

## Actividades

1. Clasifica e, no seu caso, resolve os sistemas:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} ; b) \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ -4x - 6y = 10 \end{cases}$$

2. Transforma os sistemas seguintes en sistemas equivalentes con dúas ecuacións.

$$a) \begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} ; b) \begin{cases} 3x - y = 13 \\ 2x + 4y = 4 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases}$$

3. Indica de que tipo é cada un dos seguintes sistemas.

$$a) \begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ -4x + 8y + 2z = 6 \\ -7x + 8y + 3z = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 4y - 5z = 8 \\ x + y - 2z = 4 \\ 4x - 2y - 9z = 16 \end{cases}$$

4. Estuda e resolve, no seu caso, os seguintes sistemas de ecuacións lineais:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -x + y - 4z = 5 \\ 2x + 3y + 5z = -2 \\ 3x + 2y + 4z = -2 \end{cases}$$

5. Estuda e resolve os seguintes sistemas de ecuacións lineais homoxéneos:

$$a) \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} ; b) \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

6. Considérese o sistema de ecuacións dependente do parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = ax \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

- a) Discútase o sistema segundo os valores de  $a$ .  
b) Resólvase o sistema para  $a = -1$ .

7. Considérese o sistema: 
$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

- a) Discútase segundo os valores do parámetro real  $a$ .  
b) Resólvase para  $a = 5$ .

8. Sexa o seguinte sistema de ecuacións lineais: 
$$\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

- a) Discute o sistema segundo os valores do parámetro  $a$ .
- b) Resolve o sistema para  $a = -2$ .
- c) Resolve o sistema para  $a = 1$ .

9. Considérese o seguinte sistema lineal: 
$$\begin{cases} mx + my = 6 \\ x + (m - 1)y = 3 \end{cases}$$

- a) Discútase o sistema segundo os distintos valores do parámetro real  $m$ .
- b) Resólvase o devandito sistema para  $m = 2$ .

10. Sendo  $a$  un número real calquera, defínase o sistema: 
$$\begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{cases}$$

- a) Discútase o devandito sistema en función do valor de  $a$ .
- b) Áchense todas as súas solucións para  $a = 1$ .

11. Considérese o seguinte sistema lineal de ecuacións, dependente do parámetro  $m$ .

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m + 2)z = 3 \end{cases}$$

- a) Discute o sistema para os distintos valores de  $m$ .
- b) Resolve o sistema para  $m = 3$ .

12. Dado o sistema de ecuacións lineais 
$$\begin{cases} 2x - 4y - az = -2 \\ -y - z = 0 \\ ax + 2z = 2 \end{cases}$$

- a) Discute o sistema en función dos valores de  $a$ .
- b) Resolve o sistema para o valor  $a = 2$ .

13. Atopa tres números A, B e C, tales que a súa suma sexa 210, a metade da suma do primeiro e do último máis a cuarta parte do outro sexa 95 e a media dos dous últimos sexa 80.

14. A suma das tres cifras dun número é 18, sendo a cifra das decenas igual á media das outras dúas. Se se cambia a cifra das unidades pola das centenas, o número aumenta en 198 unidades. Calcula o devandito número.

15. Un individuo realiza fotografías cunha cámara dixital. Sabe que cada fotografía de calidade normal ocupa sempre 0,20 megabytes de memoria. Cada fotografía de calidade óptima ocupa sempre unha cantidade  $A$  de megabytes, pero o individuo non a coñece. Esta semana levou a revelar 24 fotografías que lle ocuparon un total de 9,2 megabytes de memoria.

- a) Formula un sistema de ecuacións (en función de **A**) onde as incógnitas sexan o número de fotos de cada clase que realizou. Estuda a compatibilidade do sistema.
- b) Hai algunha cantidade de megabytes que é imposible que ocupe cada foto de calidade óptima?
- c) A semana pasada tamén fixo 24 fotos e ocupou 9,2 megabytes de memoria en total. É posible que o número de fotos de cada tipo fose diferente ao desta semana?

**16.** As idades de tres veciños suman 54 anos e son proporcionais a 2, 3 e 4. Acha a idade de cada un deles.

**17.** Xoán, Pedro e Luís corren á vez nun circuíto. Por cada quilómetro que percorre Xoán, Pedro percorre 2 quilómetros e Luís percorre tres cuartas partes do que percorre Pedro. Ao finalizar, a suma das distancias percorridas polos tres, foi de 45 quilómetros. Cantos quilómetros percorreu cada un?

**18.** Xoana e Mercedes tiñan 20000 € cada unha para investir. Cada unha delas distribúe o seu diñeiro da mesma forma en tres partes P, Q e R e ingresasnas nunha entidade financeira. Ao cabo dun ano, a Xoana déronlle un 4% de interese pola parte P, un 5% pola parte Q e un 4% pola parte R e a Mercedes déronlle un 5% pola parte P, un 6% pola parte Q e un 4% pola parte R. Xoana recibiu en total 850 € de intereses, mentres que Mercedes recibiu 950 €. De que cantidade de euros constaba cada unha das partes P, Q e R?

**19.** Tres irmáns teñen idades diferentes, pero sabemos que a suma das idades dos 3 irmáns é de 37 anos, e a suma da idade do maior máis o dobre da idade do mediano máis o triplo da idade do menor é de 69 anos.

- a) Expresa as idades dos tres irmáns en función da idade do irmán menor.
- b) É posible que o irmán menor teña 5 anos? E 12 anos? Razona a resposta.
- c) Calcula as idades dos tres irmáns.

# Soluciones

1. Clasifica e, no seu caso, resolve os sistemas:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} ; b) \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ -4x - 6y = 10 \end{cases}$$

**Solución:**

a) Substitúese a segunda ecuación, pola que resulta de sumar a esta multiplicada por -2, a primeira multiplicada por 3.

$$\begin{cases} 6x - 9y = 21 \\ -6x - 4y = -8 \\ 0x - 13y = 13 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -13y = 13 \end{cases} ; \begin{cases} y = -1 \\ 2x + 3 = 7; x = 2 \end{cases}$$

Polo tanto a solución é:  $(x,y) = (2, -1)$

b) Substitúese a segunda ecuación, pola que resulta de sumar a esta, a primeira multiplicada por 2.

$$\begin{cases} 4x + 6y = -4 \\ -4x - 6y = 10 \\ 0x + 0y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ -4x - 6y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 0y = 6 \end{cases} ; \begin{cases} \text{A segunda ecuación non ten solución,} \\ \text{logo o sistema é incompatible} \end{cases}$$

2. Transforma os sistemas seguintes en sistemas equivalentes con dúas ecuacións.

$$a) \begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ 2x + y = 3 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} ; b) \begin{cases} 3x - y = 13 \\ 2x + 4y = 4 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases}$$

**Solución:**

a) A terceira ecuación é a primeira por menos un, mais a segunda; polo que o sistema dado é equivalente a  $\begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

b) A terceira ecuación é suma da primeira mais a segunda; polo que o sistema dado é equivalente a  $\begin{cases} 3x - y = 13 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$

3. Indica de que tipo é cada un dos seguintes sistemas.

$$a) \begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ -4x + 8y + 2z = 6 \\ -7x + 8y + 3z = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 4y - 5z = 8 \\ x + y - 2z = 4 \\ 4x - 2y - 9z = 16 \end{cases}$$

**Solución:**

a) Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 8 & 2 & 6 \\ -7 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a F \times 4 + 2^a F \text{ e } 1^a F \times 7 + 3^a F} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 14 & 26 \\ 0 & 1 & 24 & 39 \end{pmatrix} \text{ Cambiar entre si } 2^a \text{ e } 3^a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 24 & 39 \\ 0 & 4 & 14 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a F \times (-4) + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 24 & 39 \\ 0 & 0 & -82 & -130 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Esta é a matriz}$$

asociada ao sistema  $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ y + 24z = 39 \\ -82z = 130 \end{cases}$  a terceira ecuación ten solución única, polo que o sistema é **compatible determinado**.

b) Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -9 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Cambiar entre si } 1^a \text{ e } 2^a F} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & -9 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1^a F \times (-2) + 2^a F \\ 1^a F \times (-4) + 3^a F \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Esta é a matriz asociada ao sistema } \begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -6y - z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \text{ A terceira}$$

ecuación ten infinitas solucións polo que o sistema é **compatible indeterminado**.

4. Estuda e resolve, no seu caso, os seguintes sistemas de ecuacións lineais:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -x + y - 4z = 5 \\ 2x + 3y + 5z = -2 \\ 3x + 2y + 4z = -2 \end{cases}$$

**Solución:**

a) Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a F + 2^a F} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a F + 3^a F \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Esta é a matriz asociada ao sistema } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

A terceira ecuación ten infinitas solucións polo que o sistema é compatible indeterminado. Asignaselle a  $z$  un parámetro:  $z=k$ ;  $y=1-k$ ;  $x=-2+k$ .

A solución é :  **$(x,y,z) = (-2+k, 1-k, k)$**

**b)** Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1^a F + 2^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} 1^a Fx(-2) + 2^a F \\ 1^a Fx(-3) + 3^a F \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & -10 & 1 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a Fx(-2) + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ Esta é a matriz asociada ao}$$

$$\text{sistema } \begin{cases} x + 4y + z = 3 \\ -5y + 3z = -8 \\ -5z = 5 \end{cases} \text{ A terceira ecuación ten solución única polo que o sistema é}$$

**compatible determinado.** Da 3ª ecuación sae:  $z=-1$ , e logo  $y=1$  e  $x=0$ .

A solución é:  **$(x,y,z) = (0,1, -1)$**

**5.** Estuda e resolve os seguintes sistemas de ecuacións lineais homoxéneos:

$$a) \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} ; b) \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

**Solución:**

Os sistemas lineais homoxéneos teñen sempre solución, é dicir, son compatibles.

**a)** Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} 3^a F \text{ pasa a } 1^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1^a Fx(-2) + 2^a F \\ 1^a Fx(-2) + 3^a F \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a Fx(-3) + 3^a Fx7 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 0 \end{pmatrix} . \text{ Esta é a matriz asociada}$$

$$\text{ao sistema: } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y + z = 0 \\ -17z = 0 \end{cases} \text{ A terceira ecuación ten solución única polo que o sistema}$$

**é compatible determinado.**

A solución é a trivial  **$(x,y,z) = (0,0,0)$**

**b)** Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1^a F \times (-3) + 2^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Esta é a matriz asociada ao}$$

sistema  $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 4y - 14z = 0 \end{cases}$ ; a segunda ecuación, ten dúas incógnitas, polo tanto ten infinitas solucións, polo que o sistema é **compatible indeterminado**.

As solucións  $z = k$ ,  $4y - 14k = 0 \Rightarrow y = 7k/2$ ;  $x - 7k/2 - 3k = 0 \Rightarrow x = 13k/2$ .

A solución pode expresarse así:  **$(x, y, z) = (13k/2, 7k/2, k)$**

**6.** Considérese o sistema de ecuacións dependente do parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = ax \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

**a)** Discútase o sistema segundo os valores de  $a$ .

**b)** Resólvase o sistema para  $a = -1$ .

**Solución:**

Escríbese a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \text{ pasar a } 1^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1^a F - 2^a F \text{ e } 1^a F \times a - 3^a F \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a^2-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a F + 3^a F \\ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a^3+a^2-a-1 \end{pmatrix}. \text{ Esta é a matriz asociada ao sistema}$$

$$\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ (1-a)y + (a-1)z = a^2 - a \\ (a^2+a-2)z = a^3 - a - 1 \end{cases}$$

a) Se na terceira ecuación o coeficiente de  $z$  fose 0, isto é  $a^2+a-2=0$ . A solucións de esta ecuación son:  $a = 1$  e  $a = -2$ .

Para  $a=1$ , a terceira ecuación queda  $0z=0$ ; polo que o sistema sería compatible indeterminado.

Para  $a=-2$ , a terceira ecuación queda  $0z=-3$ ; polo que o sistema sería incompatible.

Para o resto dos posible valores de  $a$ , e dicir,  $a \neq 1$  a  $a \neq -2$  o sistema é compatible determinado.

b) Para  $a=-1$ , queda o sistema graduado  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - 2z = 2 \\ -2z = 0 \end{cases}$ . De onde  $z=0$ ,  $y=1$ ,  $x=0$ .

Solución:  $(x,y,z) = (0,1,0)$

7. Considérese o sistema:  $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$

a) Discútase segundo os valores do parámetro real  $a$ .

b) Resólvase para  $a=5$ .

**Solución:**

Esríbese a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & a-4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^aF+2^aF \text{ e } 3^aF-1^aF} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{2^aF+3^aF} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 0 & a-2 & 18 \end{pmatrix}. \text{ Esta é a matriz asociada ao sistema}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -2y + (a-3)z = 13 \\ (a-2)z = 18 \end{cases}$$

a) Se na terceira ecuación o coeficiente de  $z$  fose 0, isto é  $a-2=0$ . A solución de esta ecuación é:  $a=-2$ .

Para o resto dos posible valores de  $a$ , e dicir,  $a \neq -2$  o sistema é compatible determinado.

b) Para  $a=5$ , queda o sistema graduado  $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2y + 2z = 13 \\ 3z = 18 \end{cases}$ . De onde  $z=6$ ,  $y=-1/2$ ,

$x=-1/2$ .

A solución é:  $(x,y,z) = (-1/2, -1/2, 6)$

8. Sexa o seguinte sistema de ecuacións lineais:  $\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$

a) Discute o sistema segundo os valores do parámetro  $a$ .

b) Resolve o sistema para  $a=-2$ .

c) Resolve o sistema para  $a=1$ .



### Solución:

Escríbese a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ pasar a } 1^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & a & -2 & 1 \\ a & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow 1^a Fx + 2^a F \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & a^2 + 1 & -2a + 4 & a + 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ pasar a } 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & a^2 + 1 & -2a + 4 & a + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2^a Fx(-1) + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & a^2 & -2a + 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a Fx(-a^2) + 3^a F \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a^2 - 2a + 3 & 1 - a^3 \end{pmatrix}. \text{ Esta é a matriz asociada ao sistema:}$$

$$\begin{cases} -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \\ (-a^2 - 2a + 3)z = 1 - a^3 \end{cases}.$$

**a)** Se na terceira ecuación o coeficiente fose 0, isto é  $a^2 + 2a - 3 = 0$ . As solucións de esta ecuación son  $a=1$  e  $a=-3$ .

Para  $a = 1$ , a terceira ecuación queda  $0 \cdot z = 0$  polo que o sistema é compatible determinado.

Para  $a = -3$ , a terceira ecuación queda  $0 \cdot z = 28$  polo que o sistema é incompatible.

Para  $a \neq 1$  e  $a \neq -3$ , o sistema é compatible determinado.

**b)** Para  $a = -2$  o sistema graduado é: 
$$\begin{cases} -x - 2y - 2z = 1 \\ y + z = a \\ 3z = 9 \end{cases} \text{ de onde } z = 3, y = -5 \text{ e}$$

$x = 3$ . A solución é  $(x, y, z) = (3, -5, 3)$

**c)** Para  $a = 1$  o sistema graduado é: 
$$\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ y + z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Faise  $z = k$ ,  $y = 1 - k$  e  $x = 3k$ . A solución é  $(x, y, z) = (3k, 1 - k, k)$

**9.** Considérese o seguinte sistema lineal: 
$$\begin{cases} mx + my = 6 \\ x + (m - 1)y = 3 \end{cases}$$

**a)** Discútase o sistema segundo os distintos valores do parámetro real  $m$ .

**b)** Resólvase o devandito sistema para  $m = 2$ .

### Solución:

Esríbese a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar:

$$\begin{pmatrix} m & m & 6 \\ 1 & m-1 & 3 \end{pmatrix} 2^a Fx(-m) + 1^o F \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2m-m^2 & 6-3m \\ 1 & m-1 & 3 \end{pmatrix} \text{ Esta é a matriz asociada}$$

$$\text{ao sistema } \begin{cases} (2m-m^2)y = 6-3m \\ x + (m-1)y = 3 \end{cases}$$

a) Se na ecuación o coeficiente de y fose 0, isto é,  $2m-m^2=0$ . As solucións son:  
 $m=0$  e  $m=2$ .

Para  $m=0$  a primeira ecuación queda  $0y=6$ , o sistema é incompatible.

b) Para  $m=2$ , a primeira ecuación queda  $0y=0$ , o sistema é compatible indeterminado.

Para  $m \neq 0$  e  $m \neq 2$  o sistema é compatible determinado.

$$\text{Para } m=2, \text{ o sistema graduado é: } \begin{cases} 0y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Faise  $y=k$ ,  $x=3-k$

A solución é :  **$(x,y) = (3-k, k)$**

$$10. \text{ Sendo } a \text{ un número real calquera, defínase o sistema: } \begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ ax + z = a \end{cases}$$

a) Discútase o devandito sistema en función do valor de  $a$ .

b) Áchense todas as súas solucións para  $a=1$ .

### Solución:

Esríbese a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix} 1^a F x(-a) + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2a & a^2+1 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Esta é a matriz asociada ao sistema } \begin{cases} x + 2y - az = 1 \\ -y + z = 0 \\ (a^2 - 2a + 1)z = 0 \end{cases}$$

a) Se na terceira ecuación o coeficiente de  $z$  fose 0 isto é  $a^2-2a+1=0$ . A solución desta ecuación é  **$a=1$**

$$\text{Para } a=1, \text{ queda o sistema graduado } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \text{ Faise } z=k; x+2k-k=1, x=1-k$$

A solución é :  **$(x,y,z) = (1-k, k, k)$**

11. Considérese o seguinte sistema lineal de ecuacións, dependente do parámetro  $m$ .

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m+2)z = 3 \end{cases}$$

a) Discute o sistema para os distintos valores de  $m$ .

b) Resolve o sistema para  $m=3$ .

**Solución:**

Escríbese a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{pmatrix} \text{ pasar a } 1^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & m+2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1^a F \times (-2) + 2^a F \\ 1^a F + 3^a F \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & m+4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a F + 3^a F \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz asociada ao sistema  $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -y - 5z = -8 \\ (m-1)z = 0 \end{cases}$

a) Se na terceira ecuación o coeficiente de  $z$  fose 0, isto é  $m-1=0$ . A solución de esta ecuación é  $m=1$ .

Para  $m=1$ , a terceira ecuación queda  $0z=0$ , polo que o sistema sería compatible indeterminado.

Para  $m \neq 1$ , o sistema é compatible determinado.

b) Para  $m=3$  o sistema graduado  $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -y - 5z = -8 \\ 2z = 0 \end{cases}$  De onde  $z=0$ ;  $y=8$ ;  $x=-3$

A solución é  $(x,y,z) = (-3, 8, 0)$

12. Dado o sistema de ecuacións lineais  $\begin{cases} 2x - 4y - az = -2 \\ -y - z = 0 \\ ax + 2z = 2 \end{cases}$

a) Discute o sistema en función dos valores de  $a$ .

b) Resolve o sistema para o valor  $a=2$ .

**Solución:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -a & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1^a F / 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -a/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1^a F \times (-a) + 3^a F \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -a/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a & \frac{a^2}{2} + 2a + 2 & a + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a Fx(-2a) + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -a/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2} + 2a + 2 & a + 2 \end{pmatrix}.$$

Esta é a matriz asociada ao sistema :

$$\begin{cases} x - 2y - \frac{a}{2}z = -1 \\ y - z = 0 \\ \left(\frac{a^2}{2} + 2a + 2\right)z = a + 2 \end{cases}$$

a) Se na terceira ecuación o coeficiente de  $z$  fose 0, isto é  $\frac{a^2}{2} + 2a + 2 = 0$ ,  $(a+2)^2$  é  
decir  $a = -2$ .

Para  $a = -2$  a terceira ecuación queda  $0z = 0$ ; sistema **compatible indeterminado**.

Para  $a \neq -2$ , o sistema é **compatible determinado**.

b) Para  $a = 2$  queda o sistema graduado

$$\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ y - z = 0 \\ 8z = 4 \end{cases}.$$

De onde  $z = 1/2$ ,  $y = 1/2$  e  $x = 1/2$

**13.** Atopa tres números A, B e C, tales que a súa suma sexa 210, a metade da suma do primeiro e do último máis a cuarta parte do outro sexa 95 e a media dos dous últimos sexa 80.

**Solución:**

Sexan A, B y C os tres números

$$\begin{cases} A + B + C = 210 \\ \frac{A+C}{2} + \frac{B}{4} = 95 \\ \frac{B+C}{2} = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 210 \\ 2A + B + 2C = 380 \\ B + C = 160 \end{cases}.$$

Escribese

a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 1 & 2 & 380 \\ 0 & 1 & 1 & 160 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a Fx(-2) + 2^a F} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & 1 & 160 \end{pmatrix}.$$

Esta é a matriz asociada ao

sistema :

$$\begin{cases} A + B + C = 210 \\ -B = -40 \\ B + C = 160 \end{cases}.$$

Da segunda ecuación **B = 40**, da terceira **C = 120** e da primeira **A = 50**.

**14.** A suma das tres cifras dun número é 18, sendo a cifra das decenas igual á media das outras dúas. Se se cambia a cifra das unidades pola das centenas, o número aumenta en 198 unidades. Calcula o devandito número.

### Solución:

Sexa o número  $100x + 10y + z$ ; é decir,  $z$  unidades,  $y$  decenas e  $x$  centenas.

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ y = \frac{x+z}{2} \\ 100z + 10y + x - 10y - z = 198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -99x + 99z = 196 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + z = 2 \end{cases}$$

asociada ao sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1^a F + 2^a F \\ 1^a F + 3^a F \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 3 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{pmatrix}$$
 desta matriz pásase ao sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ 0x + 3y + 0z = 18 \\ 0x + y + 2z = 20 \end{cases}$$

Da segunda ecuación **y=6**. Sustituindo na terceira,  $6 + 2z = 20$ ;  $2z = 14$ ; **z=7**. Sustituindo na primeira  $x + 6 + 7 = 18$ ;  $\Rightarrow$  **x=5**. O número é **567**

**15.** Un individuo realiza fotografías cunha cámara dixital. Sabe que cada fotografía de calidade normal ocupa sempre 0,20 megabytes de memoria. Cada fotografía de calidade óptima ocupa sempre unha cantidade **A** de megabytes, pero o individuo non a coñece. Esta semana levou a revelar 24 fotografías que lle ocuparon un total de 9,2 megabytes de memoria.

- Formula un sistema de ecuacións (en función de **A**) onde as incógnitas sexan o número de fotos de cada clase que realizou. Estuda a compatibilidade do sistema.
- Hai algunha cantidade de megabytes que é imposible que ocupe cada foto de calidade óptima?
- A semana pasada tamén fixo 24 fotos e ocupou 9,2 megabytes de memoria en total. É posible que o número de fotos de cada tipo fose diferente ao desta semana?

### Solución:

Sexa **x** as fotos que realiza en calidade normal e **y** as que realiza en calidade optima:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 0,20x + Ay = 9,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 24 \\ 2x + 10Ay = 92 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 24 \\ 2 & 10A & 92 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a F \text{ por } (-2) + 2^a F}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 24 \\ 0 & 10A - 2 & 44 \end{pmatrix}$$
 Esta é a matriz asociada ao sistema:  $\begin{cases} x + y = 24 \\ (10A - 2)y = 44 \end{cases}$

**a)** Se  $10A - 2 = 0 \Rightarrow A = 0,20$ ; o sistema é incompatible; se  $A \neq 0,20$  o sistema é compatible determinado.

**b)** Sí, para  $A = 0,20$

c) Se ocupou con 24 fotos 9,2 megas, como o enunciado di que A é fixo e o sistema é compatible determinado; xa que logo, fixo o mesmo número de fotos dos dous tipos as dúas semanas.

16. As idades de tres veciños suman 54 anos e son proporcionais a 2, 3 e 4. Acha a idade de cada un deles.

**Solución:**

Sexan  $x, y, z$  as idades dos tres veciños.

$$\begin{cases} x + y + z = 54 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \end{cases} ; \text{ Despéxanse } y \text{ e } z \text{ na segunda e terceira ecuación:}$$

$y = 3x/2$  ;  $z = 4x/2 = 2x$ ; Substitúense estes valores na primeira ecuación:

$$x + 3x/2 + 2x = 54 ; 2x + 3x + 4x = 108; x = 108/9 = 12 \Rightarrow y = 3 \cdot 12/2 = 36/2 = 18;$$

$$z = 2 \cdot 12 = 24.$$

As idades dos veciños serán **12, 18 y 24 anos.**

17. Xoán, Pedro e Luís corren á vez nun circuío. Por cada quilómetro que percorre Xoán, Pedro percorre 2 quilómetros e Luís percorre tres cuartas partes do que percorre Pedro. Ao finalizar, a suma das distancias percorridas polos tres, foi de 45 quilómetros. Cantos quilómetros percorreu cada un?

**Solución:**

Con frecuencia un problema que se resolve mediante o expoño dun sistema é mais sinxelo resolvelo mediante o expoño dunha ecuación; é un destes casos.

Sexa  $x$  os kilometros que percorre Xoan; Pedro percorrera  $2x$  e Luis percorrera

$$2x \cdot 3/4 = 3x/2.$$

$$x + 2x + 3x/2 = 45 ; 2x + 4x + 3x = 90; 9x = 90 \Rightarrow x = 90/9 = \mathbf{10 \text{ Kms.}}$$

Xoán, **20 Kms.** percorrera Pedro e **15 Kms.** Luis.

18. Xoana e Mercedes tiñan 20000 € cada unha para investir. Cada unha delas distribúe o seu diñeiro da mesma forma en tres partes P, Q e R e ingrésanas nunha entidade financeira. Ao cabo dun ano, a Xoana déronlle un 4% de interese pola parte P, un 5% pola parte Q e un 4% pola parte R e a Mercedes déronlle un 5% pola parte P, un 6% pola parte Q e un 4% pola parte R. Xoana recibiu en total 850 € de intereses, mentres que Mercedes recibiu 950 €. De que cantidade de euros constaba cada unha das partes P, Q e R?

### Solución:

Sexan  $x, y, z$  as partes que realizan Xoana e Mercedes:

$$\begin{cases} x + y + z = 20000 \\ 0,04x + 0,05y + 0,04z = 850 \\ 0,05x + 0,06y + 0,04z = 950 \end{cases} \quad 100x2^aF \text{ e } 100x3^aF \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20000 \\ 4x + 5y + 4z = 85000 \\ 5x + 6y + 4z = 95000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2^a F - 4x1^aF \text{ e } 3^aF - 5x1^aF \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20000 \\ 0x + y + 0z = 5000 \\ 0x + y - z = -5000 \end{cases}$$

Na segunda ecuación  $y = 5000$  euros; Substitúese na terceira ecuación,  $5000 - z = -5000$ ;  $z = 10000$  euros.

Substituír na primeira ecuación  $x = 20000 - 10000 - 5000 = > x = 5000$  euros

**P = 5000 euros; Q = 5000 euros e R = 10.000 euros**

**19.** Tres irmáns teñen idades diferentes, pero sabemos que a suma das idades dos 3 irmáns é de 37 anos, e a suma da idade do maior máis o dobre da idade do mediano máis o triplo da idade do menor é de 69 anos.

- Expresa as idades dos tres irmáns en función da idade do irmán menor.
- É posible que o irmán menor teña 5 anos? E 12 anos? Razona a resposta.
- Calcula as idades dos tres irmáns.

### Solución:

Sexan  $x, y$  e  $z$  as idades respectivas do maior, mediano e menor dos tres irmáns:

$$\begin{cases} x + y + z = 37 \\ x + 2y + 3z = 69 \end{cases} \quad 2^a F - 1^a F \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 37 \\ 0x + y + 2z = 32 \end{cases}$$

**a)** Da segunda ecuación:  $y = 32 - 2z$ . Substituíese na primeira ecuación:  $x + 32 - 2z + z = 37$ ;  $x = 5 + z$

**b) 1.** Se  $z=5 \Rightarrow \begin{cases} y = 32 - 2 \cdot 5 = 22 \\ x = 5 + 5 = 10 \end{cases}$  non é posible, non é posible xa que entón o mediano tendría máis idade que o maior

**2.** Se  $z=12 \Rightarrow \begin{cases} y = 32 - 24 = 8 \\ x = 5 + 12 = 17 \end{cases}$  non é posible, non é posible xa que entón o mediano tendría menos idade que o menor.

**c)** Das dúas contradicións anteriores obsérvase que a idade do menor debe cumprir

$5 < z < 12$  e ser enteiros, as idades expresanse en anos. Para atopar a solución ou solucións imos pechando o intervalo no que se pode mover  $z$ .

Se  $z = 6 \Rightarrow \begin{cases} y = 32 - 22 = 10 \\ x = 5 + 11 = 16 \end{cases}$  non é posible, por **b)1**.

Se  $z = 11 \Rightarrow \begin{cases} y = 32 - 12 = 20 \\ x = 5 + 6 = 17 \end{cases}$  non é posible, por **b)2**.

Se  $z = 10 \Rightarrow \begin{cases} y = 32 - 18 = 20 \\ x = 5 + 6 = 17 \end{cases}$  esta solución da: **menor 10, mediano 12 e maior 15** é posible.

Se  $z = 9 \Rightarrow \begin{cases} y = 32 - 2 \cdot 5 = 14 \\ x = 5 + 9 = 14 \end{cases}$  esta solución admite o seguinte razoamento, é viable sempre que o mediano e o maior nacesen o mesmo ano, por exemplo o maior en xaneiro e o menor en novembro; sempre que a pregunta realícese en días posteriores ao aniversario do mediano.

- 20.** Unha fábrica de xeados elabora tres tipos de xeados, H1, H2 e H3, a partir de tres ingredientes A, B e C. Deséxase saber o prezo unitario de cada ingrediente sabendo que o xeadado H1 se elabora con 2 unidades de A, 1 unidade de B e 1 unidade de C e supón un custo de 0.9 euros. O xeadado H2 elabórase con 1 unidade de A, 2 unidades de B e 1 unidade de C e supón un custo de 0.8 euros. O xeadado H3 componse de 1 unidade de A, 1 unidade de B e 2 unidades de C e supón un custo de 0.7 euros.

### Solución:

Sexan  $x, y, z$  os prezos unitarios respectivos dos ingredientes A, B e C.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0,9 \\ x + 2y + z = 0,8; \text{ reordenase o sistema; a primeira ecuación pasa a terceira.} \\ x + y + 2z = 0,7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0,8 \\ x + y + 2z = 0,7; \\ 2x + y + z = 0,9 \end{cases}$$

a matriz asociada ao sistema:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0,8 \\ 1 & 1 & 2 & 0,7 \\ 2 & 1 & 1 & 0,9 \end{pmatrix}$   $2^a F - 1^a F$  e  $3^a F - 2 \cdot 1^a F \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0,8 \\ 0 & -1 & 1 & -0,1 \\ 0 & -3 & -1 & -0,7 \end{pmatrix} \Rightarrow 3^a F - 3 \cdot 2^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0,8 \\ 0 & -1 & 1 & -0,1 \\ 0 & 0 & -4 & -0,4 \end{pmatrix}$$
 desta matriz pásase ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0,8 \\ 0x - y + z = -0,1 \\ 0x + 0y - 4z = -0,4 \end{cases}$$

Da terceira ecuación:  $z = -0,4/-4 = 4/40 \Rightarrow \mathbf{z = 0,1 \text{ euros}}$

Na segunda ecuación:  $-y + 0,1 = -0,1 \Rightarrow \mathbf{y = 0,2 \text{ euros}}$

Na terceira ecuación:  $x + 0,4 + 0,1 = 0,8 ; \mathbf{x = 0,3 \text{ euros}}$