

Exercicios de autoavaliación

1) Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Solución:

Trátase dunha función definida a cachos, cada un deles elemental. Polo tanto, é continua en todos os puntos agás, se cadra, no 1.

En $x=1$ é necesario estudalo:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + 2x) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
- $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$

Dado que eses tres valores coinciden, a función é continua tamén en $x=1$.

2) Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \text{se } x \leq -1 \\ x + 3 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

Solución:

Trátase dunha función definida a cachos, cada un deles elemental. Polo tanto, é continua en todos os puntos agás, se cadra, no -1.

En $x=-1$ é necesario estudalo:

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{+0} = +\infty$

Non é necesario calcular o outro límite lateral. Xa sabemos que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ non existe, por tanto

a función é descontinua de tipo infinito en $x=-1$

De todos os xeitos, imos practicar calculando o outro límite lateral:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

3) Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{4-x^2} & \text{se } x > 2 \\ \frac{x}{2} & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

Solución:

Trátase dunha función definida a cachos, cada un deles elemental. Polo tanto, é continua en todos os puntos agás, se cadra, no 2.

En $x=2$ é necesario estudar a continuidade:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{2}{2} = 1 \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{4-x^2} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{indeterminado } \frac{0}{0} \\ \text{simplificamos a} \\ \text{fracción} \end{array} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(2-x) \cdot (2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Non é necesario calcular o valor da función. Os límites laterais non coinciden, xa sabemos que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ non existe, por tanto a función é descontinua de salto en $x=2$

4) Estuda a continuidade da función f , segundo os valores de a :

$$f(x) = \begin{cases} 3-ax^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

A primeira parte é un polinomio de 2º grao, polo que sería sempre continua.

A segunda parte tería o problema de que se anulase o denominador (cando $a=0$), que debemos advertir, xa que a función non estaría, entón, ben definida.

O exercicio céntrase no punto $x = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 3-a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 3-a \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{a} \quad \text{é continua se coinciden:} \\ 3-a &= \frac{2}{a} \rightarrow 3a - a^2 = 2 \rightarrow \dots \quad a = 2 \quad \text{ou} \quad 1 \end{aligned}$$

5) Calcula os valores de a e b para que sexa continua a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{x+2}{b} & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ 2x - 4a & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

Trátase dunha función definida a trozos. É continua en todos os puntos nos que é elemental nun entorno dese punto. É dicir, todos os números reais agás -1 e 2. Para que sexa continua tamén neses puntos deben coincidir os límites e os valores da función.

En $x=-1$ é necesario estudar a continuidade:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + ax) = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{b} = \frac{1}{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - a = \frac{1}{b}$$

En $x=2$ é necesario estudar a continuidade:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{b} \right) = \frac{4}{b} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4a) = 4 - 4a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 - 4a = \frac{4}{b}$$

Debemos resolver o sistema formado por esas dúas ecuacións, pero xa vemos que son iguais polo que teremos só una independente polo que teremos infinitas solución da forma: $a = 1 - \frac{1}{b}$.

Todos os valores de a e b que verifiquen a igualdade anterior fan que a función sexa continua.

6) Estuda se a seguinte función verifica as hipótese do teorema de Bolzano e, en caso afirmativo, comproba a validez do teorema no intervalo $[-3,0]$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x \leq -2 \\ 1 + x^3 & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

Solución:

Debemos comprobar que é continua nese intervalo. O único punto no que pode non selo é en $x=-2$ pois nos demais é elemental nun entorno deses punto.

En $x=-2$ é necesario estudar a continuidade:

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x - 3) = -7$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (1 + x^3) = 1 - 8 = -7$
- $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$

Efectivamente é continua en $x=-2$ e, polo tanto, en todo o intervalo $[-3,0]$

Tamén debemos comprobar que o signo da función nos extremos do intervalo é diferente:

- $f(-3) = 2 \cdot (-3) - 3 = -9$
- $f(0) = 1 + 0^3 = 1$

A función cumpre coas hipótese do teorema de Bolzano, debe existir un punto no interior do intervalo no que a función sexa 0:

- $2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \notin [-3,0]$
- $1 + x^3 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1 \in [-3,0]$

O teorema de Bolzano garante a existencia dun valor de x que anula a función (pode haber máis). Un valor é $x=-1$.

7) Demuestra que a ecuación $x^2 + 1 = 2^x$ ten, polo menos, tres solucións.

Solución:

A ecuación ten un membro exponencial e no outro hai una suma, polo que non é posible resolvela alxebricamente.

Sen embargo, simplemente dándolle valores a x , atopamos que $x=0$ e $x=1$ son solucións da ecuación.

Podemos demostrar que debe existir outra solución empregando o teorema de Bolzano e a función $f(x) = x^2 + 1 - 2^x$ que obtemos a partir da ecuación.

- É una función elemental, por tanto continua en todo o seu dominio que son todos os números reais.
- Buscamos valores de x aos que lle correspondan valores da función con signo contrario:

x	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	1	-6

Os signos en $x=4$ e $x=5$ son contrarios, polo tanto a función ten unha raíz c no intervalo $[4,5]$.

Esa raíz é unha solución da ecuación: $f(c) = c^2 + 1 - 2^c = 0 \Rightarrow c^2 + 1 = 2^c$