

Unidade 2. Matrices

1. Matrices: definición

Chámase **matriz** de orde $m \times n$ a unha disposición en táboa rectangular de $m \times n$ números reais dispostos en m filas e n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aos números reais a_{ij} chásaselles **elementos da matriz**. O primeiro subíndice i indica a fila e o segundo j a columna na que se atopa o elemento a_{ij} .

Por exemplo, o elemento a_{32} , atópase na terceira fila e segunda columna.

O número de filas e de columnas é a **dimensión da matriz** e désígnase así: $m \times n$.

Se $m = n$ dise que a **matriz é cadrada** de orde n .

As matrices represéntanse así: $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ etc.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & 5 & 0 \\ 1 & -3 & \sqrt{2} & 6 \\ -4 & 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a matriz é unha matriz de dimensión 3×4 (tres filas e catro columnas), na matriz anterior $a_{13} = 5$; $a_{23} = \sqrt{2}$

2. Igualdade de matrices

Dúas matrices A e B son iguais se teñen a mesma dimensión (ou a mesma orde, se son cadradas) e ademais son iguais todos os elementos que ocupan o mesmo lugar.

Por exemplo as matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ \sqrt{9} & 0 \\ -5 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{6}{3} & 2 \\ 3 & c \\ d & 6 \end{pmatrix}$ serán iguais se $a=2$; $b=6$; $c=0$ e $d=-5$

3. Tipos de matrices

Neste apartado describiremos algúns dos tipos de matrices máis usuais.

Matriz rectangular é aquela matriz na que o número de filas é distinto ao de columnas $m \neq n$.

Exemplo de matriz rectangular:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz cadrada é aquela na que o número de filas é igual ao de columnas $m = n$.

Exemplo de matriz cadrada:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Nunha matriz cadrada chámase diagonal principal ao conxunto dos elementos da forma a_{ii} ; na matriz B, a diagonal principal fórmana os elementos -2, 3, -8.

Nunha matriz cadrada chámase diagonal secundaria a conxunto de elementos a_{ij} con $i + j = n + 1$; na matriz B, a diagonal secundaria fórmana os elementos 7, 3, 0, cuxos subíndices suman 4.

Matriz fila é unha matriz que ten unha fila; polo tanto, de dimensión $1 \times n$.

Por exemplo, $A = (-1 \ 4 \ 5 \ 0)$ é unha matriz fila de dimensión 1×4 .

Matriz columna é unha matriz que ten unha columna; polo tanto, de dimensión $m \times 1$.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ é unha matriz columna de dimensión 3×1 .

Matriz oposta dunha matriz A é aquela que ten por elementos os opostos de A; represéntase por

Exemplo: A oposta da matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ é a matriz $-A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

Matriz trasposta dunha matriz A é aquela que resulta ao escribir as filas de A como columnas; represéntase por A^t .

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; a súa trasposta será: $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Da definición dedúcese que se A é de dimensión $m \times n$, a dimensión da súa trasposta será $n \times m$. No exemplo a dimensión de A é 2×3 e a dimensión de A^t é 3×2

Matriz simétrica: unha matriz cadrada é simétrica se a súa trasposta coincide con ela; é dicir, $A^t = A$, ou tamén $a_{ij} = a_{ji}$

Exemplo: As seguintes matrices son simétricas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

obsérvase que son iguais os valores simétricos respecto á liña que chamamos diagonal principal

Matriz antisimétrica: unha matriz cadrada é antisimétrica se a súa trasposta é tamén a súa oposta; é dicir, $A = -A^t$; ou tamén $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemplo: As seguintes matrices son antisimétricas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & -4 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Da definición dedúcese que en toda matriz antisimétrica os elementos da diagonal principal son nulos.

Matriz nula é a que ten todos os seus elementos nulos. Denotarémola por $O = (0)$.

Exemplos: As seguintes matrices son nulas: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz diagonal: é unha matriz cadrada que ten nulos todos os elementos que non pertencen á diagonal principal.

Por exemplo, as seguintes matrices son diagonais:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar: é unha matriz diagonal na que todos os elementos da diagonal son iguais.

Por exemplo, as seguintes matrices son escalares: $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz unidade ou identidade: é unha matriz escalar na que os elementos da diagonal principal son uns; tamén se chama matriz identidade.

Por exemplo, as matrices $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

son matrices identidade de orde dúas e tres respectivamente.

Matriz triangular: é unha matriz cadrada na que todos os elementos situados por debaixo (por enriba) da diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Operacións con matrices

4.1. Suma de matrices

Dadas dúas matrices de dimensión $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, chamamos suma de ambas as dúas á matriz $C = (c_{ij})$ da mesma dimensión, cuxo termo xenérico é $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

A suma de matrices désígnase $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Exemplo

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A + B$.

$$\text{Solución: } A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 1+0 & 2+1 \\ 5+3 & -4+5 & 7+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

A **suma** $(a_{ij} + b_{ij})$ obtense ao sumar os elementos que ocupan o mesmo lugar nunha e outra matriz.

Propiedades da suma:

- **Asociativa.** Calquera que sexan as matrices A , B e C cúmprese a igualdade $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Existencia da matriz nula.** $O = (0)$ tal que: $A + O = A$
- **Existencia da matriz oposta.** Dada a matriz A existe a matriz $-A$, a súa oposta, de modo que: $A + (-A) = O$
- **Conmutativa.** Para todo par de matrices A e B cúmprese: $A + B = B + A$

4.2. Diferenza de matrices

A diferenza de matrices A e B represéntase por $A - B$ e obtense sumando ao minuendo o oposto do subtraendo; é dicir: $A - B = A + (-B)$.

Exemplo

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, calcula $A - B$.

$$\text{Solución: } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-0 & 2-1 \\ 5-3 & -4-5 & 7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

A **diferenza** obtense ao restar elementos que ocupan o mesmo lugar nunha e outra matriz.

4.3. Produto dun número por unha matriz

Calquera que sexan o número real k e a matriz $A = (a_{ij})$ chámase produto de k por A , á matriz $B = (b_{ij})$ da mesma dimensión que A e cuxo termo xenérico é: $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

O **produto dun número por unha matriz** $k(a_{ij})$ obtense ao multiplicar por k cada elemento de $A = (a_{ij})$

Exemplo

3. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ e $k = 5$, calcula $k \cdot A$

Solución: $k \cdot A = 5 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-2) & 5 \cdot 0 & 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 4 & 5(-3) & 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ 20 & -15 & 25 \end{pmatrix}$

Propiedades do produto dun número por unha matriz.

Calquera que sexan as matrices A e B e os números reais λ e μ ,
verifícase:

1. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

2. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

3. $\lambda (\mu A) = (\lambda \mu) A$.

4. $1 \cdot A = A$

4.4. Produto de matrices

Para multiplicar matrices, as matrices factores deben reunir algúns requisitos que descubriremos neste apartado:

a) Produto dunha matriz fila por unha matriz columna.

Sexan A unha matriz cunha fila e n columnas e B unha matriz con n filas e unha columna:

$$A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O produto das matrices A e B é outra matriz $C = A \cdot B$ cunha fila e unha columna; é dicir, un número: $c = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$ polo tanto,

$$A \cdot B = C = (c) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

Hai que facer notar que para poder multiplicar A e B o número de columnas do primeiro factor, A , debe ser igual ao número de filas o segundo factor B .

Exemplo

Sexan $A = (2 \ 1 \ 4)$ unha matriz cunha fila e 3 columnas e $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ unha matriz con 3 filas e unha columna.

Acha a matriz produto.

Solución: $A \cdot B = (2 \ 1 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)) = (6)$ que é unha matriz de orde 1×1 ; polo tanto, un número.

Regra: Observa que para realizar o produto, déixase caer a matriz fila A na matriz columna B ; multiplícanse os elementos enfrontados e súmanse os resultados.

b) Produto de dúas matrices calquera

Sexan A unha matriz de orde $m \times n$, e B unha matriz de orde $n \times p$; as columnas de A coinciden coas filas de B , neste caso designámolas por n .

O **produto de matrices** A e B é outra matriz C de orde $m \times p$ con m filas (as do primeiro factor A) e p columnas (as do segundo factor B).

O elemento c_{ij} da matriz produto C é o resultado de multiplicar a fila i da matriz A pola columna j da matriz B , consideradas ambas as dúas como matrices fila e columna respectivamente.

O elemento c_{ij} calcúlase, polo tanto, así:

$$c_{1j} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

E x e m p l o

5. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Indica a dimensión da matriz produto.

b) Calcula $A \cdot B$.

Solución:

a) A dimensión de A é 2×3 ; A dimensión de B é 3×2 ; como o número de columnas de A , 3, coincide co de filas de B , as matrices pódense multiplicar e, ademais, a dimensión da matriz produto é 2×2 ; isto é, número de filas do primeiro factor e número de columnas do segundo factor.

b) As notacións que se empregaron no desenvolvemento do produto de matrices pódense simplificar, mediante a seguinte regra.

Regra: Os elementos da matriz produto obtéñense ao deixar caer os elementos das filas da matriz primeiro factor sobre as columnas da matriz segundo factor; multiplícanse os elementos que quedaron enfrontados e finalmente súmanse.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

Propiedades do produto de matrices

O produto de matrices ten as propiedades seguintes:

Propiedade asociativa: calquera que sexan as matrices A , B , C nos casos que se poidan multiplicar as tres matrices. É dicir, se A é de dimensión $m \times n$, B de dimensión $n \times p$ e C de dimensión $p \times q$, entón:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

O produto de matrices non é en xeral conmutativo; é dicir,

a) Hai casos nos cales é posible efectuar $A \cdot B$, e non $B \cdot A$.

Por exemplo, se $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entón,

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Non é posible efectuar $B_{3 \times 1} \cdot A_{2 \times 3}$; B ten unha columna e A ten dúas filas; ambos os dous números non coinciden.

b) Nos casos en que é posible efectuar $A \cdot B$ e $B \cdot A$, non sempre dan o mesmo resultado. Ás veces nin sequera son da mesma dimensión.

Por exemplo, $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ entón

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 22 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$$

$$B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & -1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & -1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 14 & 20 \\ -1 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

Propiedade distributiva: dadas as matrices A de dimensión $m \times n$; B e C de dimensión $n \times p$ cúmprese:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Exemplo

6. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Comproba a igualdade: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Solución:

$$\text{primeiro membro: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$$



segundo membro: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -13 \end{pmatrix} =$
 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$

O resultado é o mesmo.

5. Produto de matrices cadradas

O caso de **produto matrices cadradas** merece atención especial, posto que as matrices cadradas de orde n multiplícanse entre si e o resultado é unha matriz de orde n .

Por exemplo, o produto de dúas matrices de orde dúas é outra matriz de orde dúas, como se indica a continuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

En canto ás propiedades é evidente que seguen conservando as propiedades asociativa do produto e distributiva do produto respecto da suma, pero débense destacar outras propiedades.

En canto á propiedade **conmutativa** sempre é posible o dobre produto $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pero en xeral o resultado será diferente, como se indica no exemplo seguinte.

e $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, entón $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; obsérvase que
 $A \cdot B \neq B \cdot A$.

O produto de matrices cadradas posúe **elemento unidade** e é a matriz identidade I_n ; se A é unha matriz cadrada de orden n , tense

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

A matriz unidade de orde dúas será $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.1. Potencias de matrices cadradas

Como vimos, o produto de dúas matrices cadradas é outra da mesma orde; isto fai que unha matriz se poida repetir como factor tantas veces se precise, dando lugar ás **potencias de matrices**, así:

$$A \cdot A = A^2 ; A \cdot A \cdot A = A^3 ; \dots ; A \cdot A \dots \cdot n \text{ veces} \dots \cdot A = A^n$$

Exemplo

7. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^{100} .

$$\text{Solución: } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A regra que dá forma ás potencias é a seguinte, os valores dos elementos a_{21} e a_{31} coinciden co valor do expoñente, logo:

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Matriz inversa

Dada unha matriz cadrada A de orde n , non sempre existe outra matriz B chamada **matriz inversa** de A , tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Cando existe a matriz B , dise que é a matriz inversa de A e represéntase así: A^{-1} ; é dicir, n

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

As matrices cadradas que teñen inversa chámanse **matrices regulares**.

As matrices cadradas que non teñen inversa chámanse **matrices singulares**.

6.1. Cálculo da matriz inversa a partir da definición

Dada a matriz cadrada de orde dúas $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ imos calcular a súa inversa.

Trátase de calcular unha matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ que cumpra: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Efectuamos o produto: } \begin{pmatrix} 4x + 7z & 4y + 7u \\ x + 2z & y + 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{A igualdade dos dous termos dá lugar aos sistemas: } \begin{cases} 4x + 7z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 4y + 7u = 0 \\ y + 2u = 1 \end{cases}$$

As solucións dos sistemas son: $x=2, z=-1; y=-7, u=4$.

$$\text{A matriz inversa será } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.2. Cálculo da matriz inversa polo método de Gauss

O **método de Gauss** para o cálculo da matriz inversa de A , se existe, parte da matriz

$(A \mid I_n)$; e mediante as transformacións que se indican debaixo chégase á matriz

$(I_n \mid B)$; entón a matriz $B = A^{-1}$ é a inversa de A .

As transformacións que se poden aplicar son as seguintes:

- Cambiar a orde das filas.
- Multiplicar unha fila por un número distinto de cero.
- Sumar a unha fila outra multiplicada por un número; todas estas transformacións permiten triangular a matriz.

Exemplos

8. Acha a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Engadimos á matriz A matriz unidade I , así: $(A \mid I)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & | & 1 & 0 \\ 3 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (2 \times 2^aF) \begin{pmatrix} 2 & -4 & | & 1 & 0 \\ 6 & -2 & | & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (2^aF - 3 \times 1^aF) \begin{pmatrix} 2 & -4 & | & 1 & 0 \\ 0 & 10 & | & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1^oF \div 2 \\ 3^aF \div 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & -3/10 & 1/5 \end{pmatrix} \Rightarrow (1^aF + 2 \times 2^aF) \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1/10 & 2/5 \\ 0 & 1 & | & -3/10 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{A matriz inversa é } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/10 & 2/5 \\ -3/10 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como se pode comprobar: } \begin{pmatrix} -1/10 & 2/5 \\ -3/10 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/10 & 2/5 \\ -3/10 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Calcula, aplicando o método de Gauss, a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Engadimos á matriz A a matriz unidade I_3 , así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (2^aF - 1^aF) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(1^a F - 3^a F) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (2^a F + 3^a F) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$(-2^a F + 3^a F) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

A inversa de A é: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Ecuacións matriciais

As operacións con matrices estudadas nesta Unidade permiten formular e resolver ecuacións nas que as variables son matrices; a estas ecuacións chámaseles ecuacións matriciais; neste apartado resolveranse algunhas, aínda que o estudo máis xeral se realizará na Unidade 3.

Para resolver as devanditas ecuacións segúranse os mesmos principios que resolven as ecuacións con coeficientes e variables reais, tendo en conta as consideracións seguintes:

- Algunhas matrices non teñen inversa.
- O produto de matrices non é conmutativo, polo que á hora de multiplicar os dous membros dunha igualdade débese ter en conta que a multiplicación se fai ben pola esquerda ou ben pola dereita en ambos os dous membros da igualdade.

No caso de ecuacións matriciais que se reducen á forma $A \cdot X = B$; ou $X \cdot A = B$ e A ten inversa; a incógnita X calcúlase respectivamente multiplicando á esquerda ou dereita por A^{-1} os dous membros da igualdade.

Na ecuación $A \cdot X = B$, multiplícanse á esquerda os dous membros por :

$$A^{-1} (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B; (A^{-1} A) X = A^{-1} \cdot B; I \cdot X = A^{-1} \cdot B; X = A^{-1} \cdot B$$

Na ecuación $X \cdot A = B$, multiplícanse á dereita os dous membros por :

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}; X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}; X \cdot I = B \cdot A^{-1}; X = B \cdot A^{-1}$$

Exemplo

10. Resolve as seguintes ecuacións matriciais a) $A \cdot X + B = C$; b) $X \cdot A - 2B = C$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calcúlase a inversa de A polo método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (2^a F - 2 \times 1^a F) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (2^a F \div (-2)) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$(1^a F - 4 \times 2^a F) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

a) $A \cdot X + B = C$; $A \cdot X = C - B$; $A^{-1} (A \cdot X) = A^{-1} (C - B)$; $X = A^{-1} (C - B)$.

Substitúense as variables polos seus valores e opérase:

$$X = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 44 & 40 \\ -13 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -22 & -20 \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot A - 2B = C$; $X \cdot A = C + 2B$; $(X \cdot A) A^{-1} = (C + 2B) A^{-1}$; $X = (C + 2B) \cdot A^{-1}$

Substitúense as variables polos seus valores e opérase:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right] \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 38 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -19 & \frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

Ás veces o problema consiste en determinar algúns elementos dunha ou varias matrices que figuran nunha ecuación matricial, como no exemplo seguinte:

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$, determina os valores de x, y, z para que se verifique a igualdade:

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Solución:

Multiplícanse as matrices e igúálense as matrices dos dous membros:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y^2 & x + yz \\ x + yz & x^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + y^2 = 10 \\ x + yz = 0 \\ x + yz = 0 \\ x^2 + z^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 9 \\ x + yz = 0 \\ x^2 + z^2 = 10 \end{cases} ; \text{ da primeira ecuación } y = \pm 3$$

Se $y = 3$ o sistema $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ x^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ ten como solucións: $x = -3, z = 1$ e $x = 3, z = -1$

Se $y = -3$ o sistema $\begin{cases} x - 3z = 0 \\ x^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ ten como solucións: $x = 3, z = 1$ e $x = -3, z = -1$

As ternas (x, y, z) que verifican a ecuación matricial son: $(-3, 3, 1), (3, 3, -1), (3, -3, 1)$ e $(-3, -3, -1)$