x=0; \mathbf{C(0,-1)}$

Vértice **D**: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + y = 6 \Rightarrow x=0; y=6; \mathbf{D(0,6)}$



b) Substitúense os valores dos vertices na función $z = x - 2y$ para ver onde toma os valores máximo e mínimo:

$$z_A(5,1) = 5 - 2 = 3; z_B(3,-2) = 3 + 2 \cdot 2 = 7; z_C(0,-1) = 0 + 2 = 2; z_D(0,6) = 0 - 2 \cdot 6 = -12.$$

O valor **máximo** atópase no punto **B (3,-2)** e o seu valor é **7** e o **mínimo** no punto **D(0,6)** e o seu valor é **-12**.

6. Considérase a función $z = x - y$.

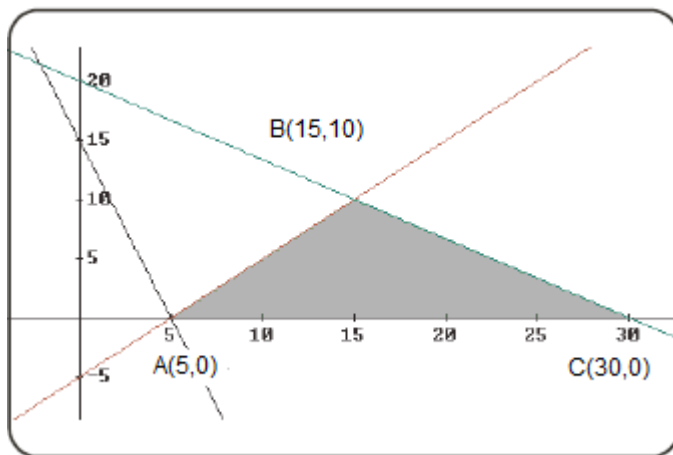
a) Representa o conxunto $A = \{(x,y) / 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$ e calcula o valor máximo de $F(x, y)$ en A. Algunha das desigualdades que definen o conxunto A podería eliminarse de forma que seguise sendo o mesmo conxunto?

b) Di se a función $F(x, y)$ alcanza valor máximo no conxunto $B = \{(x,y) / 3x + y \leq 15, y - x \leq -5, x \geq 0\}$. En caso afirmativo calcula o devandito valor.

Solución:

a) Representamos o conxunto A.

Cálculo dos vértices: $\begin{cases} -x + y = -5 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow 5y = 50; y = 10; x = 15$. **B(15,10)**



Máximo de $z = x - y$ no conxunto:

$$\begin{aligned} z_A(5,0) &= 5; \\ z_B(15,10) &= 5; \\ z_C(30,0) &= 30. \end{aligned}$$

O valor máximo de z atópase en **C(30,0)** e o seu valor é 30.

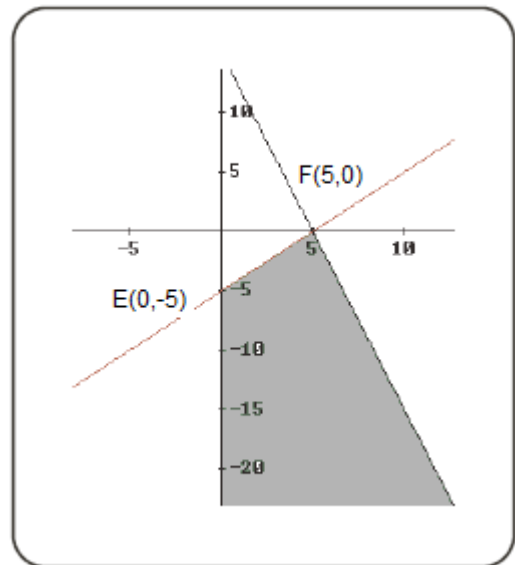
O conxunto A podese definir sen a ecuación $3x + y \geq 15$.

b) Gráfica do conxunto B.

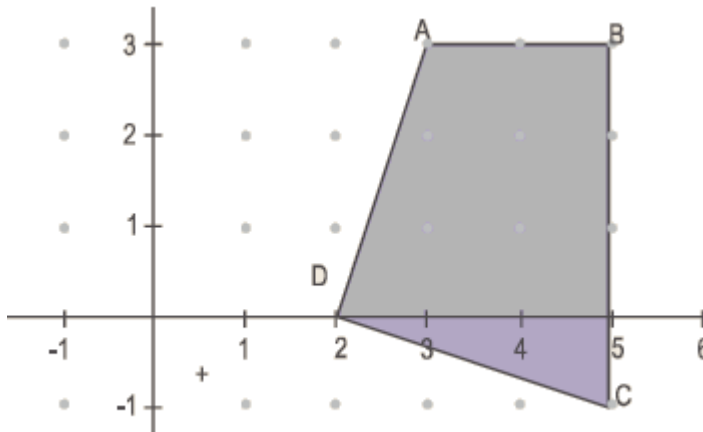
Valores de $z = x - y$ nos vértices:

$$\begin{aligned} z_E(0,-5) &= 0 - (-5) = 5; \\ z_F(5,0) &= 5 - 0 = 5. \end{aligned}$$

A función F toma os mesmos valores en todos os puntos do segmento EF; os valores de F aumentan ao desplazarse paralelamente sobre o conxunto B; polo tanto non téñen máximo en el.



7. O cuadrilátero $ABCD$ é a rexión solución dun sistema de inecuacións lineais. Os lados do cuadrilátero tamén forman parte da rexión solución.



a) Acha o valor máximo e o mínimo da función $F(x, y) = x + 3y$ na devandita rexión.

b) En que puntos da rexión solución toma a función do apartado anterior o valor máximo e en que puntos o valor mínimo?

Solución:

O máximo e o mínimo da función f atopase nos vértices do cuadrilátero e estes teñen as seguintes coordenadas: $A(3,3)$; $B(5,3)$; $C(5,-1)$ y $D(2,0)$.

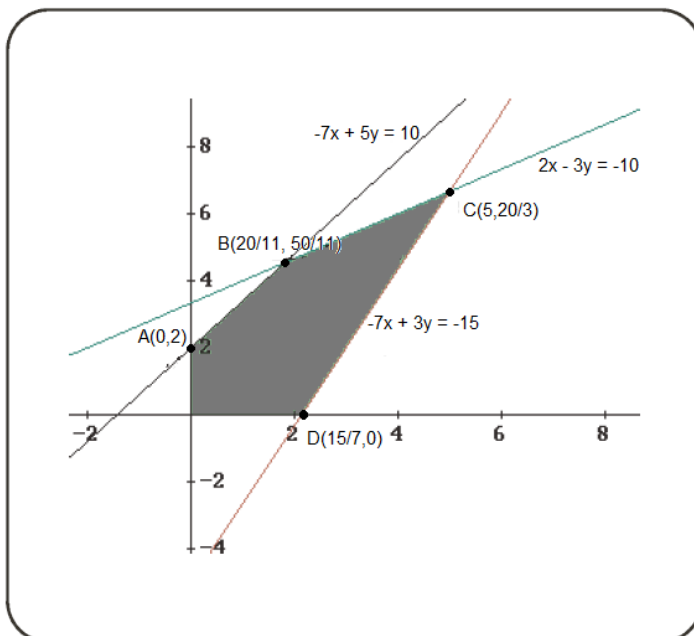
Os valores de F nos vértices son: $F_A(3,3) = 3 + 3 \cdot 3 = 12$; $F_B(5,3) = 5 + 3 \cdot 3 = 14$
 $F_C(5,-1) = 5 + 3 \cdot (-1) = 2$; $F_D(2,0) = 2 + 3 \cdot (0) = 2$.

A función F toma o valor máximo en $B(5,3)$ e o valor mínimo en dous puntos $C(5,-1)$ e $D(2,0)$ polo tanto é mínima en todos os puntos do segmento CD .

8. Maximiza e minimiza se é posible a función $F(x, y) = 3x + 2y$, suxeita ás

restricións seguintes:
$$\begin{cases} -7x + 5y \leq 10 \\ -7x + 3y \geq -15 \\ 2x - 3y \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución: Debúxase a region factible. Cálculanse os vértices: $O(0,0)$, $A(0,2)$ e $D(15/7,0)$ que son inmediatos.



Para calcular os vértices B e C procedemos da seguinte forma:

$$B: \begin{cases} -7x + 5y = 10 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -21x + 15y = 30 \\ 10x - 15y = -50 \end{cases} \Rightarrow x = 20/11 \text{ e } y = 50/11 \Rightarrow B(20/11, 50/11)$$

$$C: \begin{cases} -7x + 3y = -15 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases} \Rightarrow$$

sumanse as ecuacións e :
 $-5x = -25 \Rightarrow x = 5$ e $y = 20/3 \Rightarrow C(5, 20/3)$

Sustituense os vértices na función obxectivo: $F(x,y) = 3x + 2y$:

$$F_O(0,0) = 0; F_A(0,2) = 4; F_B(20/11, 50/11) = 160/11; F_C(5, 20/3) = 85/3; F_D(17/7, 0) = 45/7$$

O **mínimo** atopase no punto **O(0,0)** e o seu valor é **0**.

O **máximo** atopase no punto **C(5,20/3)** e o seu valor é **85/3**

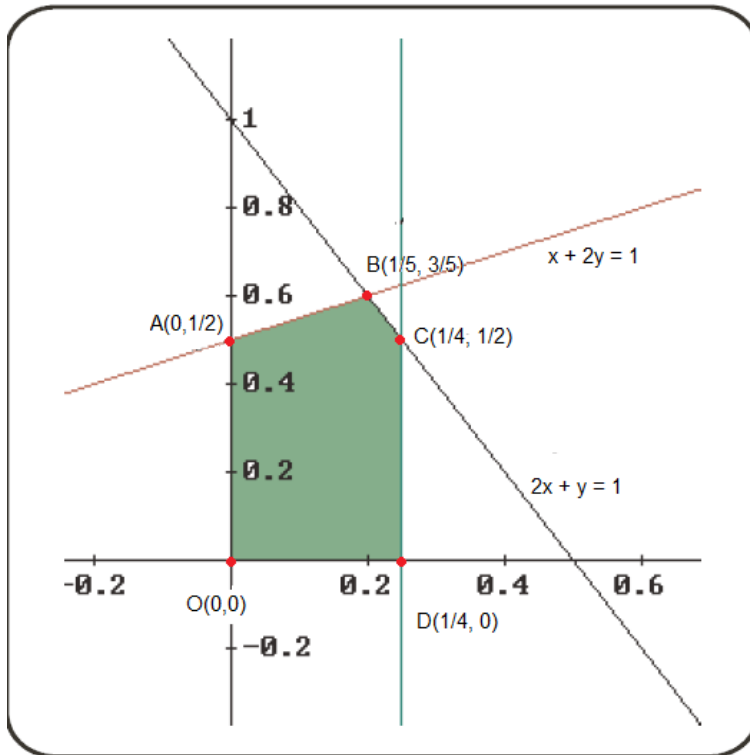
9. Maximiza e minimiza no primeiro cuadrante a función $z = 6x - 2y$, suxeita ás

restricións seguintes:
$$\begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ 2y \geq 1 + x \\ 4x \leq 1 \end{cases}$$

Solución:

Debúxase a region factible.

Calcúlanse os vértices: O(0,0), A(0,1/2) e D (1/4,0) que son inmediatos.



Para calcular os vértices B e C procedemos da seguinte forma:

$$B: \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4 + 2y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 1/5 \text{ e } y = 3/5 \Rightarrow \mathbf{B(1/5, 3/5)}$$

$$C: \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x = 1/4 \text{ e } y = 1/2 \Rightarrow \mathbf{C(1/4, 1/2)}$$

Sustituense os vértices na función obxectivo: $F(x,y) = 6x - 2y$:
 $F_O(0,0) = 0$;
 $F_A(0,1/2) = -1$;
 $F_B(1/5, 3/5) = 0$;
 $F_C(1/4, 1/2) = 1/2$;
 $F_D(1/4, 0) = 3/2$

O **mínimo** atopase no punto **A(0,1/2)** e o seu valor é **-1**.

O **máximo** atopase no punto **D(1/4,0)** e o seu valor é **3/2**.

10. Un autobús Madrid-París ofrece prazas para fumadores ao prezo de 100 euros e para non fumadores ao prezo de 60 euros. Ao non fumador déixaselle levar 50 kg de peso e ao fumador 20 kg. Se o autobús ten 90 prazas e admite unha equipaxe de ata 3000 kg, cal debe ser a oferta de prazas da compañía para optimizar o beneficio?

Solución:

Sexan x e y o número de prazas de fumadores e non fumadores que se ofertan.

As prazas están sometidas ás restricións seguintes:

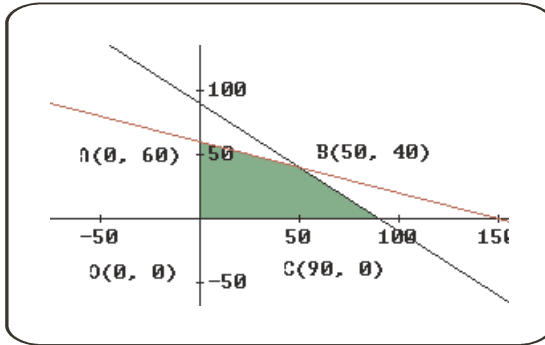
$$\begin{aligned}x + y &= 90 & x + y &= 90 \\20x + 50y &= 3000 \Rightarrow 2x + 5y = 300 \\x &\geq 0 ; y &\geq 0 & x \geq 0 ; y \geq 0\end{aligned}$$

Calcúlanse os vértices.

Os vértices $A(0, 60)$ e $C(90, 0)$ son inmediatos.

O vértice B é a solución do sistema

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases} \Rightarrow B(50, 40)$$



Trátase de optimizar a función $F(x,y) = 100x + 60y$

$$F_A(0, 60) = 0 \cdot 100 + 60 \cdot 60 = 3600 \text{ euros.}$$

$$F_B(50, 40) = 50 \cdot 100 + 40 \cdot 60 = 7400 \text{ euros.}$$

$$F_C(90, 0) = 90 \cdot 100 + 0 \cdot 60 = 9000 \text{ euros.}$$

O beneficio máximo obtense ofertando as **90 prazas aos fumadores**.

11. O xefe de seguridade dun museo estuda combinar 2 novos sistemas antirroubo: cámaras de vixilancia nas salas e alarmas en puntos estratéxicos do edificio. Quérese utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con elas as salas máis importantes, e un máximo de 15 cámaras, coas que quedarían todas as salas cubertas. Igualmente, necesítanse polo menos 6 alarmas para cubrir as máis importantes entradas e saídas do edificio. Finalmente, tense un presuposto máximo de 36000 euros, e cada cámara custa 1000 euros mentres que cada alarma custa 500 euros.

- Que combinacións de unidades de cada sistema se poden instalar cumprindo os requirimentos anteriores? Formula o problema e representa graficamente o conxunto de solucións. Podería instalar 7 cámaras e 59 alarmas?
- Se o obxectivo é colocar o maior número de dispositivos entre cámaras e alarmas, cantos ha de colocar de cada modalidade? Nese caso, cal será o custo total?

Solución:

a) Sexa x o número de cámaras e y o de alarmas que debe instalar para cumprir os obxectivos.

Están sometidos ás restricións

$$6 < x < 15$$

$$6 < y$$

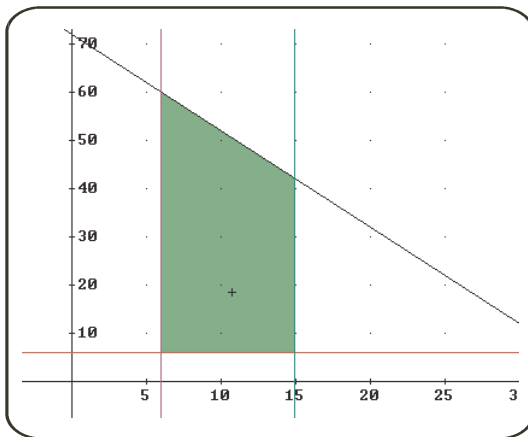
$$1000x + 500y \leq 36000$$

O número de cámaras x que pode instalar será: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 o 14.

O mínimo gasto en cámaras será se instala 7, por un importe de 7000 euros. Para instalar alarmas quédanlle $36000 - 7000 = 29000$ euros, que lle permiten instalar ata $29000/500 = 58$ alarmas.

Polo tanto, non pode instalar 7 cámaras e 59 alarmas.

O máximo número de cámaras que pode colocar será 14, cun gasto de 14000 euros; o que permite colocar aproximadamente 44 alarmas.



A partir da figura que é un trapezoido de área 360 posibilidades.

A función obxectivo que se desexa maximizar é

$$F(x, y) = x + y.$$

O máximo atópase nos vértices:

$$F(7, 45) = 7 + 58 = 65 ;$$

$$F(14, 44) = 14 + 44 = 58.$$

Polo tanto, pódense colocar 65 dispositivos como máximo, dos que 7 deben ser cámaras e o resto 58 alarmas.

O custo total é: $7 \cdot 1000 + 58 \cdot 500 = 36000$ euros.

12. Un fabricante de abanos dispón de dous modelos, A e B. O modelo A require, para a súa elaboración, 20 cm² de papel, 120 cm² de lámina de madeira e 1 enganche metálico. O modelo B require: 60 cm² de papel, 80 cm² de lámina de madeira e 1 enganche metálico. O custo de produción de cada modelo é 1,20 euros o A e 1,30 euros o B. O prezo de venda é de 1,80 euros cada un, independentemente do modelo. Tendo en conta que as existencias son de 3000 cm² de papel, 7200 cm² de lámina de madeira e 70 enganches:

- Representa a rexión factible.
- Determina o número de abanos de cada modelo que ha de facer para obter un beneficio máximo.
- Calcula cal é ese beneficio.

Solución:

Sexan x os abanos do modelo A e y os abanos do modelo B que se poden fabricar.

Os abanos sométense ás seguintes restricións:

$$\begin{aligned} 20x + 60y &\leq 3000 \\ 120x + 80y &\leq 7200 \Rightarrow \\ x + y &\leq 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 6y &\leq 300 \\ 12x + 8y &\leq 720 \Rightarrow \\ x + y &\leq 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y &\leq 150 \\ 3x + 2y &\leq 180 \\ x + y &\leq 70 \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$

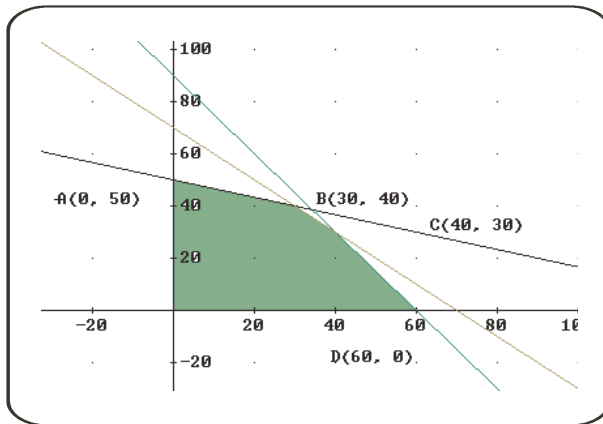
$$y \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



a) Cálculanse os vértices:

$$\begin{cases} x + 3y = 150 \\ x + y = 70 \end{cases} \Rightarrow 2y = 80 \Rightarrow$$

$y = 40$; $x = 30$. Vértice **B(30, 40)**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ x + y = 70 \end{cases} \Rightarrow x = 40; y = 30$$

Vértice **C(40, 30)**

b) A función obxectivo (beneficio = prezo de venda menos o de produción) que hai que maximizar será:

$$F(x, y) = (1,8x + 1,8y) - (1,2x + 1,3y) = 0,6x + 0,5y.$$

Substitúense os vértices na función obxectivo para ver como se logra o beneficio máximo:

$$F_A(0, 50) = 0,6 \cdot 0 + 0,5 \cdot 50 = \mathbf{25 \text{ euros}}; F_B(30, 40) = 0,6 \cdot 30 + 0,5 \cdot 40 = \mathbf{38 \text{ euros}};$$

$$F_C(40, 30) = 0,6 \cdot 40 + 0,5 \cdot 30 = \mathbf{39 \text{ euros}}; F_D(60, 0) = 0,6 \cdot 60 + 0,5 \cdot 0 = \mathbf{36 \text{ euros}}.$$

Débense fabricar **40 abanos do modelo A e 30 abanos do modelo B.**

c) O beneficio máximo é de **39 euros**.

13. Na preparación de dous paquetes de café, C_1 e C_2 , úsase café brasileiro e café colombiano. Cada paquete do tipo C_1 contén 300 g de café brasileiro e 200 g de café colombiano, e cada paquete do tipo C_2 contén 100 g de café brasileiro e 400 g de café colombiano. Con cada paquete do tipo C_1 obtense un beneficio de 0,90 euros e con cada paquete do tipo C_2 obtense un beneficio de 1,20 euros. Disponse de 900 g de café brasileiro e 1600 g de café colombiano.

a) Cantos paquetes de cada tipo se han de preparar para obter un beneficio máximo?

b) Cal é este beneficio máximo?

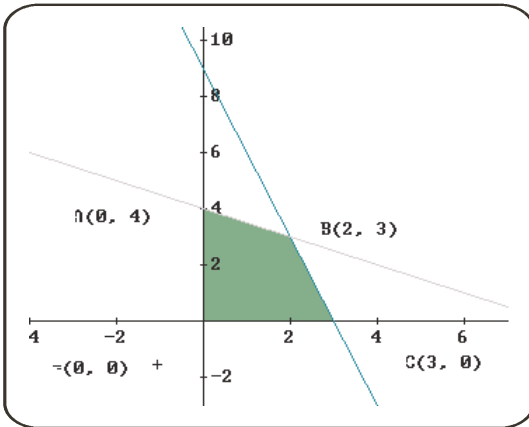
Solución:

Sexa x o número de paquetes de C_1 e y o de C_2 que se poden preparar.

Os paquetes están sometidos ás restricións seguintes:

$$\begin{aligned} 300x + 100y &\leq 900 & 3x + y &\leq 9 \\ 200x + 400y &\leq 1600 & \Rightarrow & 2x + 4y \leq 16 \\ x &\geq 0; y &\geq 0 & x \geq 0; y \geq 0 \end{aligned}$$

Representase a rexión factible.



Calcúlanse os vértices:

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$$

Substitúese na primeira ecuación: $6 + y = 9$; $y = 3$.

Vértice **B(2, 3)**

a) Trátase de optimizar a función obxectivo
 $F(x, y) = 0,9x + 1,2y$.

$$F_A(0, 4) = 0,9 \cdot 0 + 1,2 \cdot 4 = 4,8 \text{ euros};$$

$$F_B(2, 3) = 0,9 \cdot 2 + 1,2 \cdot 3 = 5,4 \text{ euros};$$

$$F_C(3, 0) = 3 \cdot 0,9 + 1,2 \cdot 0 = 2,7 \text{ euros}.$$

O máximo beneficio obtense fabricando **2 paquetes do tipo C₁ e 3 do C₂**.

b) O beneficio máximo é de **5,4 euros**

14. Sexa S a rexión do plano de coordenadas de valor maior ou igual que cero e tal que os seus puntos cumpren que:

- (i) A media aritmética das coordenadas é menor ou igual que 5.
- (ii) O dobre da abscisa máis a ordenada é maior ou igual que 5.

a) Representa graficamente o conxunto S.

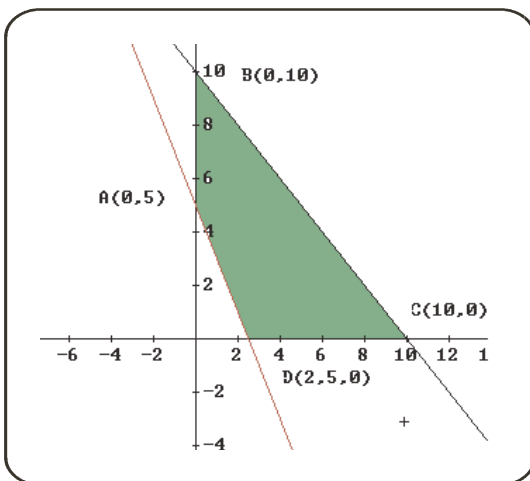
b) Determina en que puntos de S a función $f(x, y) = 2x + y$ toma o valor máximo.

Solución:

Sexan x e y as coordenadas da rexión S.

Estas coordenadas están sometidas ás restricións seguintes:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x+y}{2} \leq 5 \\ 2x + y \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ 2x + y \geq 5 \end{cases}$$



Representase a rexión factible.

Os vértices son inmediatos: A(0,5); B(0,10); C(10,0) e D(2,5,0)

Vexamos onde a función $f(x, y) = 2x + y$ toma o valor máximo:

$$f_A(x, y) = 2 \cdot 0 + 5 = 5;$$

$$f_C(10, 0) = 2 \cdot 10 + 0 = 20;$$

O máximo da función f atópase en **C(10,0)** e o seu valor é **20**.

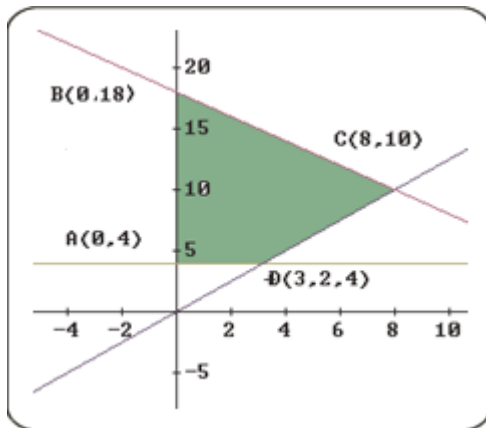
15. Un banco dispón de 18 millóns de euros para ofrecer empréstitos de risco alto e medio, con rendementos do 14% e 7%, respectivamente. Sabendo que se debe dedicar polo menos 4 millóns de euros a empréstitos de risco medio e que o diñeiro investido en alto e medio risco debe estar como máximo a razón de 4 a 5, determina canto debe dedicarse a cada un dos tipos de empréstitos para maximizar o beneficio e calcular este.

Solución:

Sexa x o diñeiro para empréstitos de risco alto e y para empréstitos de risco medio.

Os riscos están sometidos ás restricións seguintes:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 4 \\ x + y \leq 18 \\ \frac{x}{y} < \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 4 \\ x + y \leq 18 \\ 5x < 4y \end{cases}$$

A gráfica da rexión factible é



Os vértices da rexión factible son:

$A(0, 4)$ e $B(0, 18)$; inmediatos.

Vértice C: $\begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x=8 \text{ e } y=10;$

C(8,10)

Vertices D: $\begin{cases} y = 4 \\ 5x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x=3,2 ; \mathbf{D(3,2,4)}$

A función obxectivo a maximizar é

$F(x, y) = 0,14x + 0,07y$

e o valor máximo atópase nos vértices.

$F_A(0,4) = 0,14 \cdot 0 + 0,07 \cdot 4 = 0,28$ millóns de euros.

$F_B(0,18) = 0,14 \cdot 0 + 0,07 \cdot 18 = 1,26$ millóns de euros.

$F_C(8,10) = 0,14 \cdot 8 + 0,07 \cdot 10 = 1,82$ millóns de euros.

$F_D(3,2, 4) = 0,14 \cdot 3,2 + 0,07 \cdot 4 = 0,728$ millóns de euros.

Logo o máximo está en **C(8,10)** e o valor máximo é **1.820.000 euros**.

16. Un tren de mercadorías pode arrastrar, como máximo, 27 vagóns. En certa viaxe transporta coches e motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagóns e para motocicletas non menos da metade dos vagóns que dedica aos coches. Se os ingresos da compañía ferroviaria son 540 euros por vagón de coches e 360 euros por vagón de motocicletas, calcula como deben distribuírse os vagóns para que o beneficio dun transporte de coches e motocicletas sexa máximo e canto vale o devandito beneficio.

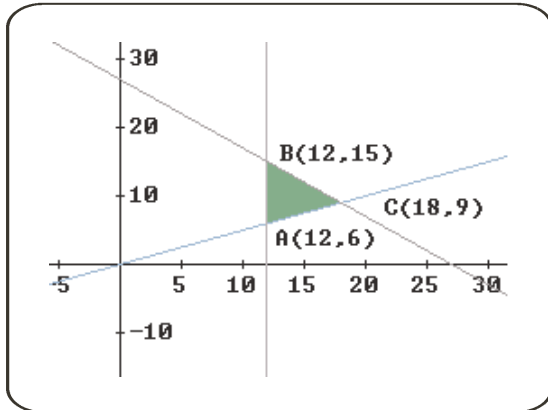
Solución:

Sexa x o número de vagóns para transportar coches e y o número de vagóns para transportar motocicletas.

Estes valores están sometidos ás restricións seguintes:

$$\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ 2y \geq x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

A gráfica da rexión factible é:



Os vértices da rexión factible son:

$$x=12; 2y=x \Rightarrow \mathbf{A(12,6)}$$

$$x=12; x+y=27 \Rightarrow y=15; \mathbf{B(12,15)}$$

$$x+y=27; 2y=x \Rightarrow y=9; x=18; \mathbf{C(18,9)}$$

A función obxectivo que se desexa maximizar é

$$\mathbf{F(x, y) = 540x + 360y;}$$

o valor máximo atópase nos vértices da rexión factible:

$$F_A(12, 6) = 540 \cdot 12 + 360 \cdot 6 = 8160 \text{ euros.}$$

$$F_B(12, 15) = 540 \cdot 12 + 360 \cdot 15 = 11880 \text{ euros.}$$

$$F_C(18, 9) = 540 \cdot 18 + 360 \cdot 9 = 12960 \text{ euros.}$$

O beneficio máximo preséntase en **C, 18 vagóns** para transportar coches e **9 vagóns** para transportar motocicletas; o beneficio máximo será de **12.960 euros**.

17. Un fabricante de coches lanza unha oferta especial en dous dos seus modelos, ofrecendo o modelo A a un prezo de 9000 euros e o modelo B un terzo máis caro. A oferta está limitada: polas existencias, son 20 coches do modelo A e 10 do B, e polo desexo de vender polo menos tantas unidades do modelo A como do modelo B. Por outra parte, para cubrir gastos desta campaña, os ingresos obtidos con ela deben ser polo menos de 36000 euros.

a) ¿Cantos coches de cada modelo deberá vender para maximizar os seus ingresos?

b) ¿Cal é o importe da venda?

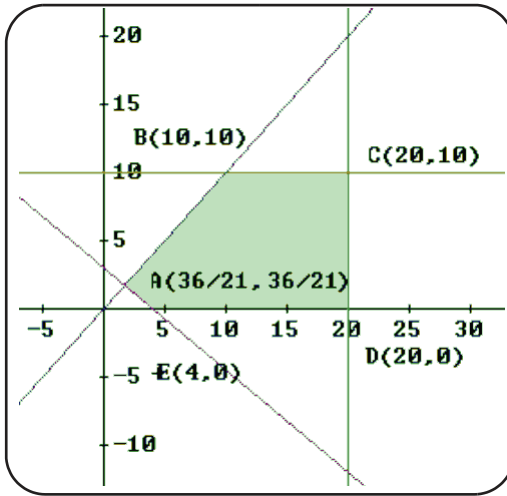
Solución:

Sexa x os modelos de coches do tipo A e y os do tipo B que deben venderse para cumprir os obxectivos.

Os modelos están suxeitos ás restricións seguintes:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ x \geq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ x - y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9000x + 12000y \geq 36000 \\ 9x + 12y \geq 36 \end{cases}$$

A gráfica da rexión factible será:



Os vértices da rexión factible son:

D(20, 0) e **E(4, 0)** inmediatos.

Vértice **A**: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 9x + 12y = 36 \end{cases} \Rightarrow 21x = 36 \Rightarrow$

$x = 36/21$; **A(36/21, 36/21)**;

Vértice **B**: $\begin{cases} x = 10 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ **B(10, 10)**

Vértice **C**: $x = 20, y = 10 \Rightarrow$ **C(20, 10)**

Prezo do modelo **B** = $9000 + 1/3 \cdot 9000 =$ **12000 euros**.

A función obxectivo que se desexa maximizar é **$F(x, y) = 9000x + 12000y$** .

$F_A(1,71, 1,71) = 9000 \cdot 1,71 + 12000 \cdot 1,71 = 35910$ euros;

$F_B(10, 10) = 9000 \cdot 10 + 12000 \cdot 10 = 210000$ euros

$F_C(20, 10) = 9000 \cdot 20 + 12000 \cdot 10 = 300000$ euros;

$F_D(20, 0) = 9000 \cdot 20 + 12000 \cdot 0 = 180000$ euros

$F_E(4, 0) = 9000 \cdot 4 + 12000 \cdot 0 = 36000$ euros.

a) Para maximizar beneficios débense vender **20 coches** do modelo **A** e **10 coches** do modelo **B**.

b) O importe da venda será **300.000 euros**.