

Exercicios autoavaliación

1 Calcula os valores de a , b e c de xeito que a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ teña un extremo en $x=1$, e a tanxente no punto $(-1,7)$ sexa paralela á recta $\frac{y}{2} + 6x - 3 = 0$.

Solución: As condicións anteriores tradúcense en:

i) Que no punto $x=1$ a derivada en é 0

ii) Que a gráfica pasa por $(-1, 7)$ e nel a derivada coincide coa pendente da recta.

Estudamos a pendente da recta: $\frac{y}{2} + 6x - 3 = 0 \Rightarrow y = -12x + 6 \Rightarrow m \text{ (pendente)} = -12$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(-1) = 7 \rightarrow -a + b - c = 7$$

$$Df(-1) = -12 \rightarrow 3a - 2b + c = -12$$

$$Df(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 7 \rightarrow -a + b - c = 7 \\ Df(-1) = -12 \rightarrow 3a - 2b + c = -12 \\ Df(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 3^a - 2^a \\ 3^a + 1^a \cdot 3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & -2 & 21 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 2^a/4 \\ 2^a \cdot 5 - 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2c = -6 \Rightarrow c = -3 \\ b = 3 \\ -a + 3 + 3 = 7 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

2 Dada a función $f(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{se } x < 2 \\ x^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcula o valor de a de xeito que a función sexa continua.

b) Para ese valor de a , ¿é aplicable á función o Teorema do Valor medio do Cálculo Diferencial no intervalo $[0,4]$? En caso afirmativo busca o punto de verificación do teorema.

Solución:

a) O único punto que pode presentar problemas de continuidade é o $x=2$, onde cambia de treito. Para que sexa continua tamén nese punto teñen que coincidir os valores:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x + a) = 8 + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2) = 4 \\ f(2) = 2^2 = 4 \end{array} \right\} 8 + a = 4 \Rightarrow a = -4$$

b) As hipóteses do teorema son que $f(x)$ debe ser continua en $[0,4]$ e derivable en $(0,4)$:

Continuidade: Para $a=-4$ a función é continua en tódolos puntos.

Derivabilidade: Sabemos que a función é derivable en tódolos puntos anteriores e posteriores ao 2, porque cada unha desas partes é elemental. Vemos que pasa en $x=2$:

$$D^-f(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4(2+h) - 4 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4h}{h} = 4$$

$$D^+f(2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (4 + h) = 4$$

A función é derivable en $x=2$ (outro xeito sería comprobar que os valores das funcións derivadas de $f_1(x) = 4x - 4$ e $f_2(x) = x^2$ coinciden en $x=2$) e polo tanto cumpre as hipóteses do teorema.

En consecuencia, existe un $c \in [0,4]$ que cumpre que $f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$. Comprobar que se verifica o teorema equivale a atopar o valor de c :

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{16 - (-4)}{4} = 5 \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 4 & \text{se } x \in [0,2] \Rightarrow c \notin [0,2] \\ f'(x) = 2x & \text{se } x \in [2,4] \Rightarrow 2c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

3 Comproba a validez do Teorema de Rolle coa función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ no intervalo pechado $[-1,5]$. Encontra o punto de verificación.

Solución: Comprobamos que a función satisfai as hipóteses do Teorema de Rolle.

1. Continuidade en $[-1,5]$: A función é continua en todo \mathbb{R} por ser polinómica.
2. Derivable en $(-1,5)$: É derivable en todo \mathbb{R} por ser polinómica.
3. $\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) = 5 \\ f(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 9 \cdot 5 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) = f(5) \text{ (coincide nos extremos do intervalo)}$

Segundo o Teorema de Rolle, existe polo menos un $c \in (-1,5)$ no que a derivada de $f(x)$ é 0. Comprobar que se verifica o teorema equivale a atopalo c :

$$f'(c) = 3c^2 - 6c - 9$$

$$3c^2 - 6c - 9 = 0 \Leftrightarrow c^2 - 2c - 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

O c do que fala o teorema é 3, xa que -1 non serve por non pertencer ao intervalo aberto.

4 Demuestra que a ecuación $e^x = 1 - x$ ten soamente a solución real $x=0$.

Demostración: Primeiro comprobamos que 0 é unha solución: $e^0 = 1 = 1 - 0$.

i) Xa que temos a incógnita no expoñente, transformamos a ecuación utilizando logaritmos:

$$\ln(e^x) = \ln(1-x) \Rightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(1-x) \Rightarrow x = \ln(1-x).$$

Non podendo operar co logaritmo dunha suma (resta), atopámonos cun camiño sen saída.

ii) Probemos doutro xeito: “*por redución ao absurdo*”.

Supoñamos que hai outra solución e intentemos chegar a un absurdo.

Se a ecuación ten dúas solucións, a función $f(x) = 1 - x - e^x$ vale 0 nos dous valores solucións da ecuación, que chamaremos a e b (un deles, a ou b , será o 0) e, polo tanto, $f(x)$ cumpre as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[a,b]$:

- $f(x)$ é continua no intervalo $[a,b]$ e é derivable no intervalo (a,b) ($f(x)$ é unha función elemental definida en todo \mathbb{R} e, polo tanto, continua e derivable en todo \mathbb{R}).
- $f(x)$ toma valores iguais nos extremos do intervalo: $f(a)=f(b)=0$

En consecuencia, polo teorema de Rolle, hai un punto no intervalo (a,b) no que a derivada de $f(x)$ é 0.

Comprobemos se iso é certo: $f'(x) = -1 - e^x \xrightarrow{\text{igualando a 0}} -1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$

Pero esa última ecuación non ten solución en \mathbb{R} (e^x é positivo calquera que sexa o valor de x) e polo tanto chegamos a un absurdo porque a derivada de $f(x)$ non é 0 en ningún punto. Logo non hai ningunha outra solución.