Exercicios de autoavaliación

1) Dúas matrices A e B conmutan se A·B=B·A. Obter as matrices triangulares $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que conmutan coa matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) É certa a igualdade $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sendo A e B matrices?

3) É certa a igualdade $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$ sendo A e B matrices?

4) (selectividade) Demostre que a matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ verifica unha ecuación do tipo $\mathbf{A}^2 + \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{I} = \mathbf{0}$, determinando α e β (I denota a matriz identidade). Utilice este feito para calcular a inversa de A.

5) (selectividade) Considera dúas matrices A e B que verifican $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ e que $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcula a matriz $A^2 - B^2$.

6) (selectividade) Determina $\boldsymbol{A^4}$ sabendo que $\boldsymbol{A=P^{-1}\cdot D\cdot P}$, sendo

$$P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) (selectividade) Dada a matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Razoa se pode existir unha matriz B tal que A·B=I, sendo I a matriz identidade; en caso afirmativo, calcula B. Ten inversa A? Razoa as túas respostas.

8) No instituto organizáronse catro grupos de 30 alumnos cada un para a realización de actividades extraescolares. Tense observado que un 80% dos que asisten un día á súa actividade, asisten tamén ao día seguinte, mentres que soamente un 40% dos que faltaron un día asisten o día seguinte. Ao comezar o trimestre no grupo A asisten 25 alumnos, 30 no B, 0 no C, e 20 no D.

a) Escribe, para cada grupo, a expresión para calcular os alumnos que asisten e os que non asisten ao segundo día, empregando a linguaxe matricial.

b) Calcula os asistentes e non asistentes en cada grupo o terceiro día.

c) Cantos asistirán e cantos non, previsiblemente, a cada actividade o quinto día?

d) Cal será o número de asistentes en cada grupo a medida que vaia avanzando a actividade? Busca un método xeral para calculalo.

(Emprega unha calculadora que permita multiplicar matrices, ou o ordenador)

Solucións aos exercicios de autoavaliación

1. Dúas matrices A e B conmutan se A·B=B·A. Obter as matrices triangulares $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que conmutan coa matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolución:

$$\text{a)}\quad A\cdot B=B\cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Facendo os productos e igualando as compoñentes queda:

$$\begin{pmatrix} a-b & 3a+2b \\ -c & 2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b+3d \\ -a & -b+2c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=a \\ 3a+2b=b+3d \\ -c=-a \\ 2c=-b+2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=d \\ a=c \end{cases}$$

2. É certa a igualdade $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ sendo A e B matrices?

Resolución: $(A+B)\cdot(A-B)=A\cdot(A-B)+B\cdot(A-B)=A^2-A\cdot B+B\cdot A-B^2$.

Para que fose certa tería que coincidir AB con BA, cousa que soamente estaría garantida no caso de ser conmutativo o produto e, como sabemos, nas matrices en xeral non o é.

3. É certa a igualdade $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$ sendo A e B matrices?

Resolución: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^2$.

Para que a "suma por diferenza" fose "diferenza de cadrados" tería que anularse –AB+BA , cousa que soamente pode facerse no caso de ser conmutativo o produto e, como sabemos, nas matrices en xeral non o é.

A expresión "suma por diferenza igual a diferenza de cadrados", nas matrices, en xeral é falsa.

4. (selectividade) Demostre que a matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$ verifica unha ecuación do tipo $\mathbf{A}^2+\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{I}=\mathbf{0}$, determinando α e β (I denota a matriz identidade). Utilice este feito para calcular a inversa de A.

Resolución: formulamos a ecuación e calculamos, se é posible, α e β.

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^2+\alpha\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (fíxate que o 0 que aparece na ecuación, ten que ser a matriz 0 e non o número 0).

$$\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{componentes}]{\text{sumando e igualando por}}\left.\begin{array}{r}5+2\alpha+\beta=0\\ 4+\alpha=0\\ 4+\alpha=0\\ 5+2\alpha+\beta=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{resolvendo}}\begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=3\end{cases}$$

Por tanto, a matriz si verifica esa ecuación. Só queda empregar ese feito para atopar a inversa.

Lembremos que a inversa debe verificar que, multiplicada por A , debe dar a matriz identidade I. Observando a ecuación semella que podemos establecer esa relación cos termos que aparecen nela:

$$A^2+\alpha A+\beta I=0\rightarrow A^2+\alpha A=0-\beta I\xrightarrow[\text{factor común}]{\text{sacando A}}A\cdot(A+\alpha I)=-\beta I\xrightarrow{\text{dividindo por -}\beta}A\cdot\left(\frac{A+\alpha I}{-\beta}\right)=I$$

A matriz $\frac{A+\alpha I}{-\beta}$ ten que ser a inversa de A pois ao multiplicalas da a identidade.

$$\frac{A+\alpha I}{-\beta}=\frac{\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{-3}=\begin{pmatrix}2/3 & -1/3\\ -1/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

5. (selectividade) Considera dúas matrices A e B que verifican $A+B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$ e que $A-B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ Calcula a matriz A^2-B^2.

Resolución: poderiamos estar tentados de simplemente multiplicar as matrices que aparecen no enunciado pois é sabido que, con números, $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$. Porén, xa comprobamos no exercicio terceiro que, en xeral, non vai selo con matrices.

Debemos resolver o problema doutro xeito, calculando A e B por exemplo:

$$\left.\begin{array}{l}A+B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}\\ A-B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{as ecuacións}]{\text{sumando}}2A=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 6 & 0\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}5/2 & 5/2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{despexando}]{\text{substituindo e}}B=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

Por tanto: $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 31/2 & 13/2 \\ 11/2 & 19/2 \end{pmatrix}$

6. (selectividade) Determina $\boldsymbol{A^4}$ sabendo que $\boldsymbol{A=P^{-1}\cdot D\cdot P}$, sendo $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución: poderiamos calcular A e logo multiplicala por sigo mesmo catro veces, pero intentemos antes desenvolver ese produto por se podemos simplificalo un pouco:

$$A^4 = \left(P^{-1}\cdot D\cdot P\right)^4 = \left(P^{-1}\cdot D\cdot P\right)\cdot\left(P^{-1}\cdot D\cdot P\right)\cdot\left(P^{-1}\cdot D\cdot P\right)\cdot\left(P^{-1}\cdot D\cdot P\right)$$

Como o produto de matrices é asociativo, podemos ir agrupando eses factores de dous en dous como nos resulte máis doado (sen cambiar a orde):

$$A^4 = P^{-1}\cdot D\cdot\left(P\cdot P^{-1}\right)\cdot D\cdot\left(P\cdot P^{-1}\right)\cdot D\cdot\left(P\cdot P^{-1}\right)\cdot D\cdot P \overset{P^{-1}\cdot P=I}{=} P^{-1}\cdot D^4\cdot P$$

Empecemos pois calculando D^4:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow D^4 = D^2\cdot D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En realidade non era necesario facer o segundo produto, basta decatarse de que ao ser diagonal a matriz, só hai que elevar á cuarta os elementos da diagonal.

Calculemos a inversa de P (en próximas unidades veremos un procedemento para facelo de xeito máis doado, pero é importante que entendas que sempre poderás transformar unha ecuación matricial nun sistema numérico desenvolvendo as expresións e igualando compoñente a compoñente):

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{igualando}]{\text{multiplicando e}} \left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}z = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}w = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}w = 1 \end{array}\right\}$$

É un sistema de catro ecuacións e catro incógnitas pero pode separarse en dous sistemas de dúas ecuacións e dúas incógnitas cada un:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}z=1\\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{e sumando as ecuacións}]{\text{multiplicando a 2ª por } -\sqrt{3}}-2z=1\rightarrow z=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{substituindo na 2ª}}\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{4}=0\rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}w=0\\ \frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}w=1\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{e sumando as ecuacións}]{\text{multiplicando a 2ª por } -\sqrt{3}}-2w=-\sqrt{3}\rightarrow w=\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{\text{substituindo na 2ª}}\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}=1\rightarrow y=\frac{1}{2}$$

O produto pedido será:

$$\left[\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{16}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{49}{4} & -\frac{15\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{15\sqrt{3}}{4} & \frac{19}{4}\end{pmatrix}$$

7. (selectividade) Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Razoa se pode existir unha matriz B tal que A·B=I, sendo I a matriz identidade; en caso afirmativo, calcula B.
   Ten inversa A? Razoa as túas respostas.

Resolución: A é unha matriz 2x3, podemos pensar en multiplicar por unha matriz 3x2 para obter a matriz identidade 2x2:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=1\\ 2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=0\\ \boldsymbol{c}=0\\ \boldsymbol{d}=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{a}=½\\ \boldsymbol{b}=-½\end{cases}$$

non importando cales podan ser os valores de ***e*** e ***f***.
A matriz A non ten inversa, xa que non é cadrada.

8) No instituto organizáronse catro grupos de 30 alumnos cada un para a realización de actividades extraescolares. Tense observado que un 80% dos que asisten un día á súa actividade, asisten tamén ao día seguinte, mentres que soamente un 40% dos que faltaron un día asisten o día seguinte. Ao comezar o trimestre no grupo A asisten 25 alumnos, 30 no B, 0 no C, e 20 no D.

a. Escribe, para cada grupo, a expresión para calcular os alumnos que asisten e os que non asisten ao segundo día, empregando a linguaxe matricial.
b. Calcula os asistentes e non asistentes en cada grupo o terceiro día.
c. Cantos asistirán e cantos non, previsiblemente, a cada actividade o quinto día?
d. Cal será o número de asistentes en cada grupo a medida que vaia avanzando a actividade? Busca un método xeral para calculalo.

Resolución: comezamos por realizar uns cálculos concretos, organizándoos nunha táboa:

GRUPO A

Día	Asisten	Faltan
1º	25	5
2º	0´8·25 + 0´4·5 = 22	0´2·25 + 0´6·5 = 8
3º	0´8·22 + 0´4·8 =	0´2·22 + 0´6·8 =

Que traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix}$
3º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix}$
4º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20'8 \\ 9'2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'32 \\ 9'68 \end{pmatrix}$
5º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20'32 \\ 9'68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20'128 \\ 9'872 \end{pmatrix}$
...	.....
nº	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

GRUPO B

Día	Asisten	Faltan
1º	**30**	**0**
2º	**0´8·30 + 0´4·0 = 24**	**0´2·30 + 0´6·0 = 6**
3º	**0´8·24 + 0´4·6 =**	**0´2·22 + 0´6·6 =**

Que traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$
...	**.....**
nº	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^{n} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

GRUPO C

Día	Asisten	Faltan
1º	0	30
2º	0´8·0 + 0´4·30 = 12	0´2·0 + 0´6·30 = 18
3º	0´8·12 + 0´4·18 =	0´2·12 + 0´6·18 =

Que traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$
...	.....
nº	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

GRUPO D

Día	Asisten	Faltan
1º	20	10
2º	0´8·20 + 0´4·10 = 20	0´2·20 + 0´6·10 = 10
3º	0´8·20 + 0´4·10 =	0´2·20 + 0´6·10 =

Que traducido a linguaxe matricial:

1º	$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$
2º	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$
...	.....
nº	$\begin{pmatrix} 0'8 & 0'4 \\ 0'2 & 0'6 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$