

# Unidade 2: Matrizes e determinantes

## Programa:

- 1 Determinante dunha matriz cadrada.
  - 1.1 Determinante de orde 2.
  - 1.2 Determinante de orde 3. Regra de Sarrus.
  - 1.3 Desenvolvimento do determinante de orde  $n$ .
  - 1.4 Propiedades dos determinantes.
- 2 Rango dunha matriz
  - 2.1 Definición.
  - 2.2 Cálculo do rango dunha matriz.
- 3 Inversa dunha matriz cadrada. Cálculo

## Determinante dunha matriz cadrada

### Determinantes.

O concepto de determinante non é tan “artificial” como pode parecer.

Queremos atopar un método que nos permita pescudar se unha matriz cadrada ten inversa e, en caso afirmativo, calculala.

Vexamos como para o caso de matrices 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{cases}$$

Dividimos ese sistema en dous sistemas 2x2 e resolvémolos por redución:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{cases}$$

1º Sistema:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{11} = a_{22}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{21} = -a_{21}$$

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

2º Sistema:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{12} = -a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{22} = a_{11}$$

$$x_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Queda:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Para que esa matriz exista, ten que ser  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  (que é o **determinante da matriz A**).

Unha matriz ten inversa cando o seu determinante é distinto de 0.

**Matrices 2x2:** Chamarémoslle determinante dunha matriz cadrada de orde 2x2 ao número obtido pola seguinte expresión:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

**Matrices 3x3:** No caso de matrices 3x3, o determinante é máis complicado:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Fíxate que en cada produto hai un termo de cada fila, situado en diferente columna. Para lembrar máis facilmente esa expresión utilízase, entre outros recursos, a **Regra de Sarrus**:

Productos positivos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Productos negativos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Para calcular o determinante só queda sumar os produtos.

**Caso xeral:** Podemos calcular o determinante dunha matriz desenvolvéndoo polos elementos dunha fila ou dunha columna. Para a columna  $k$  sería:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik}$$

Onde  $A_{ik}$  é o determinante da matriz que resulta ao suprimir a fila  $i$  e a columna  $k$  multiplicado por  $(-1)^{i+k}$ .  $A_{ik}$  chámase **adxunto** de  $a_{ik}$ .

## Propiedades dos determinantes

Por simplificar a notación, escribimos algunhas das propiedades para matrices 2x2 ou 3x3, pero que son válidas para calquera matriz cadrada.

- **O determinante dunha matriz é igual ó da súa trasposta:**

$$\det(A) = \det(A^t)$$

En consecuencia, tódalas propiedades dos determinantes que fan referencia ás filas, tamén son válidas para as columnas, e viceversa.

- **Multilinealidade:**

1. O determinante dunha matriz que ten unha columna suma doutras dúas, é igual á suma dos determinantes das matrices nas que esa columna está formada por cada un dos sumandos:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2. O determinante dunha matriz cunha columna multiplicada por un número é igual ao determinante da matriz multiplicado por ese número:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

As seguintes propiedades son consecuencia da multilinealidade dos determinantes:

- **O determinante dunha matriz cunha columna (ou fila) de ceros, é 0:**

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- **O determinante dunha matriz con dúas columnas (ou filas) iguais, é 0:**

$$\det \begin{pmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

- O determinante dunha matriz que ten unha columna combinación lineal das demais, é 0:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha a_{11} + \beta a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha a_{21} + \beta a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha a_{31} + \beta a_{32} \end{pmatrix} = 0$$

Consecuencia desta propiedade é que podemos utilizar os determinantes para estudar a dependencia ou independencia dun conxunto de vectores.

- O determinante dunha matriz non varía se a unha columna se lle suma unha combinación lineal das demais:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + (\alpha a_{11} + \beta a_{12}) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + (\alpha a_{21} + \beta a_{22}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + (\alpha a_{31} + \beta a_{32}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

## Rango dunha matriz

Podemos considerar as filas dunha matriz  $n \times m$  como un conxunto de  $n$  vectores de  $\mathbb{R}^m$  (ou as columnas como  $m$  vectores de  $\mathbb{R}^n$ ).

O **rango** dunha matriz é o número de filas (consideradas como vectores) linealmente independentes.

Como coincide co número de columnas linealmente independentes, o rango é o número de filas ou columnas independentes.

### Exemplo:

Estudio do rango dunha matriz por menores.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Eliximos un menor (determinante dunha submatriz) de orde 1 distinto de 0:  $|1| \neq 0$

2. Ampliamos ese menor a un de orde 2:  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

3. Seguimos ampliando:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}} 0$$

4. Como resultou ser nulo, ampliamos o menor anterior doutro xeito diferente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}} 24 \neq 0$$

Xa non podemos ampliar a un menor de orden 4 (pois ó hai tres filas), o rango é 3 (orde do maior menor non nulo).

## Inversa dunha matriz cadrada

Como xa se indicou para as matrices de orde  $2 \times 2$ , unha matriz ten inversa se e só se o seu determinante é distinto de 0.

Existen varios métodos para o cálculo da matriz inversa, aquí só utilizaremos o chamado “por adxuntos”.

A inversa dunha matriz  $A$  de orde  $n \times n$  é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Onde o elemento  $A_{ij}$  é o adxunto de  $a_{ij}$

O proceso a seguir é o seguinte:

1. Calcúlase o determinante. Se  $\det(A)=0$  a matriz non ten inversa. Se  $\det(A) \neq 0$ , continuamos:
2. Obtense a matriz trasposta:  $A^t$ .
3. Calcúlase a matriz adxunta, formada polos adxuntos, da matriz trasposta.
4. A inversa é a matriz adxunta da trasposta dividida entre o determinante.

Os pasos 2 e 3 poden intercambiarse.

### **Exemplo:**

1. Cálculo da matriz inversa dunha matriz 3x3.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Comprobamos que o determinante é distinto de 0:

$$|A| = -2 \neq 0$$

3. Calculamos a trasposta:

$$A^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Calculamo-la adxunta da traspos-ta:

$$\text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Xa só queda multiplicar polo inverso do determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Comprobamos:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$