

# Unidade 9: Cálculo Diferencial

## Programa:

- 1 Derivada dunha función nun punto.
  - 1.1 Taxa de variación. Definición de derivada nun punto. Derivadas laterais.
  - 1.2 Interpretación gráfica da derivada.
  - 1.3 Crecemento e derivadas.
  - 1.4 Derivadas e extremos relativos.
  - 1.5 Continuidade e derivabilidade.
  - 1.6 Teorema de Rolle:
- 2 Teorema de Rolle: Enunciado, demostración e interpretación xeométrica.
- 3 Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial: Enunciado, demostración e interpretación xeométrica.
- 4 Función derivada.
  - 4.1 Definición de función derivada.
  - 4.2 Derivadas sucesivas.
  - 4.3 Fórmulas das funcións derivadas usuais.

# Derivada dunha función nun punto

## Taxa de variación

Definimos a taxa de variación dunha función  $f(x)$  no intervalo  $[x_1, x_2]$  como o cociente entre o incremento do valor da función e o incremento de  $x$  (tamén é chamado cociente incremental):

$$TV_{[x_1, x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

A taxa de variación é unha medida da variación media da función no intervalo.

## Derivada nun punto

A derivada dunha función  $f(x)$  no punto  $x_0$  é o límite:

$$Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Facendo o cambio  $h = x - x_0$  obtemos unha nova expresión para a

derivada: 
$$Df(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A derivada é o límite das taxas de variación cando facemos que o intervalo “se reduza a un punto”. É unha medida da variación “instantánea” da función no punto.

Cando a función está definida a cachos estudamos a derivabilidade mediante límites laterais:

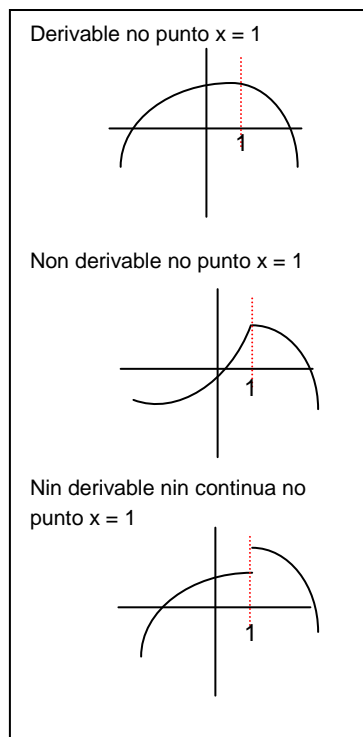
$$D^-f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$D^+f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se os límites coinciden, a función é derivable en  $x_0$ .

As funcións elementais, definidas por unha soa fórmula, son derivables en tódolos puntos do seu dominio.

Que unha función sexa derivable implica que non experimenta cambios bruscos de tendencia, a súa gráfica non presenta “ángulos”.



### Exemplo:

O espazo percorrido por un móbil, en metros, ven dado pola función  $s = 5t^2$  ( $t$  en segundos). Cal é a súa velocidade en  $t=1$ ?

### Solución:

Hai dous tipos de velocidades:

- **Velocidade media:** É o espazo percorrido dividido entre o tempo.
- **Velocidade instantánea:** Velocidade que leva un móbil nun intre dado.

A velocidade media, por exemplo, entre  $t=1$  e  $t=4$  é:

$$VM_{[1,4]} = \frac{5 \cdot 4^2 - 5 \cdot 1^2}{4 - 1} = 25 \frac{m}{s}$$

Observa que a velocidade media coincide coa taxa de variación.

A velocidade instantánea non pode calcularse directamente, pero pode aproximarse mediante velocidades medias. En  $t=1$ :

$$\begin{aligned} VM_{[1,2]} &= \frac{5 \cdot 2^2 - 5 \cdot 1^2}{2 - 1} = 15 \frac{m}{s} \\ VM_{[1,1.5]} &= \frac{5 \cdot 1.5^2 - 5 \cdot 1^2}{1.5 - 1} = 12.5 \frac{m}{s} \\ VM_{[1,1.1]} &= \frac{5 \cdot 1.1^2 - 5 \cdot 1^2}{1.1 - 1} = 10.5 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

A velocidade instantánea será o límite desas velocidades medias:

$$v(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5 \cdot 1^2}{x - 1} = 10 \frac{m}{s}$$

Observa que a velocidade instantánea é a derivada da función.

### Exemplo:

Estudar se a función  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$  é derivable.

### Solución:

- Agás en  $x=2$  a función é elemental, polo tanto é derivable.
- En  $x=2$  debemos estudar a derivabilidade:
  - Pola esquerda:

$$D^-f(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2 + h + 2) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

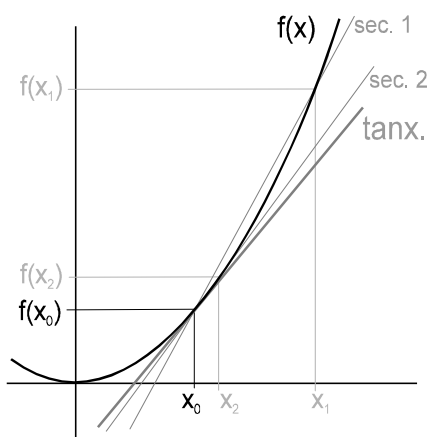
$$\begin{aligned} v(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5 \cdot 1^2}{x - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot (x^2 - 1^2)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \cdot (x+1)(x-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 5 \cdot (x+1) = 10 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

○ Pola dereita:

$$D^+f(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h + h^2}{h} \xrightarrow{\text{simplificando}} \lim_{h \rightarrow 0^+} (4 + h) = 4$$

As derivadas laterais non coinciden, a función non é derivable en  $x=2$  (como pode apreciarse na gráfica, a función presenta un acusado cambio de tendencia nese punto).



## Interpretación gráfica da derivada

Queremos atopar a ecuación da recta tanxente a gráfica dunha función  $f(x)$  no punto  $(x_0, f(x_0))$ .

Para calcular a ecuación dunha recta necesitamos dous puntos, pero só temos un. O que si podemos é elixir un valor  $x_1$  próximo  $x_0$  e aproximar a tanxente pola secante que pasa polos puntos:  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$  e que ten por ecuación:

$$\text{sec}_1 \equiv y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Fixémonos na pendente desa recta:  $m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ .

(Observa que esa pendente coincide coa taxa de variación da función entre  $x_0$  e  $x_1$ ).

Para mellorar a aproximación só temos que elixir un punto,  $x_2$ ,

máis próximo ó punto de tanxencia:  $m_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$

Se seguimos aproximándonos a  $x_0$ , a secante transfórmase na tanxente e a súa pendente na pendente da tanxente:

$$m_{\text{tanx}} = \lim_{x \rightarrow x_0} (m_{\text{sec}}) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Df(x_0)$$

- A pendente da recta tanxente á gráfica dunha función é igual á derivada da función nese punto.

### Aproximación pola tanxente:

Podemos calcular valores dunha función, aproximándoa pola recta tanxente.

### Ejemplo: Canto vale o $\ln(1'5)$ ?

Consideramos a función  $f(x) = \ln x$ . Sabendo que

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \rightarrow (\ln 1)' = 1$$

E sendo  $\ln(1)=0$ , podemos aproximalo coa tanxente:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

$$\ln(1'5) \approx 1'5 - 1 = 0'5$$

O erro é pequeno e diminúe ó achegarnos ó punto de tanxencia.

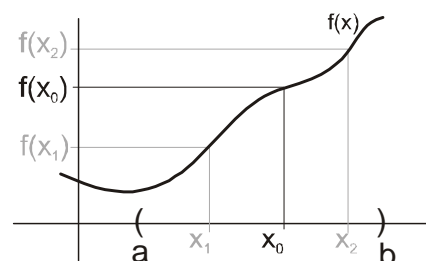
- A ecuación da **recta tanxente** a unha función  $f(x)$  no punto  $(x_0, f(x_0))$  vén dada por:  $y - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0)$

## Crecemento e derivadas

Xa que a derivada mide como varía a función nun punto, se esta crece nel a derivada debe ser positiva, e reciprocamente, se a función decrece nese punto a derivada debe ser negativa. Vemos agora a formalización rigorosa desas ideas:

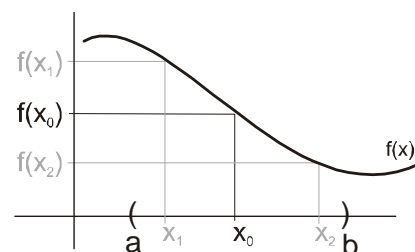
**Definición:**  $f(x)$  definida nun intervalo  $(a,b)$  é **crecente** en  $x_0$  se existe un entorno de  $x_0$ ,  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$  tal que:

$$x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



**Definición:**  $f(x)$  é **decrecente** en  $x_0$  se existe un entorno,  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$  que cumpra:

$$x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



**Teorema:** Sexa  $f(x)$  unha función definida nun intervalo  $(a,b)$  e derivable en  $x_0 \in (a,b)$ , entón:

- Se  $Df(x_0) > 0$ ,  $f(x)$  é crecente en  $x_0$ .
- Se  $Df(x_0) < 0$ ,  $f(x)$  é decrecente en  $x_0$ .

**Demostración:** a) Podemos demostralo de xeito non rigoroso tendo en conta que nun entorno de  $x_0$   $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$  podemos aproximar a función pola recta tanxente de xeito que o erro sexa “desprezable”.

Sexan  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes a ese entorno:  $x_1 < x_2$

$$\left. \begin{aligned} f(x_2) &\approx f(x_0) + Df(x_0)(x_2 - x_0) \\ f(x_1) &\approx f(x_0) + Df(x_0)(x_1 - x_0) \end{aligned} \right\}$$

$$f(x_2) - f(x_1) \approx Df(x_0)[(x_2 - x_0) - (x_1 - x_0)] = Df(x_0)(x_2 - x_1) > 0$$

é dicir,  $f(x)$  é crecente en  $x_0$  (o apartado b é semellante).

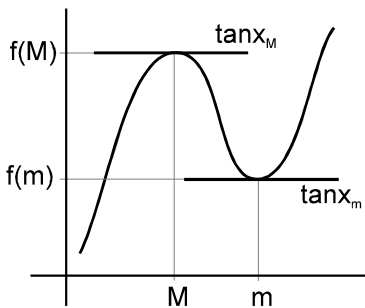
## Derivadas e extremos relativos

Se nun punto houber un **máximo**, a función pasa de subir a baixar; ou sexa, a derivada pasa de ser positiva a ser negativa, logo xusto nese punto debe ser nula. A idea é recíproca se tiver un **mínimo**. Formalizamos as ideas:

**Definición:**  $f(x)$  definida en  $(a,b)$  acada un **máximo relativo** en  $x_0$  se existe un entorno de  $x_0$ ,  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$  tal que:

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

**Definición:**  $f(x)$  definida en  $(a,b)$  acada un **mínimo relativo** en  $x_0$  se existe un entorno de  $x_0$ ,  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$  tal que:

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$


**Teorema:** Sexa  $f(x)$  unha función definida nun intervalo  $(a,b)$  e derivable en  $x_0 \in (a,b)$  entón, se  $f(x)$  ten un extremo relativo en  $x_0$ , a súa derivada en  $x_0$  é 0:  $Df(x_0) = 0$

**Demostración:** Supoñamos que en  $x_0$  hai un máximo relativo (se fose un mínimo a demostración é semellante), entón  $f(x)$  é crecente antes de  $x_0$  e decrecente despois:

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \\ x > x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \end{cases}$$

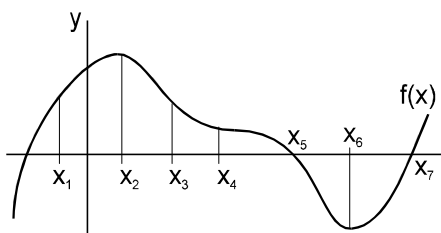
Polo tanto, a derivada pola esquerda ten que ser positiva e negativa a derivada pola dereita:

$$D^-f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$D^+f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Dado que a función é derivable en  $x_0$ , as derivadas laterais teñen que coincidir e a única posibilidade é que sexan 0:

$$D^-f(x_0) = D^+f(x_0) = Df(x_0) = 0$$



**Derivada positiva**, a función é crecente (puntos  $x_1$  e  $x_7$ ).

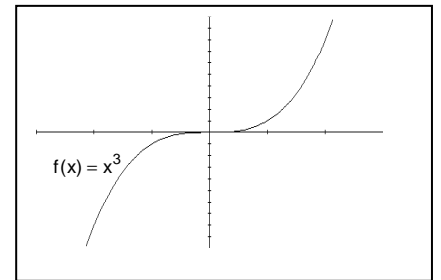
**Derivada negativa**, a función é decrecente ( $x_3$ ,  $x_5$ ).

**Derivada 0**, poden darse tres posibilidades:

- **Un máximo** (punto  $x_2$ ).
- **Un mínimo** (punto  $x_6$ ).
- **Un punto de inflexión** (punto  $x_4$ ).

O recíproco deste teorema non é certo:  $Df(x_0)$  pode ser 0 e non haber un extremo en  $x_0$  (pode haber un punto de inflexión como por exemplo en  $x=0$  coa función  $f(x) = x^3$ )

**Graficamente:** A tanxente nos máximos e nos mínimos relativos da gráfica é unha recta horizontal e, polo tanto, a súa pendente é 0. Como a pendente é igual a derivada no punto, a derivada tamén ten que ser 0.



## Continuidade e derivabilidade

**Teorema:** Se unha función  $f(x)$ , definida nun intervalo  $(a,b)$ , é derivable nun punto  $x_0 \in (a,b)$ , entón é continua nese punto.

**Demostración:** A derivada defínese como o límite dun cociente:

$$Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O denominador do cociente tende a 0:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$ .

Para que exista límite, o numerador tamén ten que tender a 0, senón teríamos unha división imposible de realizar. A única opción é dar lugar á indeterminación  $\frac{0}{0}$ .

Logo  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = f(x_0)$

Polo tanto a función é continua en  $x_0$ .

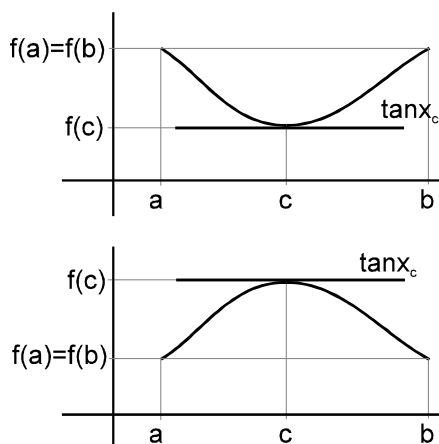
O recíproco non é certo: Unha función pode ser continua nun punto e non ser derivable nese punto. (Por exemplo, se continúa facendo un “pico”.

## Teorema de Rolle

Sexa  $f(x)$  unha función continua no intervalo pechado  $[a,b]$ , derivable no intervalo aberto  $(a,b)$  e tal que  $f(a) = f(b)$ , entón existe un punto  $c \in (a,b)$  no que a derivada vale 0:  $Df(c) = 0$ .

**Demostración:** Dado que  $f(x)$  é continua en  $[a,b]$ , polo teorema de Bolzano-Weierstass,  $f(x)$  ten un máximo,  $M$ , e un mínimo,  $m$ :  
 $\forall x \in [a,b] \quad f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ .

Xa demostramos que a derivada é 0 nos extremos relativos. Queda por probar que polo menos un extremo está no interior do intervalo. Distinguímos dous casos:



1.  $f(m) = f(M)$ , a función é constante, a derivada é 0 en tódolos puntos do intervalo  $(a,b)$ .

2.  $f(m) \neq f(M)$ , dado que  $f(m) \leq f(a) = f(b) \leq f(M)$ , temos:

$$f(m) \neq f(M) \Rightarrow \begin{cases} (M \neq a \text{ e } M \neq b) \Rightarrow M \in (a,b) \Rightarrow Df(M) = 0 \\ \text{ou} \\ (m \neq a \text{ e } m \neq b) \Rightarrow m \in (a,b) \Rightarrow Df(m) = 0 \end{cases}$$

O  $c$  sería  $m$  ou  $M$  (o que estea no interior do intervalo).

**Interpretación xeométrica:** A gráfica correspondente a unha función continua e derivable nun intervalo e que teña as ordenadas dos extremos iguais, ten polo menos un punto onde a tanxente é horizontal

## Teorema do Valor Medio do Cálculo Diferencial

Sexa  $f(x)$  unha función continua no intervalo pechado  $[a,b]$ , derivable no intervalo aberto  $(a,b)$ , entón hai un punto  $c \in (a,b)$  tal que:  $Df(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Demostración:**  $g(x) = [f(b) - f(a)] \cdot x - (b - a) \cdot f(x)$  cumpre as hipótese do Teorema de Rolle:

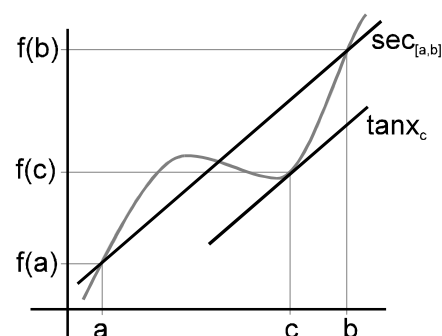
- É continua en  $[a,b]$  por ser suma de funcións continuas: O polinomio  $[f(b) - f(a)]x$ ,  $[f(b) - f(a)]$  é un número, e a función  $(b - a)f(x)$  que é continua por ser produto dunha función continua por un número.



- É derivable no intervalo  $(a,b)$  por ser suma de funcións derivables (as mesmas do apartado anterior).
- Ademais  $g(a) = g(b)$ . En efecto:

$$g(a) = [f(b) - f(a)] \cdot a - (b - a) \cdot f(a) = f(b) \cdot a - b \cdot f(a)$$

$$g(b) = [f(b) - f(a)] \cdot b - (b - a) \cdot f(b) = -f(a) \cdot b + a \cdot f(b)$$



Polo tanto existe un  $c \in (a,b)$  tal que  $Dg(c) = 0$ :

$$g'(x) = [f(b) - f(a)] - (b - a) \cdot f'(x)$$

$$[f(b) - f(a)] - (b - a) \cdot f'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Interpretación xeométrica:** Hai polo menos un punto no intervalo  $(a,b)$  onde a tanxente á gráfica correspondente a unha función continua e derivable, é paralela á secante que une os puntos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

## Función derivada

Se unha función  $f(x)$  é derivable nun intervalo  $(a,b)$ , podemos definir a súa **función derivada**,  $f'(x)$ , como a función que a cada punto  $x \in (a,b)$  faille corresponde-la derivada de  $f(x)$  nese punto:  
 $f'(x) = Df(x) \quad \forall x \in (a,b)$

### Exemplos:

A función  $f(x)=x$  ten como función derivada  $f'(x)=1$ , pois

$$Df(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1 \quad \text{sempre.}$$

A función  $f(x)=x^2$  ten como función derivada  $f'(x)=2x$ , pois

$$\begin{aligned} Df(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 \end{aligned}$$

## Derivada segunda

Se unha función  $f(x)$  é derivable nun intervalo  $(a,b)$ , existe a súa función derivada,  $f'(x)$ , nese intervalo.

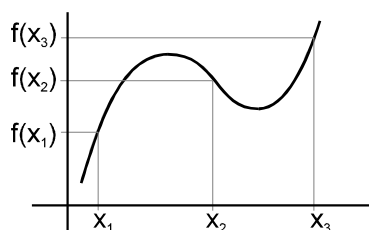
Definímo-la derivada segunda de  $f(x)$  no punto  $x_0 \in (a,b)$  como a

derivada, se existe, de  $f'(x)$  en  $x_0$ : 
$$D^2f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

### Curvatura:

Unha función derivable nun punto é **convexa** nese punto se a súa gráfica queda por “enriba” da recta tanxente, se queda por debaixo é **cóncava** e se a gráfica corta no punto á recta tanxente é un **punto de inflexión** (cambia a curvatura).

A derivada segunda no punto  $x_0$  describe a curvatura da gráfica de  $f(x)$  no punto:



$D^2f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x)$  é cóncava en  $x_1$

$D^2f(x_2) = 0 \Rightarrow$  en  $x_2$  hai un punto de inflexión

$D^2f(x_3) > 0 \Rightarrow f(x)$  convexa en  $x_3$

- $D^2f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$  é cóncava en  $x_0$
- $D^2f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$  é convexa en  $x_0$
- $D^2f(x_0) = 0 \Rightarrow$  en  $x_0$  hai un *posible* punto de inflexión (tamén pode haber un extremo relativo).

**Función derivada segunda:** Se existe a **derivada segunda** de  $f(x)$  en tódolos puntos do intervalo podemos definir a función derivada segunda como:  $f''(x) = D^2f(x) \quad \forall x \in (a,b)$ .

## Derivadas sucesivas

De xeito semellante á derivada segunda, podemos definir a derivada terceira de  $f(x)$  en  $x_0 \in (a,b)$  como a derivada en  $x_0$  da función derivada segunda,  $f''(x)$ , e así sucesivamente.

As funcións elementais son, derivables tódalas veces que se queira, o que se coñece como ser *de clase infinita*.

# Cálculo de funcións derivadas

Podemos atopar a función derivada dunha función dada a partir das derivadas das funcións elementais e utilizando as regras de derivación:

| REGRAS DE DERIVACIÓN |                                       |  |
|----------------------|---------------------------------------|--|
| función              | derivada                              | regra  |
| $a \cdot u$          | $a \cdot u'$                          | A derivada dunha constante por unha función é a constante pola derivada da función   |
| $u+v$                | $u'+v'$                               | A derivada dunha suma é a suma das derivadas   |
| $u \cdot v$          | $u' \cdot v + u \cdot v'$             | A derivada dun produto é a derivada do primeiro factor polo segundo sen derivar máis o primeiro sen derivar pola derivada do segundo   |
| $\frac{u}{v}$        | $\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ | A derivada dun cociente é a derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador dividido todo polo denominador ó cadrado |
| $f(u)$               | $f'(u) \cdot u'$                      | Regra da cadea   |

| DERIVADAS ELEMENTAIS |                    |                 |  |
|----------------------|--------------------|-----------------|--|
| función              | derivada           | función         | derivada   |
| $x^r$                | $r \cdot x^{r-1}$  | $u^r$           | $R \cdot u^{r-1} \cdot u'$                         |
| $\text{sen}(x)$      | $\cos(x)$          | $\text{sen}(u)$ | $[\cos(u)] \cdot u'$                               |
| $\cos(x)$            | $-\text{sen}(x)$   | $\cos(u)$       | $[-\text{sen}(u)] \cdot u'$                        |
| $\text{tg}(x)$       | $1+\text{tg}^2(x)$ | $\text{tg}(u)$  | $[1+\text{tg}^2(u)] \cdot u'$                      |
| $\text{Ln}(x)$       | $\frac{1}{x}$      | $\text{Ln}(u)$  | $\left(\frac{1}{u}\right) \cdot u' = \frac{u'}{u}$ |
| $e^x$                | $e^x$              | $e^u$           | $e^u \cdot u'$                                     |