

Unidade 3: Sistemas de ecuacións lineais

- 1. Sistemas de ecuacións lineais.**
 - 1.1. Definición.**
 - 1.2. Tipos de sistemas.**
 - 1.3. Forma matricial dun sistema de ecuacións lineais.**
- 2. Teorema de Rouche-Frobenius.**
 - 2.1. Enunciado e demostración.**
 - 2.2. Discusión dun sistema de ecuacións lineais.**
- 3. Regra de Cramer.**
 - 3.1. Enunciado e demostración.**
 - 3.2. Resolución de sistemas coa Regra de Cramer.**

Sistemas lineais

Ecuación lineal: É una ecuación na que as incógnitas só están multiplicadas por números (**coeficientes**).

Ejemplo de sistema lineal de 2 ecuacións e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ 5x - 2y + 7z = 3 \end{cases}$$

Sistemas lineais: Un sistema de ecuacións formado por ecuacións lineais. Un sistema lineal de n ecuacións e m incógnitas sempre poderemos escribilo da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Matriz do sistema anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz do sistema: Á matriz $A = (a_{ij})_{n \times m}$ chamáremoslle **matriz do sistema** ou **matriz dos coeficientes**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada: É a matriz que resulta de engadirlle á matriz A a columna dos termos independentes, $B = (b_i)_{n \times 1}$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Sistemas equivalentes

Dous sistemas son **equivalentes** cando teñen o mesmo conxunto de solucións.

Resolver un sistema é ir transformandoo noutros sistemas equivalentes, pero máis simples, ata despexar as incógnitas.

Hai moitos xeitos de obter sistemas equivalentes:

- Multiplicar unha ecuación por un número distinto de 0.
- Sumar a unha ecuación unha combinación lineal das demais.
- Despexar unha incógnita nunha ecuación e substituíla nas demais.

- Despejar unha incógnita en varias ecuacións e igualalas expresións que se obtéñen.

Sistemas homoxéneos

É un sistema de ecuacións lineais que ten tódolos termos independentes iguais a 0:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{array} \right\}$$

Os sistemas homoxéneos sempre teñen polo menos a solución que fai tódalas incógnitas 0. É a **solución trivial**.

Sistema homoxéneo:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + 4z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

Sempre ten, polo menos, a solución trivial: $x=0$, $y=0$ e $z=0$.

$$\left. \begin{array}{l} -2 \cdot 0 + 0 + 4 \cdot 0 = 0 \\ 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\}$$

Neste caso, esa solución non é única: Por exemplo $x=22$, $y=16$ e $z=7$ é outra solución.

Tipos de sistemas lineais segundo as solucións

Atendendo a se ten solución e ao número de solucións, un sistema de ecuacións lineais pode ser:

- **Compatible:** Se ten solución.
- **Incompatible:** Cando non ten solución.
- **Determinado:** Ten unha única solución.
- **Indeterminado:** Ten moitas solucións.

Exemplo:

Resolve o sistema:
$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 8 \\ 3x - 6y = -9 \end{array} \right\}$$

Resposta:

Empregamos o método de redución multiplicando a primeira ecuación por 3:

Os sistemas **homoxéneos** son sempre compatibles porque teñen, polo menos, a solución trivial con todas as incógnitas igual a 0.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 8 \\ 3x - 6y = -9 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 6y = 24 \\ 3x - 6y = -9 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sumando}} 15x = 15 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Obtemos una única solución, o sistema é compatible determinado.

Exemplo:

Resolve o sistema:
$$\left. \begin{array}{l} -4x + 2y = 8 \\ 6x - 3y = -12 \end{array} \right\}$$

Resposta:

Empregamos o método de reducción dividindo a primeira ecuación entre 2 e a segunda entre 3:

$$\left. \begin{array}{l} -4x + 2y = 8 \\ 6x - 3y = -12 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + y = 4 \\ 2x - y = -4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sumando}} 0 = 0$$

Obtemos a identidade $0=0$, pero non podemos despxear as incógnitas. Se observamos o sistema intermedio, vemos que se trata da mesma ecuación cambiada de signo. Antes, multiplicando a segunda ecuación por $-2/3$ (ou a primeira por $-3/2$) obtemos a outra ecuación. As dúas ecuacións son equivalentes (graficamente son dúas rectas que se superpoñen: todos os puntos son solución do sistema).

A solución son todos os puntos da forma:

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{-12 - 6x}{-3} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 4 + 2t \end{array} \right\}$$

O sistema é compatible indeterminado, ten infinitas solucións (una por cada valor de t).

Exemplo:

Resolve o sistema:
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = 1 \end{array} \right\}$$

Resposta:

Empregamos novamente o método de reducción multiplicando a primeira ecuación por -3 :

$$\left. \begin{array}{l} -3x - 6y = 9 \\ 3x + 6y = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sumando}} 0 = 10$$

Obtemos una igualdade falsa (obviamente 0 non é igual a 10). Observando o sistema, podemos decatarnos de que si $x + 2y$ é -3, entón $3x + 6y$ debería ser -9 e non 1, como di a segunda ecuación. As ecuacións son contraditorias, o sistema non ten solución.

Rangos e sistemas lineais

Ao resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{array} \right) \rightarrow I \cdot (-3) + II \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Atopámonos que a segunda ecuación depende da primeira (é a primeira multiplicada por 3): non proporciona ningunha información nova. Podemos prescindir dela pois é superflua.

Debemos distinguir entre as ecuacións que forman un sistema e as que realmente proporcionan información, as que non dependen das demais.

Diremos que unha ecuación é **linealmente independente** das outras cando non pode obterse como unha combinación delas.

Considerando a matriz asociada ao sistema, o rango da matriz dos coeficientes será igual ao número de ecuacións independentes.

Lembra, dada unha matriz con n filas e m columnas ou, o que é o mesmo, de orden $n \times m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Chamarémoslle **rango da matriz A** ao **número de filas linealmente independentes que a forman.**

Demóstrase que o rango dunha matriz é o mesmo calculado polas súas filas que polas súas columnas.

Podemos calcular facilmente o rango dunha matriz por determinantes. Será a orde (número de filas ou columnas) do maior determinante non nulo que se poda construír cos elementos da matriz.

Exemplo:

Calcula o rango da seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Resposta:

Podemos empezar polos determinantes maiores ou polos máis pequenos. Usualmente é máis doado desde os máis pequenos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 12 = -13 \text{ É distinto de } 0 \text{ así que podemos afirmar}$$

que o rango da matriz será, polo menos, 2.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ Como é nulo, indica que a fila e a columna}$$

que engadimos son combinación das outras.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0 \text{ Novamente a fila e columna que engadimos son}$$

combinación das outras.

Como son 0 todos os determinantes que podemos formar a partir do que nos deu o rango 2, ese é o rango da matriz.

Non é necesario estudar que sucede cos demais determinantes de orde 3.

Teorema de Rouché-Frobenius

Un sistema de ecuacións lineais ten solución se, e só se, o rango da matriz dos coeficientes é igual ao da matriz ampliada:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \right\} \text{compatible} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(M)$$

Ademais, se os rangos son iguais ao número de incógnitas, o sistema é determinado: $\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = m$

Demostración: O teorema é evidente sen máis que considerar a definición de rango dunha matriz e o feito de que o rango poda calcularse por filas ou por columnas.

“ \Rightarrow ” Se o sistema ten solución, hai uns números que ao substituílos nas incógnitas verifican o sistema: $x_1=s_1, x_2=s_2, \dots$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}s_1 + \dots + a_{1m}s_m = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}s_1 + \dots + a_{nm}s_m = b_n \end{array} \right\}$$

O que significa que multiplicando a 1ª columna da matriz por s_1 , a 2ª por s_2, \dots e sumándolas, obtemos a columna dos termos independentes.

Dito doutro xeito, a columna dos termos independentes é combinación das demais columnas da matriz do sistema.

Como o rango non varía ao engadir unha columna linealmente dependente: $\text{rango}(A) = \text{rango}(M)$.

“ \Leftarrow ” Se os rangos son iguais, a columna dos termos independentes ten que ser combinación lineal das demais columnas. É dicir, sumando as columnas da matriz dos coeficientes multiplicadas por uns números adecuados temos que poder obter a columna dos termos independentes:

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Se facemos $x_i = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, m$ obtemos unha solución do sistema. Polo tanto o sistema é compatible.

Ademais:

Se **$\text{rango}(A)=\text{rango}(B)=\text{número de incógnitas}$** , entón o sistema é **compatible determinado**.

Demostrarémolo por redución ao absurdo. Supoñamos que existen dúas solucións diferentes: s_1, s_2, \dots, s_m e r_1, r_2, \dots, r_m

$$\text{Entón: } s_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + s_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$r_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + r_m \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Restando as igualdades anteriores:

$$(s_1 - r_1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + (s_2 - r_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + (s_m - r_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como partiamos de que eran dúas solucións distintas, necesariamente algunha das diferenzas $s_i - r_i$ ten que ser distinta de 0. Supoñamos que é a j -ésima. Despexando:

$$(s_1 - r_1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + (s_2 - r_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + (s_m - r_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = -(s_j - r_j) \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Dividindo por esa diferenza distinta de 0 cambiada de signo:

$$\frac{s_1 - r_1}{r_j - s_j} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \frac{s_2 - r_2}{r_j - s_j} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \frac{s_m - r_m}{r_j - s_j} \cdot \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Obtivemos que a columna j -ésima é combinación das demais, por tanto $\text{rango}(A) \leq m-1$ en contra das hipóteses.

Tamén se cumpre que, se o sistema ten solución única, os rangos son iguais entre si e iguais ao número de incógnitas.

Témo-las seguintes posibilidades:

- 1. $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$: Sistema compatible**
 - 1.1 $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = n^\circ$ de incógnitas: Determinado**
 - 1.2 $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \neq n^\circ$ de incógnitas: Indeterminado**
- 2. $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(B)$: Sistema incompatible**

Matrices e sistemas

Tendo en conta a definición de produto de matrices, un sistema lineal pódese escribir como un produto de matrices:

$$\left. \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cando a matriz do sistema é cadrada, se existe a matriz A^{-1} (inversa de A), podemos resolver o sistema multiplicando por ela:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B \xrightarrow{\text{asociativa}} (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \xrightarrow{\text{neutro}} X = A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Regra de Cramer

Un sistema lineal de n ecuacións e n incógnitas ten solución única se e só se o determinante da matriz do sistema non é 0.

$$\left[\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{compatible} \\ \text{determinado} \end{array} \Leftrightarrow [\det(A) \neq 0]$$

Nese caso, as solucións veñen dadas por:

$$\forall k = 1 \dots n \Rightarrow x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{k}{b_1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Exemplo:

Resolver matricialmente o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = -2 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \end{cases}$$

Escribímolos matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = -1$, o sistema ten solución única. Calculamos a inversa e multiplicamos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular o valor de x_k substituímos a columna k da matriz dos coeficientes pola columna dos termos independentes.

Demostración:

“ \Leftarrow ” Cando o sistema ten tantas ecuacións coma incógnitas, a matriz do sistema é cadrada. Se $\det(A) \neq 0$ entón existe A^{-1} (inversa de A) e, tal como vimos antes, podemos resolverlo sistema multiplicando pola inversa:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Fixémonos ademais no valor das incógnitas:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} &= \left[\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A solución obtense como un produto de matrices. x_k resulta de multiplicar os elementos da fila k da matriz A^{-1} polos termos independentes, b_i : $x_k = \frac{A_{1k} \cdot b_1 + A_{2k} \cdot b_2 + \dots + A_{nk} \cdot b_n}{\det(A)}$

O numerador desa expresión coincide co desenvolvemento do determinante da matriz que se obtén ao substituír na matriz do sistema a columna k polos termos independentes:

$$\forall k = 1 \dots n \Rightarrow x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{k}{b_1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

“ \Rightarrow ” Para demostrar que se o sistema ten solución única o determinante ten que ser non nulo só debemos aplicar o teorema de Rouché: se o sistema ten solución única, entón $\text{rang}(A) = \text{rang}(M) = n$.

$\text{Rango}(A)=n$ implica que as columnas que forman a matriz A teñen que ser independentes e, polo tanto, o determinante da matriz A ten que ser distinto de 0.

Exercicio

Estudar a compatibilidade do seguinte sistema segundo os valores de a e resolvelo cando teña máis dunha solución:

$$\begin{cases} x - ay - z = 1 \\ 2x + 3y - az = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Solución: Comprobar para que valores de a o sistema é de Cramer (ten solución única):

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 2 & 3 & -a \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + a^2 - 4 + 3 + 2a + 4a = a^2 + 6a + 5$$

$$a^2 + 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = -5 \end{cases}$$

Por tanto, terá solución única sempre que $a \neq -1$ e $a \neq -5$

Caso I ($a \neq -1$ e $a \neq -5$): O sistema é *compatible determinado*.

Caso II ($a = -1$): Estudamos os rangos da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A = 2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{rango de } M) = 2 \end{cases}$$

Neste caso o sistema é *compatible indeterminado*. Vemos que a 3ª ecuación depende das outras (sabemos que é a 3ª porque o menor de A distinto de 0, está formado pola 1ª e a 2ª filas).

Efectivamente, se $a = -1$, temos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ con $3^a = 2^a - 1^a$.

A solución podemos calculala utilizando Gauss ou Cramer transformando z nun parámetro. Debe ser z porque corresponde á columna que non se utilizou para o menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} x + y = 1 + t \\ 2x + 3y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1+t & 1 \\ 2-t & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 1 + 4t & y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+t \\ 2 & 2-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -3t \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$

Caso III ($a=-5$): Volvemos estudar os rangos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{rango de } M = 2) \end{cases}$$

O sistema é *compatible indeterminado*.

Transformamos z nun parámetro para calcula-la solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + 5y = 1 + t \\ 2x + 3y = 2 - 5t \\ z = t \end{array} \right\} x = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & 5 \\ 2-5t & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 1 - 4t \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+t \\ 2 & 2-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = t$$

$$\text{Solución : } \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$