Exercicios autoavaliación

1 Calcula os valores de *a*, *b* e *c* de xeito que a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ teña un extremo en x=1, e a tanxente no punto $(-1,7)$ sexa paralela á recta $\frac{y}{2} + 6x - 3 = 0$.

2 Dada a función $f(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{se } x < 2 \\ x^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcula o valor de *a* de xeito que a función sexa continua.
b) Para ese valor de *a*, ¿é aplicable á función o Teorema do Valor medio do Cálculo Diferencial no intervalo $[0,4]$? En caso afirmativo busca o punto de verificación do teorema.

3 Comproba a validez do Teorema de Rolle coa función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ no intervalo pechado $[-1,5]$. Encontra o punto de verificación.

4 Demostra que a ecuación $e^x = 1 - x$ ten soamente a solución real x=0.

Exercicios autoavaliación

1 Calcula os valores de *a*, *b* e *c* de xeito que a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ teña un extremo en x=1, e a tanxente no punto $(-1,7)$ sexa paralela á recta $\frac{y}{2} + 6x - 3 = 0$.

Solución: As condicións anteriores tradúcense en:

i) Que no punto x=1 a derivada en é 0

ii) Que a gráfica pasa por $(-1,7)$ e nel a derivada coincide coa pendente da recta.

Estudamos a pendente da recta: $\frac{y}{2} + 6x - 3 = 0 \Rightarrow y = -12x + 6 \Rightarrow m\ (\text{pendente}) = -12$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 7 \rightarrow -a + b - c = 7 \\ Df(-1) = -12 \rightarrow 3a - 2b + c = -12 \\ Df(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \\ 3^a-2^a \\ 3^a+1^a\cdot 3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & -2 & 21 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ 2^a/4 \\ 2^a\cdot 5-3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2c = -6 \Rightarrow c = -3 \\ b = 3 \\ -a + 3 + 3 = 7 \Rightarrow a = -1 \end{array}\right.$$

2 Dada a función $f(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{se } x < 2 \\ x^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcula o valor de *a* de xeito que a función sexa continua.

b) Para ese valor de *a*, ¿é aplicable á función o Teorema do Valor medio do Cálculo Diferencial no intervalo $[0,4]$? En caso afirmativo busca o punto de verificación do teorema.

Solución:

a) O único punto que pode presentar problemas de continuidade é o x=2, onde cambia de treito. Para que sexa continua tamén nese punto teñen que coincidir os valores:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (4x + a) = 8 + a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2) = 4 \\ f(2) = 2^2 = 4 \end{array}\right\} \quad 8 + a = 4 \Rightarrow a = -4$$

b) As hipóteses do teorema son que f(x) debe ser continua en $[0,4]$ e derivable en $(0,4)$:

Continuidade: Para a=-4 a función é continua en tódolos puntos.

Derivabilidade: Sabemos que a función é derivable en tódolos puntos anteriores e posteriores ao 2, porque cada unha desas partes é elemental. Vemos que pasa en x=2:

$$D^{-}f(2)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{4(2+h)-4-4}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{4h}{h}=4$$
$$D^{+}f(2)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}(4+h)=4$$

A función é derivable en x=2 (outro xeito sería comprobar que os valores das funcións derivadas de $f_1(x)=4x-4$ e $f_2(x)=x^2$ coinciden en x=2) e polo tanto cumpre as hipóteses do teorema.

En consecuencia, existe un $c\in[0,4]$ que cumpre que $f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$. Comprobar que se verifica o teorema equivale a atopar o valor de *c*:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{16-(-4)}{4}=5\rightarrow\begin{cases}f'(x)=4 & se\ x\in[0,2]\Rightarrow c\notin[0,2]\\ f'(x)=2x & se\ x\in[2,4]\Rightarrow 2c=5\Rightarrow c=\frac{5}{2}\end{cases}$$

3 Comproba a validez do Teorema de Rolle coa función $f(x)=x^3-3x^2-9x$ no intervalo pechado $[-1,5]$. Encontra o punto de verificación.

Solución: Comprobamos que a función satisfai as hipóteses do Teorema de Rolle.

1. Continuidade en $[-1,5]$: A función é continua en todo R por ser polinómica.
2. Derivable en $(-1,5)$: É derivable en todo R por ser polinómica.
3. $\left.\begin{array}{l}f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)=5\\ f(5)=5^3-3\cdot 5^2-9\cdot 5=5\end{array}\right\}\Rightarrow f(-1)=f(5)$ (coincide nos extremos do intervalo)

Segundo o Teorema de Rolle, existe polo menos un $c\in(-1,5)$ no que a derivada de f(x) é 0. Comprobar que se verifica o teorema equivale a atopa-lo *c*:

$$f'(c)=3c^2-6c-9$$
$$3c^2-6c-9=0\Leftrightarrow c^2-2c-3=0\Rightarrow c=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases}c_1=3\\ c_2=-1\end{cases}$$

O *c* do que fala o teorema é 3, xa que -1 non serve por non pertencer ao intervalo aberto.

4 Demostra que a ecuación $e^x = 1 - x$ ten soamente a solución real x=0.

Demostración: Primeiro comprobamos que 0 é unha solución: $e^0 = 1 = 1 - 0$.

i) Xa que temos a incógnita no expoñente, transformamos a ecuación utilizando logaritmos:

$$\mathrm{Ln}\left(e^x\right) = \mathrm{Ln}(1-x) \Rightarrow x \cdot \mathrm{Ln}(e) = \mathrm{Ln}(1-x) \Rightarrow x = \mathrm{Ln}(1-x).$$

Non podendo operar co logaritmo dunha suma (resta), atopámonos cun camiño sen saída.

ii) Probemos doutro xeito: "*por redución ao absurdo*".

Supoñamos que hai outra solución e intentemos chegar a un absurdo.

Se a ecuación ten dúas solucións, a función $f(x) = 1 - x - e^x$ vale 0 nos dous valores solucións da ecuación, que chamaremos *a* e *b* (un deles, *a* ou *b*, será o 0) e, polo tanto, f(x) cumpre as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[a,b]$:

- f(x) é continua no intervalo $[a,b]$ e é derivable no intervalo (a,b) (f(x) é unha función elemental definida en todo R e, polo tanto, continua e derivable en todo R).
- f(x) toma valores iguais nos extremos do intervalo: f(a)=f(b)=0

En consecuencia, polo teorema de Rolle, hai un punto no intervalo (a,b) no que a derivada de f(x) é 0.

Comprobemos se iso é certo: $f'(x) = -1 - e^x \xrightarrow{\text{igualando a 0}} -1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$

Pero esa última ecuación non ten solución en R (e^x é positivo calquera que sexa o valor de x) e polo tanto chegamos a un absurdo porque a derivada de f(x) non é 0 en ningún punto. Logo non hai ningunha outra solución.