

Exercicios de autoavaliación

1 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} -3x + 4y + 5z = 23 \\ 2x - y + 2z = -3 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos o determinante da matriz dos coeficientes: $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$

Como é distinto de 0, o sistema ten solución única. Podemos calcular o valor das incógnitas empregando a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 23 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = -3, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 23 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{8} = 1 \quad \text{e} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 4 & 23 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{8} = 2$$

Sería máis rápido calcular só x coa Regra de Cramer e logo substituír na 3ª ecuación para calcular z e en calquera das outras para calcular y

2 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} -x + y + 3z = 2 \\ 2x - y + 2z = -3 \\ 3x - y + 7z = -2 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos o determinante da matriz dos coeficientes: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Polo tanto o sistema NON ten solución única, pode ser indeterminado ou incompatible.

Para resolvelo debemos estudar os rangos e aplicar o Teorema de Rouche:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |-1| \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2 \end{cases}$$

Como o rango de A é 2 (sabemos que non é 3 pois o determinante é 0), para comprobar se o rango de M é 3 só temos que estudar o menor de orde 3 que resulta ao *ampliar* cos termos independentes o menor de orde 2 que nos deu o rango de A:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{rango de } M) = 2 \end{cases}$$

O sistema é indeterminado (os rangos son iguais e menores co número de incógnitas), transformamos en parámetros as incógnitas que non aparecen no determinante que nos deu o rango de A (neste caso só a z) e esquecemos as ecuacións que non aparecen nese determinante (neste caso a 3ª) pois non proporcionan ningunha información extra (podes comprobar que a 3ª ecuación é igual a suma da 1ª máis o dobre da 2ª):

$$\begin{cases} -x + y = 2 - 3t \\ 2x - y = -3 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

Finalmente despxamos todas as incógnitas en función dese parámetro empregando o método que consideremos máis axeitado:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -x + y = 2 - 3t \\ 2x - y = -3 - 2t \end{cases} &\xrightarrow{\text{reducción: } 2^a + 1^a} x = -1 - 5t \\ \begin{cases} -x + y = 2 - 3t \\ 2x - y = -3 - 2t \end{cases} &\xrightarrow{\text{reducción: } 2^a + 1^a + 2} -y = 1 - 8t \rightarrow y = -1 + 8t \end{aligned}$$

Son solución do sistema todos os puntos da forma:

$$\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = -1 + 8t \\ z = t \end{cases} \quad \text{Hai unha solución para cada valor de } t.$$

3 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 2x - 3y = -4 \\ 2x - 5y = -8 \end{cases}$$

Solución:

Ao tratarse dun sistema non cadrado (distinto número de ecuacións e incógnitas) debemos empezar por estudar a compatibilidade:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |4| \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2 \end{cases}$$

Comprobamos o rango de M:

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 2x - 3y = -4 \\ 2x - 5y = -8 \end{cases} M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{rango de } M) = 2 \end{cases}$$

O sistema é determinado (os rangos son iguais e iguais ao número de incógnitas), esquecemos a 3ª ecuación non necesitamos nin proporciona información extra e resolvemos o sistema empregando o método que consideremos máis axeitado:

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{reducción: } 1^a - 2^a \cdot 2} 7y = 14 \rightarrow y = 2$$

Substituíndo: $4x + 2 = 6 \rightarrow x = 1$

4 Estudia a compatibilidade segundo os valores do parámetro k do sistema:

$$\begin{cases} 2x + ky - 3z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \\ -kx + y + 4z = -3 \end{cases}$$

Solución:

Empezamos por comprobar para que valores de k o sistema é de Cramer (compatible determinado).

$$\begin{aligned} & \left[\begin{cases} 2x + ky - 3z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \\ -kx + y + 4z = -3 \end{cases} \right] \begin{matrix} \text{compatible} \\ \text{determinado} \end{matrix} \Leftrightarrow [\det(A) \neq 0] \\ & \left(\begin{vmatrix} 2 & k & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix} \right) = 16 - k^2 - 3 - 6k - 2 - 4k = -k^2 - 10k + 11 \\ & -k^2 - 10k + 11 = 0 \Rightarrow k = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 11}}{2 \cdot (-1)} = \frac{10 \pm 12}{-2} = \begin{cases} k_1 = -11 \\ k_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Caso I ($k \neq -11$ e $k \neq 1$): $\det(A) \neq 0$. O sistema é compatible determinado.

Caso II ($k = -11$): Estudamos os rangos da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

Como $\det(A) = 0$, o rango de A ten que ser menor de 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -11 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |2| = 2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 2 & -11 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 11 = 15 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2 \end{cases}$$

Como o rango de A é 2, para comprobar se o rango de M é 3 só temos que estudar o menor de orde 3 que resulta ao *orlar* cos termos independentes o menor de orde 2 que nos deu o rango de A:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -11 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 11 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 2 & -11 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 11 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 180 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } M) = 3 \end{cases}$$

O sistema é incompatible (os rangos son diferentes).

Caso III (k=1): Volvemos estudar os rangos.

Como $\det(A) = 0$, o rango de A ten que ser menor de 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |2| = 2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2 \end{cases}$$

Comprobamos se o rango de M é 3 *orlando* coa columna dos termos independentes o menor de orde 2 que nos deu o rango de A:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\text{rango de } M) = 2 \end{cases}$$

O sistema é compatible indeterminado.

5 Estudar a compatibilidade do seguinte sistema en función dos parámetros a e b :

$$\begin{cases} x + ay - az = 3 \\ ax - y + az = 2 \\ -ax - y + z = b \end{cases}$$

Solución: Investigamos cando a matriz dos coeficientes ten determinante distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -a \\ a & -1 & a \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^3 + a^2 + a^2 - a^2 + a = -a^3 + a^2 + a - 1$$

$$-a^3 + a^2 + a - 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad -a^3 + a^2 + a - 1 = (a-1) \cdot (-a^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Caso I ($a \neq 1$ e $a \neq -1$): O sistema é compatible determinado ($\det(A) \neq 0$).

Caso II ($a=1$): Estudamos os rangos da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

$$(\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & b \end{vmatrix} = -2b - 6 \Rightarrow \begin{cases} -2b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -3 & (\text{rango de } M = 2) \\ -2b - 6 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -3 & (\text{rango de } M = 3) \end{cases}$$

Se $b=-3$ o sistema é *compatible indeterminado* e, se $b \neq -3$, o sistema é *incompatible*.

Caso III ($a=-1$): Volvemos estudar os rangos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

$$(\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & b \end{vmatrix} = -2b + 6 \Rightarrow \begin{cases} -2b + 6 = 0 \Leftrightarrow b = 3 & (\text{rango de } M = 2) \\ -2b + 6 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 3 & (\text{rango de } M = 3) \end{cases}$$

Se $b=3$, os rangos son iguais pero menores co número de incógnitas: o sistema é compatible indeterminado

Se $b \neq 3$ é incompatible.

Resumimos:

- i) Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$ o sistema é compatible determinado calquera que sexa o valor de b .
- ii) Se $a=1$ e $b=-3$ o sistema é *compatible indeterminado*
e se $b \neq -3$, o sistema é *incompatible*.
- iii) Se $a = -1$ e $b=3$, o sistema é *compatible indeterminado*
e se $b \neq 3$ é *incompatible*.

6 Estudar para que valores de k son independentes os vectores $(k,1,1)$, $(1,k,1)$ e $(1,1,k)$

Solución:

Son independentes a única combinación lineal deles que dea o vector $(0,0,0)$ é a que resulta de multiplicalos todos por 0. Ou, o que é o mesmo, se é compatible determinado o sistema:

$$x(k,1,1) + y(1,k,1) + z(1,1,k) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2$$

$$k^3 - 3k + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} -2 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & -2 & 4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \quad k^3 - 3k + 2 = (k+2) \cdot (k^2 - 2k + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k+2=0 \Rightarrow k=-2 \\ k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k=1 \end{cases}$$

Os vectores son independentes cando $k \neq -2$ e $k \neq 1$ (fíxate que ao ser o sistema homoxéneo non é necesario estudar a compatibilidade -sempre é compatible-).

7 Discutir e resolver, segundo o valor de a , o sistema:

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 1 \\ x + (1+a)y + z = (1+a) \\ x + y + (1+a)z = (1+a)^2 \end{cases}$$

Solución:

Comezamos por indagar cando a matriz dos coeficientes ten determinante distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1+3a+3a^2+a^3) + 1+1-1-a-1-a-1-a = a^3 + 3a^2$$

$$a^3 + 3a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2(a+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ a+3 = 0 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

Caso I ($a \neq 0$ e $a \neq -3$): O sistema é compatible determinado (Rango M = Rango A = 3).

A solución virá dada pola Regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1+a & 1 \\ (1+a)^2 & 1 & 1+a \end{vmatrix}}{a^3 + 3a^2} = \frac{-a^3 - 2a^2}{a^3 + 3a^2} = \frac{-a-2}{a+3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & (1+a)^2 & 1+a \end{vmatrix}}{a^3 + 3a^2} = \frac{a^2}{a^3 + 3a^2} = \frac{1}{a+3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1+a \\ 1 & 1 & (1+a)^2 \end{vmatrix}}{a^3 + 3a^2} = \frac{a^4 + 4a^3 + 4a^2}{a^3 + 3a^2} = \frac{a^2 + 4a + 4}{a+3}$$

Caso II (a=0): Estudamos os rangos da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{rango de } A = 1) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{rango de } M = 1)$$

O sistema é compatible indeterminado. O grao de indeterminación é 2, só podemos despxar unha das incógnitas en función das outras:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array} \right\}$$

Caso III (a=-3): Volveremos estudar os rangos.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } A) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (\text{rango de } M) \geq (\text{rango de } A) = 2 \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow (\text{rango de } M = 3) \end{cases}$$

Se a=-3 o sistema é incompatible.