Exercicios autoavaliación

O Método de Gauss é conceptualmente moi simple pero, para aplicalo, necesítase facer "mentalmente" moitas operación o que con moita frecuencia leva a erros. Hai outros métodos para a resolución de sistemas como a Regra de Cramer, que a pesares de necesitar un maior número de operación, a experiencia demostra que non da lugar a tantos erros con sistemas pequenos, 3x3 ou menores.

1 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=-4\\ -2x+y+3z&=6\\ 4x+5y+2z&=5 \end{aligned}\right\}$$

2 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+3z&=-6\\ 3x+2y+4z&=-4\\ -x+4y-2z&=8 \end{aligned}\right\}$$

3 Calcula o rango da matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1\\ 5 & 1 & 3\\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

4 Calcula a matriz inversa de: $A=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 3\\ 5 & 1 & 11\\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

5 Calcula a matriz inversa de: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Exercicios autoavaliación

O Método de Gauss é conceptualmente moi simple pero, para aplicalo, necesítase facer “mentalmente” moitas operación o que con moita frecuencia leva a erros. Hai outros métodos para a resolución de sistemas como a Regra de Cramer, que a pesares de necesitar un maior número de operación, a experiencia demostra que non da lugar a tantos erros con sistemas pequenos, 3x3 ou menores.

1 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=-4\\ -2x+y+3z&=6\\ 4x+5y+2z&=5 \end{aligned}\right\}$$

Solución: Utilizarémos o método de Gauss.

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=-4\\ -2x+y+3z&=6\\ 4x+5y+2z&=5 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4\\ -2 & 1 & 3 & 6\\ 4 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ 2^a+1^a\cdot 2\\ 3^a-1^a\cdot 4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4\\ 0 & 5 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 6 & 21 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3^a\cdot 5+2^a\cdot 3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4\\ 0 & 5 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 33 & 99 \end{array}\right) \to \begin{cases} z=\dfrac{99}{33}=3\\ 5y+3=-2 \Rightarrow y=\dfrac{-5}{5}=-1\\ x-2-3=-4 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

2 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+3z&=-6\\ 3x+2y+4z&=-4\\ -x+4y-2z&=8 \end{aligned}\right\}$$

Solución: Utilizarémos o método de Gauss. Poñémos a 3ªecuación en primeiro lugar por ter coeficiente de *x* igual a -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8\\ 2 & -1 & 3 & -6\\ 3 & 2 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ 2^a+1^a\cdot 2\\ 3^a+1^a\cdot 3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8\\ 0 & 7 & -1 & 10\\ 0 & 14 & -2 & 20 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ \\ 3^a-2^a\cdot 2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8\\ 0 & 7 & -1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtemos unha fila de ceros, o que significa que esa ecuación era unha combinación das outras. Quedan dúas ecuacións e tres incógnitas, o sistema é indeterminado.

Só podemos despexar 2 *incógnitas* (tantas como ecuacións quedan) en función da outra, polo que convertemos a *z* nun parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{z=t} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 8+2t \\ 0 & 7 & 10+t \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 7y = 10+t \Rightarrow y = \dfrac{10+t}{7} \\ -x + \dfrac{40+4t}{7} = 8+2t \Rightarrow x = \dfrac{-16-10t}{7} \end{cases}$$

3 Calcula o rango da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Utilizaremos o método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \cdot 5 \\ 3^a - 1^a \cdot 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -34 & 8 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3^a - 2^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -34 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtivemos unha fila de 0s, o que indica que esa fila é combinación das demais. O rango é 2

4 Calcula a matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} \\ 2^a \cdot 2 + 1^a \cdot 5 \\ 3^a \cdot 2 + 1^a \cdot 3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 37 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3^a/15 - 2^a/37 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 37 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

Obtivemos unha fila de ceros, a matriz NON ten inversa (non necesitamos completar os cálculos).

5 Calcula a matriz inversa de: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\begin{matrix}\\ 2^a+1^a\cdot 2\\ 3^a-1^a\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\to\begin{matrix}\\ \\ 3^a-2^a\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\begin{matrix}\\ 2^a\cdot 2+3^a\cdot 3\\ \\\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -5 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1\end{array}\right)\to\begin{matrix}1^a+3^a\\ \\ \\\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -5 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1\end{array}\right)\to\begin{matrix}\\ 2^a/2\\ 3^a/2\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2'5 & -0'5 & 1'5\\ 0 & 0 & 1 & -1'5 & -0'5 & 0'5\end{array}\right)$$

A matriz inversa será: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -2'5 & -0'5 & 1'5\\ -1'5 & -0'5 & 0'5\end{pmatrix}$