

Unidade 1: Matrices

Programa:

- 1 Matrices $n \times m$.
 - 1.1 Definición de matriz $n \times m$.
 - 1.2 Tipos de matrices. Matrices cadradas
 - 1.3 Suma de matrices.
 - 1.4 Produto dunha matriz por un número.
- 2 Produto de matrices.
 - 2.1 Definición de produto de matrices.
 - 2.2 Propiedades do produto de matrices.
 - 2.3 Inversa dunha matriz cadrada.

Matrices e números

Suma de dúas matrices: A suma de dúas matrices $(a_{ij})_{n \times m}$

e $(b_{ij})_{n \times m}$ é outra matriz, $(a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}$, na que cada elemento novo é a suma dos elementos correspondentes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Para poder sumar dúas matrices, teñen que ser da mesma orde. A matriz suma terá tamén esa orde.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Produto dunha matriz por un escalar (número): Para

multiplicar unha matriz $(a_{ij})_{n \times m}$ por un número α , multiplícase cada elemento da matriz polo número, $\alpha \cdot (a_{ij})_{n \times m} = (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m}$:

$$\alpha \cdot (a_{ij}) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -9 \\ -15 & -12 \end{pmatrix}$$

As anteriores operacións, suma de matrices e produto por escalares, teñen as mesmas propiedades que nos vectores (de feito son un tipo particular de vectores):

Asociativa da suma:

$$(a_{ij})_{n \times m} + [(b_{ij})_{n \times m} + (c_{ij})_{n \times m}] = (a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij} + c_{ij})_{n \times m}$$

$$(a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{n \times m} \underset{\uparrow}{=} ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{n \times m} =$$

asociativa dos n^{os} reais

$$(a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} + (c_{ij})_{n \times m} = [(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m}] + (c_{ij})_{n \times m}$$

Conmutativa da suma:

$$(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m} = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} \underset{\uparrow}{=} (b_{ij} + a_{ij})_{n \times m} = (b_{ij})_{n \times m} + (a_{ij})_{n \times m}$$

conmutativa
suma dos reais

Neutro da suma: O neutro da suma de matrices é a matriz que ten todos os seus elementos nulos:

$$(a_{ij})_{n \times m} + (0)_{n \times m} = (a_{ij} + 0)_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m}$$

Toda matriz ten oposta: A oposta dunha matriz $(a_{ij})_{n \times m}$ é a matriz que ten por elementos os opostos correspondentes $(-a_{ij})_{n \times m}$:

$$(a_{ij})_{n \times m} + (-a_{ij})_{n \times m} = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{n \times m} = (0)_{n \times m}$$

Distributiva da suma de matrices en relación ao produto por escalares:

$$\alpha \cdot [(a_{ij})_{n \times m} + (b_{ij})_{n \times m}] = \alpha \cdot (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} = (\alpha \cdot (a_{ij} + b_{ij}))_{n \times m} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{distributiva da suma de } n^{\text{os}} \text{ reais}}}{=} \\ (\alpha \cdot a_{ij} + \alpha \cdot b_{ij})_{n \times m} = (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m} + (\alpha \cdot b_{ij})_{n \times m} = \alpha \cdot (a_{ij})_{n \times m} + \alpha \cdot (b_{ij})_{n \times m}$$

Distributiva da suma de números en relación ao produto dunha matriz por un número:

$$(\alpha + \beta) \cdot (a_{ij})_{n \times m} = ((\alpha + \beta) \cdot a_{ij})_{n \times m} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{distributiva da suma de } n^{\text{os}} \text{ reais}}}{=} (\alpha \cdot a_{ij} + \beta \cdot a_{ij})_{n \times m} \\ (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m} + (\beta \cdot a_{ij})_{n \times m} = \alpha \cdot (a_{ij})_{n \times m} + \beta \cdot (a_{ij})_{n \times m}$$

Asociativa do produto de números por matrices:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot (a_{ij})_{n \times m} = ((\alpha \cdot \beta) \cdot a_{ij})_{n \times m} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{asociativa do produto de } n^{\text{os}} \text{ reais}}}{=} (\alpha \cdot (\beta \cdot a_{ij}))_{n \times m} = \alpha \cdot (\beta \cdot a_{ij})_{n \times m}$$

Existencia de unidade no produto dunha matriz por un número:

$$1 \cdot (a_{ij})_{n \times m} = (1 \cdot a_{ij})_{n \times m} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{existencia de unidade no produto de números}}}{=} (a_{ij})_{n \times m}$$

Producto de matrices

Definimos o produto de $A = (a_{ij})_{n \times m}$ por $B = (b_{ij})_{m \times r}$ como a matriz, na que o elemento i, j calcúlase multiplicando cada elemento da fila i de A polo correspondente da columna j de B e logo sumando os produtos.

$$A \cdot B = (a_{ij})_{n \times m} \cdot (b_{ij})_{m \times r} = \left(\sum_k a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{n \times r}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6+3+5 & 3+0+0 \\ 14+27+2 & 7+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 43 & 7 \end{pmatrix}$$

A matriz A é 2×3 e a B é 3×2 . A matriz produto $A \cdot B$ é 2×2

Para poder multiplicar dúas matrices, o número de columnas da primeira ten que ser igual ao de filas da segunda.

Ao multiplicar unha matriz de orde $n \times m$ e outra de orde $m \times r$, a matriz produto será de orde $n \times r$.

Propiedades:

- **Asociativa:** O produto de matrices é **asociativo**.

Lémbrese que temos que poder encadear nº de columnas dunha matriz con nº de filas da seguinte (*).

Neutro: Só ten senso falar de neutro do produto de matrices no caso de matrices cadradas. Neste caso, o neutro é a matriz identidade:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- En xeral o **produto de matrices non é conmutativo**.

Na maioría das ocasións non terá sequera sentido falar de conmutatividade, xa que as matrices só se poden multiplicar dun xeito (*). E mesmo cando se podan multiplicar polos dous lados (se unha for de orde $n \times m$ e a outra de orde $m \times n$, ou sendo cadradas) os seus produtos serán, en xeral, diferentes.

O produto de matrices non é a primeira operación non conmutativa coa que te atopas (a resta tampouco o é) o que determina que propiedades que das por certas non o sexan.

- **Inversa:** Novamente só podemos falar de inversa para matrices cadradas.

En xeral, unha matriz cadrada non ten inversa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 10 \\ 51 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 34 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_3 = 1 \\ 6x_1 + 3x_3 = 0 \\ 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ 6x_2 + 3x_4 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{1^a \ 2^a}{2 \ 3} \rightarrow 0 = 1 \\ \frac{3^a \ 4^a}{2 \ 3} \rightarrow 0 = 1 \end{array}$$

A matriz non ten inversa.

Matrices e ecuacións.

Considera o sistema de ecuacións lineais:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array} \right\}$$

Comprobarás facilmente que podemos representalo como unha igualdade entre un produto de matrices e unha matriz columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

En realidade, o produto de matrices ideouse dese xeito para, precisamente, poder expresar os sistemas de ecuacións lineais.

Linguaxe matricial.

As matrices proporcionan un xeito sinxelo de describir relacións entre varias magnitudes. Exemplo:

Investimos unha certa cantidade a un interese do 5% anual. A comisión que nos cobra a axencia de investimento é do 3% dos nosos beneficios, e a Facenda reténnos o 20% deles.

Podemos calcular as diferentes cantidades coas expresións:

- Beneficios: $0'05 \cdot C$ (C é o capital investido)
- Porcentaxe da axencia: $0'03 \cdot 0'05 \cdot C = 0'0015 \cdot C$
- IRPF: $0'2 \cdot 0'05 \cdot C = 0'01 \cdot C$

As matrices permiten xuntar nunha soa fórmula as tres anteriores:

$$(B \quad A \quad I) = (0'05 \quad 0'0015 \quad 0'01) \cdot C$$

E se facemos tres investimentos diferentes, cada un con rendibilidade, comisións e retención da Facenda, propios?

Novamente a linguaxe matricial permítenos expresalo de forma sinxela:

$$(B \quad A \quad I) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$