

Taxa de variación

É unha medida da variación media da función nun intervalo e calcúlase como a razón entre a variación da y e a variación da x nese intervalo: $TV_{[x_1, x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Derivada nun punto

É unha medida da variación “instantánea” da función nun punto e calcúlase coas expresións:

$$Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Cando a función está definida a cachos estudamos a derivabilidade mediante os límites laterais.

Interpretación gráfica da derivada

- A derivada dunha función nun punto coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica da función nese punto.
- A ecuación da **recta tanxente** a unha función $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$ vén dada por:
 $y - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$

Crecemento, extremos relativos e derivadas

- Se a derivada é positiva nun punto, a función é crecente nese punto.
- Se a derivada é negativa nun punto, a función é decrecente nese punto.
- Se a derivada é 0 nun punto, a función pode ter nese punto un máximo relativo, un mínimo relativo ou un punto de inflexión con tanxente horizontal.

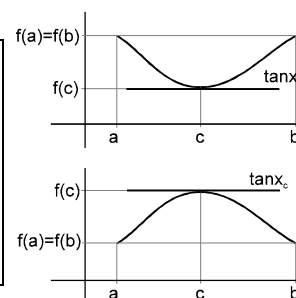
Continuidade e derivabilidade

Se unha función definida nun intervalo aberto (a, b) , é derivable nun punto do interior dese intervalo, entón é continua nese punto.

Teorema de Rolle

Unha función $f(x)$ continua nun intervalo pechado $[a, b]$, derivable no intervalo aberto (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$, entón hai un punto $c \in (a, b)$ no que a derivada vale 0: $Df(c) = 0$.

Nese punto, a tanxente á gráfica da función é horizontal e, necesariamente, a función ten un extremo relativo.

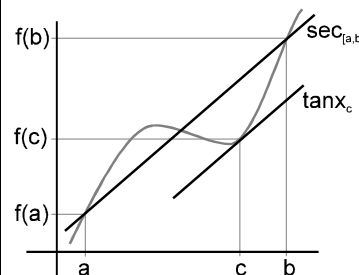


Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial

Unha función $f(x)$ continua no intervalo pechado $[a,b]$, derivable no intervalo aberto (a,b) , entón hai un punto $c \in (a,b)$ tal que:

$$Df(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Nese punto, a tanxente á gráfica da función é paralela á recta secante que une os extremos da gráfica nese intervalo.



Función derivada

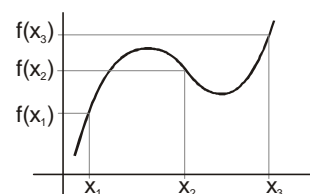
Se unha función $f(x)$ é derivable nun intervalo (a,b) , defínese a súa **función derivada**, $f'(x)$, como a función que a cada punto $x \in (a,b)$ faille corresponder a derivada de $f(x)$ nese punto:

$$f'(x) = Df(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Derivada segunda

A derivada segunda nun punto describe a curvatura da gráfica da función no punto:

- $D^2f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ é cóncava en x_0
- $D^2f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ é convexa en x_0
- $D^2f(x_0) = 0 \Rightarrow$ en x_0 hai un *posible* punto de inflexión (tamén pode haber un extremo relativo).



$D^2f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x)$ é cóncava en x_1

$D^2f(x_2) = 0 \Rightarrow$ en x_2 hai un punto de inflexión

$D^2f(x_3) > 0 \Rightarrow f(x)$ convexa en x_3

Cálculo de funcións derivadas

Podemos atopar a función derivada dunha función dada a partir das derivadas das funcións elementais e utilizando as regras de derivación:

REGRAS DE DERIVACIÓN		
función	derivada	regra
$a \cdot u$	$a \cdot u'$	A derivada dunha constante por unha función é a constante pola derivada da función
$u+v$	$u'+v'$	A derivada dunha suma é a suma das derivadas
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	A derivada dun produto é a derivada do primeiro factor polo segundo sen derivar máis o primeiro sen derivar pola derivada do segundo
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	A derivada dun cociente é a derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador dividido todo polo denominador ó cadrado
$f(u)$	$f'(u) \cdot u'$	Regra da cadea

DERIVADAS ELEMENTAIS			
función	derivada	función	derivada
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	u^r	$R \cdot u^{r-1} \cdot u'$
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\text{sen}(u)$	$[\cos(u)] \cdot u'$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$	$\cos(u)$	$[-\text{sen}(u)] \cdot u'$
$\text{tg}(x)$	$1+\text{tg}^2(x)$	$\text{tg}(u)$	$[1+\text{tg}^2(u)] \cdot u'$
$\text{Ln}(x)$	$\frac{1}{x}$	$\text{Ln}(u)$	$\left(\frac{1}{u}\right) \cdot u' = \frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$e^u \cdot u'$