

Exercicios autoavaliación

O Método de Gauss é conceptualmente moi simple pero, para aplicalo, necesítase facer “mentalmente” moitas operacións o que con moita frecuencia leva a erros. Hai outros métodos para a resolución de sistemas como a Regra de Cramer, que a pesares de necesitar un maior número de operacións, a experiencia demostra que non da lugar a tantos erros con sistemas pequenos, 3x3 ou menores.

1 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y - z = -4 \\ -2x + y + 3z = 6 \\ 4x + 5y + 2z = 5 \end{array} \right\}$$

Solución: Utilizaremos o método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y - z = -4 \\ -2x + y + 3z = 6 \\ 4x + 5y + 2z = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2^a + 1^a \cdot 2 \\ 3^a - 1^a \cdot 4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 & 21 \end{array} \right)$$
$$3^a \cdot 5 + 2^a \cdot 3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 33 & 99 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} z = \frac{99}{33} = 3 \\ 5y + 3 = -2 \Rightarrow y = \frac{-5}{5} = -1 \\ x - 2 - 3 = -4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

2 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left. \begin{array}{r} 2x - y + 3z = -6 \\ 3x + 2y + 4z = -4 \\ -x + 4y - 2z = 8 \end{array} \right\}$$

Solución: Utilizaremos o método de Gauss. Poñemos a 3ª ecuación en primeiro lugar por ter coeficiente de x igual a -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2^a + 1^a \cdot 2 \\ 3^a + 1^a \cdot 3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 10 \\ 0 & 14 & -2 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a - 2^a \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Obtemos unha fila de ceros, o que significa que esa ecuación era unha combinación das outras. Quedan dúas ecuacións e tres incógnitas, o sistema é indeterminado.

Só podemos despxear 2 *incógnitas* (tantas como ecuacións quedan) en función da outra, polo que convertemos a z nun parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{z=t} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 8+2t \\ 0 & 7 & 10+t \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 7y = 10+t \Rightarrow y = \frac{10+t}{7} \\ -x + \frac{40+4t}{7} = 8+2t \Rightarrow x = \frac{-16-10t}{7} \end{cases}$$

3 Calcula o rango da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Utilizaremos o método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a-1^a \cdot 5 \\ 3^a-1^a \cdot 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -34 & 8 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 3^a-2^a \\ 3^a-1^a \cdot 4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -34 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtivemos unha fila de 0s, o que indica que esa fila é combinación das demais. O rango é 2

4 Calcula a matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} 2^a \cdot 2 + 1^a \cdot 5 \\ 3^a \cdot 2 + 1^a \cdot 3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 37 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} 3^a/15 - 2^a/37 \\ 3^a/15 - 2^a/37 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 37 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtivemos unha fila de ceros, a matriz NON ten inversa (non necesitamos completar os cálculos).

5 Calcula la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a - 1^a]{2^a + 1^a \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a - 2^a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3^a \cdot 3]{2^a \cdot 2 + 3^a \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a \cdot 2]{1^a + 3^a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a \cdot 2]{2^a \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2'5 & -0'5 & 1'5 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1'5 & -0'5 & 0'5 \end{pmatrix}$$

A matriz inversa será: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2'5 & -0'5 & 1'5 \\ -1'5 & -0'5 & 0'5 \end{pmatrix}$