

Matrices

Unha matriz é un conxunto de números agrupados en filas e columnas representarémola por $(a_{ij})_{n \times m}$ onde n é o número de filas e m o de columnas. A matriz anterior será $(a_{ij})_{4 \times 3}$. Designamos por a_{ij} onde i indica a fila e j a columna o elemento da matriz que ocupa ese lugar.

Chámase **diagonal** dunha matriz aos elementos que teñen iguais os índices do lugar que ocupan.

- **Cadradas:** Cando teñen tantas filas coma columnas.
- **Matriz fila:** Cando só teñen unha fila.
- **Matriz columna:** Formada por unha soa columna.
- **Matriz diagonal:** A que ten tódolos elementos iguais a 0 agás os da diagonal. Un caso especial de matriz diagonal é chamaremos matriz identidade.
- **Matriz triangular superior:** Aquela na que ten tódolos elementos situados por debaixo da diagonal son 0.
- **Matriz triangular inferior:** Aquela na que ten tódolos elementos situados por enriba da diagonal son 0.
- **Matriz trasposta:** A trasposta dunha matriz é outra matriz que se obtén cambiando as filas polas columnas.

Operacións con matrices

- **Suma de dúas matrices:** A suma de dúas matrices $(a_{ij})_{n \times m}$ e $(b_{ij})_{n \times m}$ é outra matriz, $(a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}$, na que cada elemento novo é a suma dos elementos correspondentes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Para poder sumar dúas matrices, teñen que ser da mesma orde. A matriz suma terá tamén esa orde.

- **Produto dunha matriz por un escalar (número):** Para multiplicar unha matriz $(a_{ij})_{n \times m}$ por un número α , multiplícase cada elemento da matriz polo número, $\alpha \cdot (a_{ij})_{n \times m} = (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m}$:

$$\alpha \cdot (a_{ij}) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

As anteriores operacións, suma de matrices e produto por escalares, teñen as mesmas propiedades que nos vectores (de feito son un tipo particular de vectores):

- **Produto de matrices:** o produto de $A = (a_{ij})_{n \times m}$ por $B = (b_{ij})_{m \times r}$ é a matriz, na que o elemento i,j calcúlase multiplicando cada elemento da fila i de A polo correspondente da columna j de B e logo sumando os produtos. $A \cdot B = (a_{ij})_{n \times m} \cdot (b_{ij})_{m \times r} = \left(\sum_k a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{n \times r}$

Para poder multiplicar dúas matrices, o número de columnas da primeira ten que ser igual ao de filas da segunda. Ao multiplicar unha matriz de orde $n \times m$ e outra de orde $m \times r$, a matriz produto será de orde $n \times r$.

Propiedades

Esas operacións verifican moitas das propiedades das operacións de números:

- **Suma: asociativa da suma, conmutativa da suma, neutro da suma** (a matriz que ten todos os seus elementos 0), **oposta** (a oposta dunha matriz $(a_{ij})_{n \times m}$ é a matriz que ten por elementos os opostos correspondentes $(-a_{ij})_{n \times m}$). A suma de matrices é similar á suma de números.
- **Producto: asociativa** (lembrar que temos que poder encadear n° de columnas dunha matriz con n° de filas da seguinte, **neutro** (só no caso de matrices cadradas, o neutro é a matriz identidade), en xeral o produto de matrices **non é conmutativo** (na maioría das ocasións non terá sequer sentido falar de conmutatividade, xa que as matrices só se poden multiplicar dun xeito e, mesmo cando se podan multiplicar polos dous lados, os produtos serán, en xeral, diferentes) e, en xeral, tampouco existirá **inversa** (novamente só podemos falar de inversa para matrices cadradas pero, incluso nas matrices cadradas, unha matriz pode non ter inversa)

O produto de matrices non é a primeira operación non conmutativa coa que te atopas (a resta tampouco o é) o que determina que propiedades que das por certas non o sexan.

- **Outras propiedades** que si verifican son: **distributiva da suma de matrices en relación ao produto por escalares, distributiva da suma de números en relación ao produto dunha matriz por un número, asociativa do produto de números por matrices e unidade no produto dunha matriz por un número**:

Matrices e ecuacións.

Podemos expresar un sistema de ecuacións lineais:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array} \right\}$$

Como unha igualdade entre un produto de matrices e unha matriz columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

En realidade, o produto de matrices ideouse dese xeito para, precisamente, poder expresar os sistemas de ecuacións lineais.