

Unidade 3. Determinantes. Sistemas de ecuaciones

1. Determinantes de orde dúas

A cada matriz cadrada de orde dúas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ asociámoslle un número real, chamado determinante de orde dúas, do seguinte xeito: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Nota: Obsérvase que o número de sumandos dun determinante de orde dúas é dous, coincide co valor de $2! = 1 \cdot 2$.

O **determinante dunha matriz cadrada de orde dúas** é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, menos o produto dos elementos da diagonal secundaria.

O determinante da matriz A simbolizarémolo por $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Dado que unha matriz está definida, ben polos seus vectores fila ou ben polos seus vectores columna, o determinante dependerá das filas ou das columnas da matriz. Por este motivo, con frecuencia escribiremos:

$|A| = \det(A) = \det(f_1, f_2)$ ou ben, $|A| = \det(c_1, c_2)$; onde f_1, f_2 indica as dúas filas de A e c_1 e c_2 son as columnas.

Exemplo

1. Calcula o determinante das matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 8 + 3 = 11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 4 = -10 - 12 = -22$$

$$|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1 \text{ (O determinante da matriz unidade é 1)}$$

$$|N| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 0 - 0 = 0 \text{ (O determinante dunha matriz que ten unha columna de ceros é cero)}$$

2. Determinantes de orde tres

Antes de definir os determinantes das matrices cadradas de calquera orde imos considerar algúns determinantes importantes de orde inferior á orde dos determinantes das matrices cadradas sobre as que se definen. Os estudos que aparecen a continuación realízanse a partir de matrices de orde tres, pero xeneralízanse a calquera orde.

2.1. Menor complementario dun elemento

Dada a matriz cadrada de orde tres chamamos **menor complementario do elemento** a_{ij} e simbolízase por M_{ij} , ao determinante da matriz cadrada de orde dúas que resulta de suprimir en A a fila i e a columna j.

Exemplos: sexa $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ unha matriz de orde tres, os menores dos elementos

a_{21} e a_{31} , M_{21} e M_{31} , respectivamente, serán:

- $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinante que se conseguiu ao suprimir a segunda fila e primeira columna na matriz A.
- $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ determinante que se conseguiu ao suprimir a terceira fila e primeira columna na matriz A.

2.2. Adxunto dun elemento

Chamamos **adxunto** do elemento a_{ij} , e representámolo por A_{ij} , ao menor complementario de a_{ij} precedido do signo + ou -, segundo $i+j$ sexa par ou impar, respectivamente. Pódese expresar do seguinte seixo: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Exemplos: os adxuntos A_{21} e A_{31} dos elementos a_{21} e a_{31} serán:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemplo

1. Simboliza e calcula os menores e os adxuntos de a_{13} e a_{23} da matriz cadrada

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{Simbolización: } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Cálculos: } M_{13} = 1 \cdot 3 - (-1)(-4) = 3 - 4 = -1; \quad A_{13} = (-1)^4 (-1) = -1$$

$$M_{23} = (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot 3 = -6 + 3 = -3; \quad A_{23} = (-1)^5 (-3) = 3.$$

2.3. Definición de determinantes de orde tres

A cada matriz cadrada de orde tres A asociámoslle un número, chamado determinante de orde tres, da seguinte forma:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

O **determinante dunha matriz cadrada de orde tres** é igual á suma dos elementos dunha fila ou columna multiplicados polos adxuntos correspondentes.

Nota: Na fórmula anterior, o determinante exprésase como produto da primeira fila polos seus adxuntos; pódese comprobar que o valor do determinante é independente da fila ou columna que se elixa para o seu cálculo.

Opérase sobre a definición anterior e aparece a expresión desenvolvida do valor dun determinante de orde tres:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

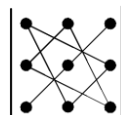
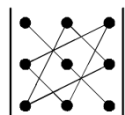
Ordénanse as sumas e diferenzas:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Nota: Os seis produtos anteriores coinciden co número $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ e obtéñense con sinxeleza mediante a regra seguinte, chamada **Regra de Sarrus**.

Produtos con signo +

Produtos con signo -



Os produtos con signo (+) fórmanos os elementos da diagonal principal, e os dous paralelos a eles polos do vértice oposto.

Os produtos con signo (-) fórmanos os elementos da diagonal secundaria, e os dous paralelos a eles polos do vértice oposto.

Exemplo

2. Utiliza a primeira definición e a continuación a Regra de Sarrus para calcular o valor do

determinante $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

Solución:

Pola primeira definición, desenvólves pola segunda fila.

$$|A| = 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4(6-6) + 0(12-3) - 5(4-1) = -4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = -15$$

Facemos agora o cálculo pola Regra de Sarrus.

Produtos con signo máis: $+2 \cdot 0 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3$.

Produtos con signo menos: $-1 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

$$|A| = 0 + 5 + 24 - 0 - 20 - 24 = -15$$

3. Propiedades dos determinantes de orde tres

Neste apartado desenvólvense algunhas propiedades para os determinantes de orde tres, que son válidas para os determinantes de calquera orde. As devanditas propiedades serven para facilitar o cálculo de determinantes.

1. O valor do determinante dunha matriz cadrada é igual ao do seu trasposta. É dicir:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

$$\text{Por exemplo, } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = |A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

2. Se os elementos dunha fila ou columna dunha matriz se poden descompoñer en suma de dous sumandos, o seu determinante é igual á suma de dous determinantes que teñen iguais todas as filas ou columnas agás a fila ou columna cuxos sumandos pasan a formar parte de cada un dos determinantes respectivos.

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

A igualdade compróbase ao desenvolver os dous membros da igualdade.

3. Se os elementos dunha fila ou columna se multiplican por un número, o determinante queda multiplicado polo devandito número

$$\begin{vmatrix} ka & b & c \\ kd & e & f \\ kg & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

A igualdade compróbase ao desenvolver os dous membros da igualdade.

4. O determinante do produto de dúas matrices cadradas é igual ao produto dos determinantes das matrices factores

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Comprobar a

$$\text{igualdade: } \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 10 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

Opérase e resulta: primeiro membro, $-10 \cdot 17$ e segundo membro, -170 .

5. Se nunha matriz cadrada se permutan entre si dúas filas ou dúas columnas, o seu determinante cambia de signo.

$$\text{Por exemplo, } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}; \text{ que ao desenvolver resulta } -15 = -15.$$

6. Se una matriz cadrada ten dúas filas ou dúas columnas iguais, o determinante asociado é cero

Pódese razoar: se se cambiasen entre si as dúas filas ou as dúas columnas iguais resultaría o mesmo determinante e, pola propiedade anterior, terase que o valor do determinante sería un número que debe coincidir co seu oposto, e este é o cero.

$$\text{Por exemplo, } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Se unha matriz ten dúas filas ou dúas columnas proporcionais, o determinante asociado é cero.

Por exemplo, aplícanse as propiedades 3 e 6 e resulta:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 = 0$$

8. Se unha fila ou columna dunha matriz é suma doutras dúas multiplicadas por números distintos de cero, o determinante asociado é cero

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ma + nd & mb + ne & mc + nf \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

9. Se a unha fila ou columna dunha matriz se lle suma outra fila ou columna multiplicada por calquera número distinto de cero, o determinante da matriz resultante non varía.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d + ma & e + mb & f + mc \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

4. Determinantes de orde n

Se se xeneraliza a definición adoptada para determinantes de orde tres, podemos dicir que o **determinante de orde n** é igual á suma dos produtos dos elementos dunha fila ou columna calquera polos seus adxuntos correspondentes.

O cálculo de determinantes mediante desenvolvemento directo remata nos de orde tres, precísanse $3! = 6$ sumandos de tres factores cada un; de todos os xeitos, os seis sumandos fórmanse doadamente mediante a Regra de Sarrus; para o cálculo de determinantes de orde catro precísanse $24 = 4!$ sumandos de 4 factores cada un.

A definición dada nos apartados anteriores rebaixa mediante os adxuntos a orde dos determinantes que se van desenvolver; en concreto, un determinante de orde catro desenvólvese mediante catro adxuntos de orde tres.

Para evitar o cálculo dos catro adxuntos no caso de determinantes de orde catro aplícanse as propiedades dos determinantes e transfórmase o determinante dado noutro de igual valor, no que unha das filas ou columnas teña o maior número de ceros posible.

Exemplo

3. Calcula o determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{(4^a \text{ fila} - 1^a \text{ fila por } 3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \end{vmatrix} \xrightarrow{(pola 1^a \text{ columna})} 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -12 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2^a \text{ fila} + 1^a \text{ fila})} \begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & -12 \end{vmatrix} \xrightarrow{(pola 1^a \text{ columna})} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -3(-48 - 16) - 4(-2 - 16) = 264$$

5. Matriz inversa por determinantes

5.1 Matriz adxunta

Dada una matriz cadrada A, chámase **matriz adxunta** de A e represéntase por $\text{adx}(A)$, á matriz que resulta de substituír cada elemento a_{ij} da matriz A polo seu adxunto correspondente A_{ij} .

Exemplo

5. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula a súa matriz adxunta.

Solución:

Calculemos en primeiro lugar o determinante de A; aínda que para o cálculo da matriz adxunta non se precisa o seu valor, utilizarémolo nas propiedades da matriz adxunta.

$$|A| =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 8 - 24 - 12 - 0 = -10$$

Calcúlanse todos os adxuntos; para iso colócase o signo que corresponda á potencia $(-1)^{i+j}$ seguida do menor complementario do elemento.

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9; \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{Polo tanto a matriz adxunta de } A \text{ será: } \text{adx}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -4 \\ 8 & -12 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

5.2. Propiedade da matriz trasposta

O produto dunha matriz A pola trasposta da súa adxunta é una matriz escalar na que os elementos da diagonal principal coinciden co valor do determinante de A . É dicir, no caso dunha matriz de orde tres:

$$A \cdot (\text{adx}(A))^t = (\text{adx}(A))^t \cdot A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

A demostración desta propiedade faise a partir da definición de matrices adxunta e trasposta e as propiedades dos determinantes.

Exemplo

6. Comproba que se cumpre a propiedade anterior para as matrices do exemplo anterior.

Solución:

$$A \cdot (\text{adx}(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -9 & -4 \\ 8 & -12 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ -9 & -12 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

=

5.3.Cálculo da matriz inversa

Tendo en conta os resultados obtidos a partir da propiedade da matriz trasposta

$$A \cdot (\text{adx}(A))^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I$$

No caso de $|A| \neq 0$, e unicamente nesta situación, pódese dividir os dous membros por $|A|$; dividindo os dous membros polo determinante de A , queda:

$$A \cdot \left(\frac{(\text{adx}(A))^t}{|A|} \right) = I$$

Por último, tendo en conta a definición de **matriz inversa** $A \cdot A^{-1} = I$, identificando as dúas igualdades tense:

$$A^{-1} = \frac{(\text{adx}(A))^t}{|A|}$$

No desenvolvemento do cálculo da matriz inversa dunha matriz obtivemos os seguintes resultados:

- Unicamente teñen inversa aquelas matrices cuxo determinante é distinto de cero, é dicir, as matrices regulares.
- A inversa dunha matriz regular A é igual á trasposta da súa adxunta, dividida polo determinante de A .

Como o proceso para chegar á matriz inversa foi longo, resúmese así:

- **Primeiro:** calcúlase o determinante da matriz dada; se este é distinto de cero, a matriz é regular e ten inversa.
- **Segundo:** calcúlase a súa matriz adxunta.
- **Terceiro:** trasponse a matriz adxunta.
- **Cuarto:** divídese a matriz adxunta da trasposta obtida polo determinante

Exemplos

7. Comproba se as seguintes matrices teñen inversa e, en caso afirmativo, calcúlalas:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$; como o determinante de A é distinto de cero, a matriz A ten inversa.

$$\text{adx}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Trasposta da adxunta $(\text{adx}(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Inversa: $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Comprobación: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1$; como é distinto de cero, a matriz B ten inversa.

Cálculo da adxunta:

$$\begin{aligned} \text{adx}(B) &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -9 & -4 \\ 8 & -12 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trasposta da adxunta: $(\text{adx}(B))^t = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ -9 & -12 & -2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Inversa $B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ -9 & -12 & -2 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -1 \\ 9 & 12 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

6. Ecuacións e sistemas matriciais

Ás ecuacións e sistemas nos que as variables son matrices chámaseles **ecuacións ou sistemas de ecuacións matriciais**. Para resolver as devanditas ecuacións e os sistemas, segúranse os mesmos principios que resolven as ecuacións e sistemas con coeficientes e variables reais; convén recordar as particularidades das matrices, en canto ás súas inversas

Unidade 2.

A continuación, estudaremos algunhas ecuacións e sistemas matriciais.

Se a ecuación matricial se reduce á forma $\lambda \cdot X = A$; onde λ é un número real distinto de cero e X, A matrices da mesma orde; a ecuación resólvese multiplicando os dous membros por $1/\lambda$; isto é $X = \frac{1}{\lambda} A$

Exemplo:

8. Calcula a matriz X na ecuación matricial $A + 2X = B$, sabendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

Trasponse A ao segundo membro: $2X = B - A$

Trasponse 2 ao segundo membro: $X = \frac{1}{2}(B - A)$

Substitúense as variables polos seus valores e opérase:

$$X = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

No caso de ecuacións matriciais que se reducen á forma $A \cdot X = B$; ou $X \cdot A = B$ e A ten inversa; a incógnita X calcúlase respectivamente multiplicando á esquerda ou dereita por A^{-1} os dous membros da igualdade; a inversa dunha matriz calcúlase con maior sinxeleza se se aplica a teoría de determinantes.

Os seguintes exemplos son ampliación dos que aparecen na Unidade 2.

Exemplo:

9. Resolve as seguintes ecuacións matriciais a) $AX + B = C$; b) $XA - 2B = C$; c) $AX = BX + 9C$. Onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix};$$

Solución:

Calcúlase a inversa de A : $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$

$$\text{adx}(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\text{adx}(A))^t = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot X + B = C$; $A \cdot X = C - B$; $A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1}(C - B)$; $X = A^{-1}(C - B)$

Substitúense as variables polos seus valores e opérase:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 44 & 40 \\ -13 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -22 & -20 \\ 13/2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b) X \cdot A - 2B = C; \quad X \cdot A = C + 2B; \quad (X \cdot A) \cdot A^{-1} = (C + 2B) \cdot A^{-1}; \quad X = (C + 2B) \cdot A^{-1}$$

Substitúense as variables polos seus valores e opérase:

$$\begin{aligned} X &= \left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right] \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 38 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -18 & 23/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c) A \cdot X = B \cdot X + 9C; \quad A \cdot X - B \cdot X = 9C; \quad (A - B) \cdot X = 9C; \quad X = (A - B)^{-1} \cdot 9C$$

Calcúlase a inversa de $(A - B)$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}; \quad |A - B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 2 = 9$$

$$\text{adx}(A - B) = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\text{adx}(A - B))^t = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (A - B)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Substitúense as variables polos seus valores e opérase:

$$X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} 9 \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot 9 \begin{pmatrix} 32 & 52 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 52 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Os sistemas de ecuacións lineais pódense resolver como ecuacións matriciais, como veremos no exemplo seguinte.

Exemplo:

10 Resolve o sistema de ecuacións, expresándoo antes en forma matricial:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ x - y + 4z = -5 \\ 2x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$$

Este sistema pódese escribir en forma matricial: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

O sistema converteuse nunha ecuación matricial do tipo $AX = B$, cuxa solución no caso de que a matriz dos coeficientes teña inversa é: $X = A^{-1} \cdot B$.

Onde $A =$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; e B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ás veces preséntanse os sistemas na forma matricial antes indicada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

Como o determinante de A é distinto de cero, ten inversa; calcúlase a inversa de A:

$$\text{Adx}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 10 & 6 \\ -3 & -15 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & 10 & -15 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & 10 & -15 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A solución do sistema será: $x = 2$; $y = 3$; $z = -1$.

Os sistemas de ecuacións lineais matriciais resólvense como os sistemas de ecuacións lineais, tendo en conta as consideracións anteriores. Vexámolo no exemplo.

Exemplo:

11 Calcula as matrices X e Y solución do sistema matricial:
$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

Súmanse as dúas ecuacións: $3X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}; X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Substitúase X na primeira ecuación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Despéxase Y: $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Sistemas de Cramer

Chámanse

sistemas de Cramer aos sistemas lineais que teñen o mesmo número de ecuacións que de incógnitas e, ademais, escritos en forma matricial, a matriz dos coeficientes ten inversa; o seu estudo realizámolo para un sistema de tres ecuacións con tres incógnitas sen perda de xeneralidade.

Dado o sistema:
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Escrito en forma matricial
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Nesta igualdade distínguense as matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$;

A, matriz dos coeficientes; X, matriz das incoógnitas e B, matriz dos termos independentes. Desta forma o sistema escríbese $A X = B$.

Se a matriz A ten inversa, o sistema proposto é de Cramer e resólvese multiplicando a igualdade á esquerda pola inversa de A.

$$A^{-1} (A X) = A^{-1} B$$

A matriz inversa é única, os sistemas de Cramer son **compatibles determinados**

A importancia dos sistemas de Cramer reside na facilidade de atopar a súa solución, como se verá a continuación.

Desenvólvese a solución matricial atopada.

Recorda: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}(A))^t = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Substitúese na solución matricial:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32} \\ b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33} \end{pmatrix}$$

Iguálanse os elementos das matrices.

$$x = \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}}{|A|}; \quad y = \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32}}{|A|}; \quad z = \frac{b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33}}{|A|}$$

Obsérvase que o denominador de todas a incógnitas é o determinante de A (matriz dos coeficientes), e o numerador de cada incógnita é a suma dos produtos dos termos independentes do sistema multiplicados polos adxuntos das columnas primeira, segunda e

terceira,
respectivamente, da matriz A, polo que o valor das incógnitas pode simbolizarse mediante os cocientes dos determinantes seguintes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

O valor de cada incógnita é o cociente de dous determinantes; o determinante numerador é o que corresponde á matriz que resulta de substituír na matriz A a columna dos coeficientes da incógnita despxada polos termos independentes; o denominador é o determinante de A.

Exemplo

10 Comproba que o sistema seguinte é de Cramer e, en caso afirmativo, resólvoo.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

O sistema ten tres ecuacións e tres incógnitas; vexamos o valor do determinante da matriz dos coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 2 - 1 + 3 - 8 = -1; \text{ como é distinto de cero, o sistema proposto é de Cramer.}$$

A solución é:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$