Unidade 9. A Integral

1. Función primitiva

Dicimos que *F* é unha **función primitiva ou primitiva** de *f* se *F ' (x)* = *f*(x). Polo tanto, intentamos reconstruír unha función F a *partir do* coñecemento da súa derivada *f*.

Por exemplo , como $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$ é unha función primitiva de f(x) = x . Tamen $(sen\ x)' = \cos x \Rightarrow F(x) = senx$ é unha primitiva de *f(x) = cos x* . Observa que agora o procedemento é máis complexo que a derivación, pois hai que retroceder usando como guía as regras da devandita operación.

Antes de sistematizar o cálculo de primitivas debemos facer notar que a primitiva non é única, é dicir, se sumamos unha constante calquera á primitiva, esta segue sendo primitiva da mesma función:
$\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)' = x$; $(sen\ x - 7)' = \cos x$. Por iso escribiremos sempre F(*x*) + *k*, *k* ∈ $\mathfrak{R}$.
Obviamente, *k* designa a constante. Esta constante ten distintas interpretacións, e toma diferentes valores, dependendo do contexto en que apareza a primitiva.
Podemos escribir nunha táboa aquelas primitivas que se obteñen directamente da táboa de derivadas:

Función	Primitiva
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\cos x$	$sen\ x$
$sen\ x$	$-\cos x$
e^x	e^x
$1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\ x$

Observa que a primeira primitiva non é máis que o resultado da regra . Como a derivada baixa o grao do expoñente nunha unidade, ao ir cara a atrás teremos que sumarllo, e como o expoñente aparece multiplicando ao derivar, haberá que dividir ao retroceder:

$$(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow x^2 = \left(\frac{x^3}{3}\right)' ;\ \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right)'$$

A fórmula serve tamén para expoñentes negativos e fraccionarios, salvo para o caso *n* = -1. Decátate de que se n=-1 ,a función é f(x) = $\frac{1}{x}$ que procede de derivar F(x) = ln x. Se intentas aplicar a fórmula neste caso quedariache como primitiva $\frac{x^0}{0}$ que non é válida.

2. Integral indefinida. Integrais inmediatas

A partir da idea de función primitiva podemos definir a operación integración como inversa da derivación, no sentido da composición de funcións pois, o que unha fai, a outra desfaino:

$$\frac{x^2}{2} \underset{I}{\overset{D}{\rightleftarrows}} x$$

Non obstante, a situación non é tal e como aparece no gráfico porque, como vimos, a primitiva non é única. Por iso non volvemos exactamente á función de partida, senón a unha familia de funcións que difiren nun valor constante.

Aínda que no gráfico representamos a **integral indefinida** coa súa inicial *I*, non se fai así na práctica. Por razóns que veremos máis adiante, úsase o símbolo $\int$, que representa unha S alongada. Escribiremos a relación entre a función e a súa primitiva como $\int f = F + k$ *ou* $\int f(x)dx$ = F(*x*) + *k*.

O termo *dx* (que se le *diferencial de x*) indica unicamente cal é a variable respecto da que integramos. Recordámosche que procede da notación notación de Leibnitz para a derivada: $f'(x) = \frac{df}{dx}$. Nós usaremos a segunda notación, mais antiga , pero que ten vantaxes á hora de enfrontarse a integrais complicadas. Todo o que aparece baixo o símbolo, salvo o diferencial, denomínase integrando. Loxicamente, non podemos quitar ese símbolo ata que non deamos a primitiva do integrando. Repetimos a anterior táboa de primitivas usando a notación para as integrais. Agora chámase **táboa de integrais inmediatas**. Hai que aprendela de memoria:

Integrales inmediatas
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + k$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$
$\int e^x dx = e^x + k$
$\int \left(1 + tg^2 x\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + k$

Exemplos

Calcula as seguintes integrais:

1. $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + k = \frac{x^3}{3} + k$
2. $\int x^9 dx = \frac{x^{9+1}}{9+1} + k = \frac{x^{10}}{10} + k$
3. $\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + k = \frac{x^{-4}}{-4} + k = -\frac{1}{4x^4} + k$
4. $\int \sqrt[7]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{2}{7}} dx = \frac{x^{\frac{2}{7}+1}}{\frac{2}{7}+1} + k = \frac{7}{9} x^{\frac{9}{7}} + k = \frac{7}{9}\sqrt[7]{x^9} + k$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} = \int x^{-\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + k = \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + k = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + k$
6. $\int dx = x + k$

Un procedemento útil para saber que a integral está correctamente resolta consiste en derivar a primitiva. Se se obtén a función que aparece no integrando, fixémolo ben e, se non é así, equivocámonos. Se te fixas no exemplo 6, o máis doado de todos, (x)' =1 e 1 é o integrando, pois 1 · dx =dx.

Para calcular integrais máis complicadas, necesitamos coñecer algunhas propiedades da integral. Estas denomínanse **propiedades de linealidade** e son as seguintes:

$\int (f + g) = \int f + \int g$ ≡ A integral dunha suma é igual á suma das integrais.

$\int (\lambda f) = \lambda \int f$ ≡ A integral do produto dunha constante por unha función é igual á constante pola integral da función.

Estas propiedades adoitan abreviarse escribindo $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$. É dicir, sacamos as constantes multiplicativas e integramos as funcións.

Exemplos

Calcula as seguintes integrais:

7. $\int (x^2 + x) dx = \int x^2 dx + \int x dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k$
8. $\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx = 5\frac{x^4}{4} + k = \frac{5x^4}{4} + k$
9. $\int \frac{dx}{8x} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{8} ln\, x + k$
10. $\int \frac{7}{x^3} dx = 7\int x^{-3} dx = 7\frac{x^{-2}}{-2} + k = -\frac{7}{2x^2} + k$

11. $\int \frac{\sqrt[8]{x^3}}{11}dx = \frac{1}{11}\int x^{\frac{3}{8}}dx = \frac{1}{11}\frac{x^{\frac{11}{8}}}{\frac{11}{8}} + k = \frac{8}{121}\sqrt[8]{x^{11}} + k$

12. $\int\left(6e^x + \frac{7}{x}\right)dx = \int 6e^x dx + \int \frac{7}{x}dx = 6\int e^x dx + 7\int \frac{dx}{x} = 6e^x + 7\ln x + k$

13. $\int\left(x^7 + 1\right)dx = \int x^7 dx + \int dx = \frac{x^8}{8} + x + k$

Podemos calcular as integrais directamente sen ter que escribir detalladamente a propiedade

14. $\int\left(3x^5 - 7x^2 + 9\right)dx = 3\frac{x^6}{6} - 7\frac{x^3}{3} + 9x + k = \frac{x^6}{2} - \frac{7x^3}{3} + 9x + k$

15. $\int\left(8e^x - \frac{5}{3x} + \frac{2}{x^4}\right)dx = 8e^x - \frac{5}{3}\ln x - \frac{2}{3x^3} + k$

16. $\int\left(-2x^2 + 11x - 5\right)dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 5x + k$

3. Integrais case - inmediatas. Método de substitución

Fálase de integrais case-inmediatas cando a función que debemos integrar pode converterse de forma sinxela nunha integral inmediata. Podemos distinguir dous tipos:

- Un primeiro tipo no que efectuando as operacións indicadas (sumas, restas, produtos, divisións...) pasamos a ter integrais inmediatas.

- Un segundo tipo no que habitualmente se recoñece a derivación seguindo a regra da cadea, é dicir, aparece unha función e a súa derivada, salvo constantes que multiplican.

Vexámolo con algúns exemplos:

Exemplos

Calcula as seguintes integrais:

17. $\int\left(3x^2 - 5x\right)\left(x^3 + 2x\right)dx = \int\left(3x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 10x^2\right)dx = 3\frac{x^6}{6} - 5\frac{x^5}{5} + 6\frac{x^4}{4} - 10\frac{x^3}{3} + k = \frac{x^6}{2} - x^5 + \frac{3x^4}{2} - \frac{10x^3}{3} + k.$

18. $\int\frac{2x^4 - 5x^2 + 1}{x^2}dx = \int\left(2x^2 - 5 + \frac{1}{x^2}\right)dx = 2\frac{x^3}{3} - 5x + \frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{2x^3}{3} - 5x - \frac{1}{x} + k.$

19. $\int\frac{4x^2 + 3x - 7}{2\sqrt{x}}dx = \int\left(2x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{2}x^{-1/2}\right)dx = 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{3}{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{7}{2}\frac{x^{1/2}}{1/2} + k = \frac{4\sqrt{x^5}}{5} + \sqrt{x^3} - 7\sqrt{x} + k.$

Observa que hai que escribir os radicais como potencias fraccionarias e as *x* do denominador como potencias negativas.

20. $\int e^{7x}dx \Rightarrow \left(e^{7x}\right)' = 7e^{7x} \Rightarrow$ Fáltalle multiplicar por 7 para ser inmediata. Para non cambiar o valor da integral, se multiplicamos por 7 temos que dividir por 7: $\int e^{7x}dx = \frac{1}{7}\int 7e^{7x}dx = \frac{1}{7}e^{7x} + k.$

21. $\int 5\cos 4x dx \Rightarrow (sen 4x)' = 4\cos 4x \Rightarrow$ falta multiplicar por 4. Como antes, se multiplicamos por un número teremos que dividir por ese mesmo número:

$$\int 5\cos 4x dx = \frac{5}{4}\int 4\cos 4x dx = \frac{5}{4} sen 4x + k.$$

22. $\int \frac{7x}{x^2+1}dx \Rightarrow \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$ falta multiplicar por 2. Temos que dividir tamén por 2:

$$\int \frac{7x}{x^2+1}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{7}{2}\ln\left(x^2+1\right) + k.$$

Fíxate que debemos de ter certa idea sobre a posible primitiva. Tamén observa que conforme se complica o integrando, o acharmos a súa primitiva, aínda que sexa axustando as constantes multiplicativas, vólvese máis difícil.

23. $\int 3x\left(x^2-7\right)^5 dx \Rightarrow \left(\left(x^2-7\right)^6\right)' = 12x\left(x^2-7\right)^5 \Rightarrow$ Hai que multiplicar e dividir por 12:

$$\int 3x\left(x^2-7\right)^5 dx = \frac{3}{12}\int 12x\left(x^2-7\right)^5 dx = \frac{1}{4}\left(x^2-7\right)^6 + k.$$

24. $\int tg^2 x dx \Rightarrow$ este é un exemplo de *idea feliz*: recorda que Así, para que fose inmediata tería que aparecer un 1 sumando no integrando. Pois sumámoslle e, para non cambiar o valor, restámoslle:

$$\int tg^2 x dx = \int\left(1+tg^2 x - 1\right)dx = \int\left(1+tg^2 x\right)dx - \int dx = tgx - x + k.$$

Existe unha técnica para resolver o segundo tipo de integrais, chamada método de substitución ou de cambio de variable. Consiste en cambiarlle o nome á función da que aparece a súa derivada, de modo que tras este cambio quede unha integral inmediata. Ao cambiarlle o nome á variable, hai que cambiar tamén o diferencial.

Recordando a notación de Leibnitz: $u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow du = u' dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u'}$

Simbolicamente podemos escribir que o cambio de variable consiste en que: $\begin{cases} f \to u \\ dx \to \frac{du}{u'} \end{cases}$

Ao facelo, debe desaparecer a variable *x*, quedando unha integral en *u*, que se integra tal e como fixemos coas de *x*. Ao final, desfaise o cambio, volvendo á variable orixinal.

E x e m p l o s

Calcula as seguintes integrais:

25. $\int 8x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx.$ Observamos que $(1-x^2)' = -2x \propto x$ polo que o cambio axeitado será $u = 1-x^2$. Intentemos resolver a integral mediante este cambio:

$$\int 8x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = 1-x^2 \Rightarrow u' = -2x \\ dx = \dfrac{du}{-2x} \end{array}\right\} = \int 8x\cdot u^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{du}{-2x} = -4\int u^{\frac{1}{3}}du = -4\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + k = -3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^4} + k.$$

O símbolo $\propto$ úsase para indicar a proporcionalidade. Fíxate en que ao facer o cambio, en u só vai a función, non o expoñente, que xa poremos despois.

26. $\int 6x^2\left(3x^3+2\right)^2dx$. Como: $\left(3x^3+2\right)' = 9x^2 \propto x^2 \Rightarrow u = 3x^3+2 \Rightarrow \int 6x^2\left(3x^3+2\right)^2dx = \left\{\begin{array}{l} u = 3x^3+2 \Rightarrow u' = 9x^2 \\ dx = \dfrac{du}{9x^2} \end{array}\right\} =$

$$= \int 6x^2\cdot u^2\cdot\frac{du}{9x^2} = \frac{2}{3}\int u^2du = \frac{2u^3}{9} + k = \frac{2\left(3x^3+2\right)^3}{9} + k.$$

27. $\int \frac{\ln x}{x}dx$. Como: $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow \int\frac{\ln x}{x}dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x} \\ dx = \dfrac{du}{\frac{1}{x}} = x\,du \end{array}\right\} = \int\frac{u}{x}x\,du = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + k = \frac{\left(\ln x\right)^2}{2} + k.$

28. $\int 7xe^{3x^2-5}dx$. Como: $\left(e^{3x^2-5}\right)' = 6xe^{3x^2-5} \propto xe^{3x^2-5} \Rightarrow u = e^{3x^2-5} \Rightarrow \int 7xe^{3x^2-5}dx = \left\{\begin{array}{l} u = e^{3x^2-5} \Rightarrow u' = 6xe^{3x^2-5} \\ dx = \dfrac{du}{6xe^{3x^2-5}} = \dfrac{du}{6xu} \end{array}\right\} =$

$$= \int 7xu\frac{du}{6xu} = \frac{7}{6}\int du = \frac{7}{6}u + k = \frac{7}{6}e^{3x^2-5} + k.$$

29. $\int \frac{4}{1+3x}dx$. Como: $\left(1+3x\right)' = 3 \propto k \Rightarrow u = 1+3x \Rightarrow \int\frac{4}{1+3x}dx = \left\{\begin{array}{l} u = 1+3x \Rightarrow u' = 3 \\ dx = \dfrac{du}{3} \end{array}\right\} = \int\frac{4}{u}\frac{du}{3} = \frac{4}{3}\int\frac{du}{u} =$

$$= \frac{4}{3}\ln u + k = \frac{4}{3}\ln\left(1+3x\right) + k.$$

Este exercicio poderiámolo facer axustando constantes como os primeiros.

30. $\int \frac{-5x}{4+7x^2}dx$

$$\left(4+7x^2\right)' = 17x \propto x \Rightarrow u = 4+7x^2 \Rightarrow \int \frac{-5x}{4+7x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} u = 4+7x^2 \Rightarrow u' = 14x \\ dx = \dfrac{du}{14x} \end{array}\right\} = \int \frac{-5x}{u}\frac{du}{14x} = -\frac{5}{14}\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\frac{5}{14}\ln u + k = -\frac{5}{14}\ln\left(4+7x^2\right) + k.$$

Ás veces hai que operar no integrando, aínda despois de facer o cambio.

31. $\int \frac{3+2\ln x}{5x\ln x}dx$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow \int \frac{3+2\ln x}{5x\ln x}dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x} \\ dx = \dfrac{du}{1/x} = xdu \end{array}\right\} = \int \frac{3+2u}{5xu}xdu = \int \frac{3}{5u}du + \frac{2}{5}\int du = \frac{3}{5}\ln u + \frac{2}{5}u + k =$$

$$= \frac{3}{5}\ln(\ln x) + \frac{2}{5}\ln x + k.$$

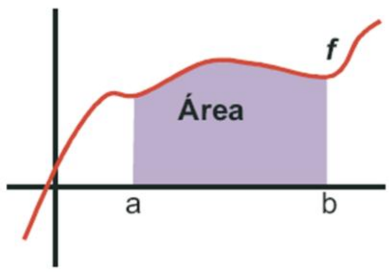
Neste punto deixamos o cálculo de integrais. Existen outros métodos (integración por partes, integración de funcións racionais...) que permiten integrar outra serie de funcións, pero que non teñen cabida neste curso. Hai que resaltar que, a pesar da existencia de máis métodos, non podemos integrar todas as funcións, aínda que sempre podemos calcular a derivada (se son derivables).

4. A área e a integral definida. Teorema fundamental do cálculo

Historicamente, a integral xorde como ferramenta para o cálculo de áreas de figuras planas e é anterior á derivación. Afortunadamente, existe unha relación entre a derivación e a integración, que xa usamos, e que nos permite integrar, e polo tanto calcular áreas, de forma sinxela. Imos explicalo sucintamente:

Chamamos $\int_a^b f(x)dx$ á área encerrada pola función f, o eixe OX, e as rectas x=a , x=b (zona coloreada)

Os puntos *a*, *b* que aparecen na integral son os seus extremos ou límites de integración e indican dende e ata onde queremos calcular a área. Por comodidade, supoñemos *f* positiva no intervalo [*a*,*b*]. Máis adiante veremos qué hai que facer cando non sexa así.

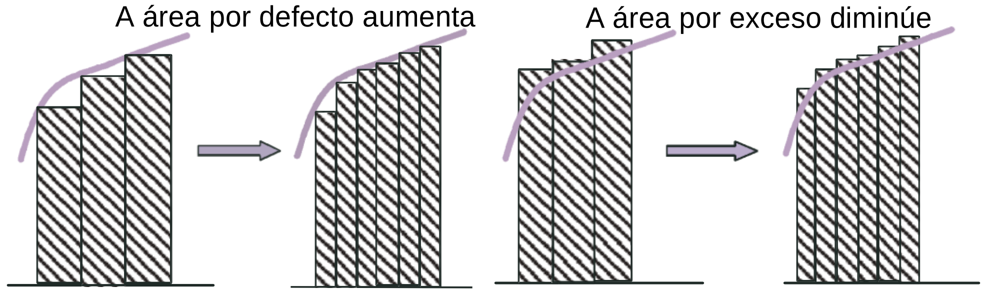


Para calcular a área da figura, poderiamos descompoñela en rectángulos e sumar a área de todos eles. Os rectángulos poden ser:

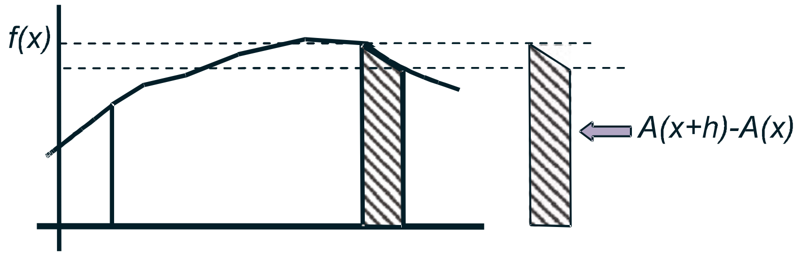
- de menor altura que a función, co que obteriamos unha área por defecto;
- de maior altura que a función, co que obteriamos unha área por exceso

Como con toda aproximación, podemos intentar mellorala. Para iso facemos cada vez máis pequena a base e observamos qué lles acontece ás áreas por defecto e por exceso.

A área por defecto aumenta | A área por exceso diminúe



Se a área por defecto aumenta e diminúe a área por exceso, e, parece claro que a área existe, terán que coincidir.Neste momento teremos calculada a área da figura, definida tamén como $\int_a^b f(x)dx$
Este procedemento que describimos tan brevemente en realidade é bastante complicado:temos que sumar unha grande cantidade de áreas (a de cada rectángulo), pois hai que dividir e dividir cada vez máis as bases para que ambas as dúas áreas (por defecto e por exceso) converxan, é dicir, que coincidan. Trátase dun proceso tedioso mesmo para funcións moi sinxelas, polo que hai que atopar unha alternativa á descomposición en rectángulos.



Para iso intentemos descubrir o valor da derivada da área $A(x) = \int_a^b f(t)dt$. Observa que ao ser A función de x temos que escribir outra variable na integral.
Do gráfico anterior vemos que $f(x+h)\cdot h \le A(x+h) - A(x) \le f(x)\cdot h \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x+h) \le \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le f(x) \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h) \le \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le \lim_{h\to 0} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \le A'(x) \le f(x) \Rightarrow A'(x) = f(x)$$

A área encerrada pola función é a súa primitiva, logo calcular áreas é calcular primitivas.

Algunhas apreciacións:

● A función debuxada é decrecente en [*x*, *x* + *h*], pero o feito de que fose crecente no devandito intervalo non cambia o resultado.

● Para poder tomar o límite, e obter o resultado obtido, a función *f* debe de ser continua e a función *A* derivable.

Grazas ao resultado anterior, coñecido como o **Teorema fundamental do cálculo**, podemos escribir que $\int_a^x f(t)dt = F(x) + k$
Evidentemente, non podemos deixar a área en función dunha constante arbitraria *k*. Fainos falta outro resultado, coñecido como Regra de Barrow e que veremos no seguinte apartado.

5. Integral definida: regra de Barrow

No apartado anterior vimos que a integral nos proporciona un método para o cálculo de áreas. Porén, dito cálculo quedaba en función dunha constante arbitraria k, algo improcedente. Afortunada, e loxicamente, existe un resultado que elimina esa constante e permite calcular áreas cos datos do problema. Este resultado chámase **Regra de Barrow**, e non é difícil de xustificar:

$\int_a^x f(t)dt = F(x) + k \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = F(a) + k = 0$ pois a area encerrada pola función nun punto(de anchura cero) será cero. Logo $k = -F(a) \Rightarrow$ se $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ entón

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_{x=a}^{x=b}$ (Regla de Barrow)

O segundo igual non é máis que outra forma de escribir a regra usando a barra das particularizacións.

Hai que facer unha observación moi importante. Intentaremos calcular a área encerrada pola función $f(x) = x^3$, o eixe *OX* e as rectas $x = -1$, $x = 1$. Se aplicamos os resultados anteriores tal cal teriamos que:

$$A = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \text{ u}^2$$ Pero unha área non pode ser nula!

Atopamos a explicación ao representar gráficamente $f(x)=x^3$ no intervalo [-1,1] a función ten unha parte negativa, coa súa área, e outra positiva, tamen, coa súa coorrespondente área. Dá a casualidade (nada casual, pois non o poriamos como exemplo) de que ambas as dúas son iguais, pero teñen signos distintos, ao estar unha na parte negativa e outra na positiva do eixe *OY*. Polo tanto, a integral por si soa non é capaz de calcular correctamente a área, de aí que se distinga entre **integral definida,** que pode tomar calquera valor (positivo, negativo ou nulo), e a área, que só pode ser positiva.

No seguinte apartado veremos como se calculan as áreas.Por iso, se escribimos $\int_a^b f(x)dx$ Entendemos que se trata dunha integral definida, polo que usaremos directamente a Regra de Barrow e non nos preocuparemos polo signo do resultado.

Se resolvemos a integral mediante o método de substitución temos dúas posibles formas de aplicar a Regra de Barrow:

1. - Usámola despois de desfacer o cambio.

2. - Cambiamos os límites de integración, escribindo $u_1 = u(a)$, $u_2 = u(b)$, co que teriamos que

$$\int_a^b f(x)dx = |F(u_2) - F(u)_1|$$

Exemplos

Calcula as seguintes integrais:

32. $\int_{-3}^{1}\left(4x^2-5x+1\right)dx = \frac{4x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+x\Big|_{-3}^{1} = -\frac{1}{6}-\left(-\frac{123}{2}\right)=\frac{368}{6}=\frac{184}{3}.$

33. $\int_{-1}^{1}\left(6x^5-9x^2+2\right)dx = x^6-3x^3+2x\Big|_{-1}^{1} = 0-2=-2.$

34. $\int_{1}^{e}\frac{3}{x}dx = 3\ln x\Big|_1^e = 3\ln e - 3\ln 1 = 3-0=3.$

35. $\int_{-2}^{2}\left(x^4-5x^2+4\right)dx = \frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\Big|_{-2}^{2} = \frac{16}{15}-\left(-\frac{16}{15}\right)=\frac{32}{15}.$

36. $\int_{-5}^{5}\left(x^3-25x\right)dx = \frac{x^4}{4}-\frac{25x^2}{2}\Big|_{-5}^{5} = -\frac{625}{4}-\left(-\frac{625}{4}\right)=0.$

37. Acha a primitiva de $f(x) = \frac{6}{x+4} - 6x$ que en $x = -3$ vale 7.

Solución: Hai que calcular a integral indefinida e substituír a condición para descubrir o valor da constante *k*.

$$\int\left(\frac{6}{x+4}-6x\right)dx = 6\ln(x+4)-3x^2+k \Rightarrow F(-3)=6\ln 1-27+k=7 \Rightarrow k=34.$$

A primitiva buscada é $F(x) = 6\ln(x+4) - 3x^2 + 34$.

38. Atopa a primitiva de $f(x) = \sqrt{x+5}$ que vale 3 en x= -1.

Solución:

$$\int \sqrt{x+5}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+5 \Rightarrow u' = 1 \\ dx = \dfrac{du}{u'} = du \end{array} \right\} = \int u^{1/2} du = \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + k = \frac{2}{3} u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2} + k$$

$$F(-1) = \frac{2}{3} 4^{3/2} + k = 3 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 8 + k = 3 \Rightarrow k = -\frac{7}{3} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{7}{3}.$$

39. Calcula $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 6x(x^2-1)^4 dx$

Solución: Imos facela polos dous métodos que mencionamos:

a) $$\int 6x\left(x^2-1\right)^4 dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2-1 \Rightarrow u' = 2x \\ dx = \dfrac{du}{2x} \end{array} \right\} = \int 6x \cdot u^4 \cdot \frac{du}{2x} = \frac{3u^5}{5} = \frac{3\left(x^2-1\right)^5}{5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{3}{5} \\ F\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{96}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 6x\left(x^2-1\right)^4 dx = F\left(\sqrt{3}\right) - F\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{96}{5} - \frac{3}{5} = \frac{93}{5}.$$

b) $$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 6x\left(x^2-1\right)^4 dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2-1 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2x} \\ u_1 = u\left(-\sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 1 \\ u_2 = u\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1 = 2 \end{array} \right\} = \int_1^2 6x \cdot u^4 \cdot \frac{du}{2x} = \int_1^2 3u^4 du \Rightarrow F(u) = \frac{3u^5}{5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(1) = \dfrac{3}{5} \\ F(2) = \dfrac{96}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^2 3u^4 du = F(2) - F(1) = \frac{93}{5}.$$

Fíxate que se cambiamos os límites, escribímolo no cambio.

40. Acha $\int_7^{10} \frac{4}{x-5} dx$

Solución:

$$\int_7^{10} \frac{4}{x-5} dx = 4\ln(x-5)\Big|_{x=7}^{x=10} = 4\ln 5 - 4\ln 2 = 4\left(\ln 5 - \ln 2\right) = 4\ln\frac{5}{2}.$$

41 . Acha $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{6\, senx}{1-\cos x} dx$

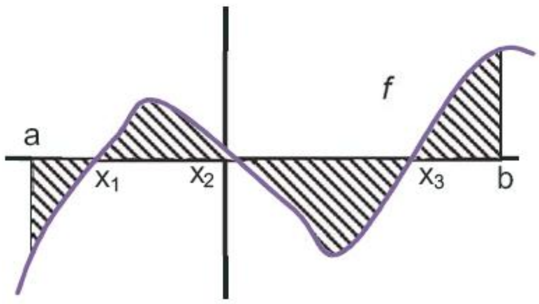
Solución: Usamos o método de substitución

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{6senx}{1-\cos x}dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1-\cos x \Rightarrow u' = senx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{senx} \\ u_1 = u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1-\cos\dfrac{\pi}{2} = 1-0 = 1 \\ u_2 = u(\pi) = 1-\cos\pi = 1-(-1) = 2 \end{array} \right\} = \int_1^2 \frac{6senx}{u}\frac{du}{senx} = \int_1^2 \frac{6du}{u} = 6\ln u\Big]_{u=1}^{u=2} = 6\ln 2 - 6\ln 1 = 6\ln 2.$$

Este exercicio tamén pode resolverse sen necesidade de cambiar os límites. O único que hai que facer é cambiar 6 *ln u* por 6 *ln* (1 -- *cos x*) *e* aplicar a Regra de Barrow.

6. Cálculo de áreas

Como vimos no apartado anterior, non abonda a integral definida para o cálculo da área encerrada por unha función, o eixe *OX* e as rectas $x = a$ e $x = b$. Podemos pensar que, ao igual que acontece para descubrir a distancia entre dous puntos da recta real, podemos usar o valor absoluto. Non obstante, non podemos usalo directamente sen facer ningunha outra modificación. Pensemos na situación do gráfico:



Se calculamos a área directamente como $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$, as partes positivas (de $\mathbf{x_1}$ a $\mathbf{x_2}$ e de $\mathbf{x_3}$ a **b**) restarémoslles as negativas (de **a** a $\mathbf{x_1}$ e de $\mathbf{x_2}$ a $\mathbf{x_3}$), polo que non obteremos a área. O que debemos facer é calcular a área de cada anaco e sumalas. Agora si que usamos o valor absoluto, para despreocuparnos de se o anaco está na parte positiva ou negativa do eixe OY :

Área = $\left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|$

Que son x_1, x_2 e x_3? Se observas o gráfico, decataraste de que son os puntos de corte da función co eixe *OX*, isto é, os puntos nos que a función cambia de signo. Para que eses puntos inflúan no cálculo deben pertencer ao intervalo de integración. Se non é así, non hai que partir o intervalo de integración. Por certo, podemos partir o intervalo de integración en tantas partes como queiramos porque, se recordas, a integral é unha suma.

Tamén has de darte conta de que, a pesar do complicado que poida parecer, só calculamos unha primitiva, pois en todos os integrandos está a mesma función, que avaliamos en 5 puntos no caso do gráfico. Só hai que efectuar as operacións con orde para simplificarmos considerablemente o traballo.

E x e m p l o s

42. Acha a área encerrada pola curva $y = x^2 + x$ --6, o eixe OX e as rectas $x = -4$ e $x = 1$.

Solución: En primeiro lugar achamos os puntos de corte da función co eixe OX resolvendo a ecuación
$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3$, 2 e á vista das solucións, descompoñemos o intervalo de integración
$[-4, 1]$ en tantos anacos como ceros teña a función no seu interior: $[-4, 1] \rightarrow [-4, -3] \cup [-3, 1,]$, co que o área será:

$$\acute{A}rea = \left|\int_{-4}^{-3}\left(x^2+x-6\right)dx\right| + \left|\int_{-3}^{1}\left(x^2+x-6\right)dx\right| = \left|F(-3)-F(-4)\right| + \left|F(1)-F(-3)\right|.$$

Achamos a primitiva, avaliámola e facemos os cálculos:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(-4) = \frac{32}{3} \\ F(-3) = \frac{27}{2} \\ F(1) = -\frac{31}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \left|\frac{27}{2} - \frac{32}{3}\right| + \left|-\frac{31}{6} - \frac{27}{2}\right| = \frac{129}{6}u^2 = \frac{43}{2}u^2.$$

43. Acha a área encerrada pola función $y = x^3$, o eixe OX e as rectas $x = -2$ e $x = 2$.

Solución:

1º) $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

2º) $[-2, 2] \rightarrow [-2, 0] \cup [0, 2]$

3º) $A = \left|\int_{-2}^{0} x^3 dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x^3 dx\right| = \left|F(0) - F(-2)\right| + \left|F(2) - F(0)\right|$

4º) $F(x) = \frac{x^4}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(-2) = 4 \\ F(0) = 0 \\ F(2) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \left|0 - 4\right| + \left|4 - 0\right| = 4 + 4 = 8\,u^2.$

44. Acha a área encerrada por $y = \dfrac{3}{x+7}$, o eixe OX e as rectas $x = 1$ e $x = -6$.

Solución:

1º) $f(x) \neq 0$ *pues* $3 \neq 0 \Rightarrow A = \left|\int_{-6}^{1} \frac{3}{x+7} dx\right|$

2º) $F(x) = 3\ln(x+7) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(1) = 3\ln 8 \\ F(-6) = 3\ln 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \left|F(1) - F(-6)\right| = 3\ln 8\,u^2.$

45. Calcula a área do recinto limitado pola gráfica da función $y = -x^2 + 5x - 6$ e o eixe das x.

Solución: ao pedirnos a área se darnos límites, estes son os puntos de corte da función co eixe *OX*.

1º) $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$.

$$2^{\circ})\quad A = \left|\int_2^3 \left(-x^2 + 5x - 6\right)dx\right|$$

$$3^{\circ})\quad F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F(3) = -\dfrac{9}{2} \\ F(2) = -\dfrac{14}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = |F(3) - F(2)| = \left|-\frac{9}{2} + \frac{14}{3}\right| = \frac{1}{6}u^2.$$

46. Acha a área limitada pola $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ si } x < -1/2 \\ -x^2 + 3x, \text{ si } -1/2 \le x \le 3 \\ |x+3|, \text{ si } x > 3 \end{cases}$ función o eixe *OX* e as rectas $x = 0$ e $x = 3$.

Solución: ao ser unha función definida a anacos, debemos integrar a función ou funcións que estean no intervalo de integración. Neste caso, dito intervalo é [0,3], co cal $f(x) = -x^2 + 3x$. Agora seguimos o procedemento habitual:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 3 \Rightarrow A = \left|\int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)dx\right| \Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F(3) = \dfrac{9}{2} \\ F(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = |F(3) - F(0)| = \frac{9}{2}u^2.$$

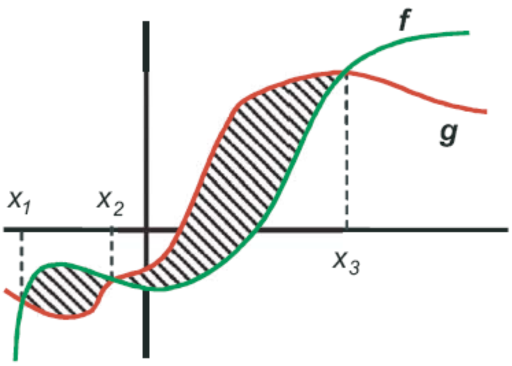
47. Unha fábrica bota diariamente material contaminante a unha balsa segundo un ritmo dado pola función $m(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$, sendo $m(t)$ a cantidade de material en kg e t a hora do día. Canto material bota cada día?

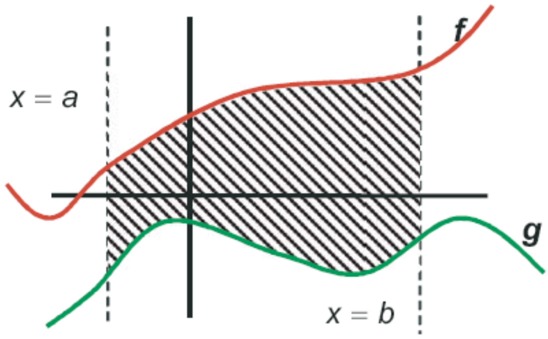
Solución: está claro que para calcular a cantidade de material, deberiamos calcular o valor de m para todo valor de t entre 0 e 24 h, e despois sumar todos eses valores. Recordemos que a suma dunha gran cantidade de valores faise a través da integral. Polo tanto,

$$C = \int_0^{24} m(t)dt = \int_0^{24} \left(0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1\right)dt \Rightarrow F(t) = \frac{0{,}01t^4}{4} - \frac{0{,}2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F(24) = 219{,}84 \\ F(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = |F(24) - F(0)| = 219{,}84\ kg.$$

Como podemos calcular a área encerrada por dúas funcións? Observa os gráficos:





Se as dúas funcións se cortan en máis dun punto, determinan unha ou varias rexións que teñen unha área, sen necesidade de rectas verticais que a delimiten. Se non se cortan, necesitaremos de rectas verticais para poder descubrir a área encerrada polas dúas funcións.

En calquera caso, parece claro que a área encerrada por *f* e *g* pode calcularse descubrindo primeiro a de *f* e despois restándolle a de *g*. Tendo en conta as propiedades de linealidade da integral, podemos calcular a integral da diferenza de f e *g*, o que nos dará o mesmo resultado. Por iso, úsase unha función auxiliar definida como $h(x) = f(x) - g(x)$, co que pasariamos a calcular a área encerrada por unha función *h(x)* e o eixe *OX*, pois naqueles puntos nos que $f(x) = g(x)$ teriamos que $h(x) = 0$, que son os puntos de corte de *h* co eixe *OX*. Deste modo, ao usar *h*, non temos máis que seguir os pasos xa vistos. Evidentemente, a nosa función auxiliar *h* pode definirse tamén como $h(x) = g(x) - f(x)$. Úsase unha ou outra forma segundo cal sexa a máis cómoda.

Exemplos

48. Acha a área encerrada polas funcións $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ e $y = -3x^2 + 6x$.

Solución:

Como no cálculo da área usamos un valor absoluto, é indiferente a qué chamemos f e a qué *g*. Por exemplo, se $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ e $g(x) = -3x^2 + 6x$, entón $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x$. Polo tanto:

$$h(x) = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - x - 2\right) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 2. \Rightarrow A = \left|\int_{-1}^{0} h(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} h(x)dx\right| \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} F(-1) = -\dfrac{5}{12} \\ F(0) = 0 \\ F(2) = -\dfrac{8}{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow A = |F(0) - F(-1)| + |F(2) - F(0)| = \frac{37}{12} u^2$$

49. Acha a área encerrada polas funcións $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solución:

Facendo $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x$;

50. Calcula a área determinada pola curva $y = 4x^3$ e a recta $y = x$.

Solución:

$$h(x)=4x^3-x \Rightarrow h(x)=0 \Rightarrow x\left(4x^2-1\right)=0 \Rightarrow x=0,\pm\frac{1}{2} \Rightarrow A=\left|\int_{-1/2}^{0} h(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1/2} h(x)dx\right| \Rightarrow F(x)=x^4-\frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16} \\ F(0)=0 \\ F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow A=\left|F(0)-F\left(-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)\right|=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}u^2$$

51. Acha a área do recinto limitado polas gráficas das funcións $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$.

Solución:

$$f(x)=x+2; g(x)=4-x^2 \Rightarrow h(x)=x^2+x-2 \Rightarrow h(x)=0 \Rightarrow x=-2,1 \Rightarrow A=\left|\int_{-2}^{1} h(x)dx\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x \Rightarrow \begin{cases} F(1)=-\frac{7}{6} \\ F(-2)=\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow A=\left|F(1)-F(-2)\right|=\left|-\frac{7}{6}-\frac{10}{3}\right|=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}u^2$$

52. Acha a área comprendida entre a recta $y = x$ e a curva $y = x^3$ --3 *x.*

Solución:

$$f(x)=x^3-3x; g(x)=x \Rightarrow h(x)=x^3-4x \Rightarrow h(x)=0 \Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow x=-2,0,2 \Rightarrow A=\left|\int_{-2}^{0} h(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{2} h(x)dx\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{x^4}{4}-2x^2 \Rightarrow \begin{cases} F(-2)=-4 \\ F(0)=0 \\ F(2)=-4 \end{cases} \Rightarrow A=\left|F(0)-F(-2)\right|+\left|F(2)-F(0)\right|=4+4=8\,u^2$$

53. Acha a área da rexión comprendida entre as curvas determinadas por *f(x)* $= 4 - x^2$, *g(x)* =3 *x 2.*

Solución:

$$h(x)=g(x)-f(x)=4x^2-4 \Rightarrow h(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow A=\left|\int_{-1}^{1} h(x)dx\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{4x^3}{3}-4x \Rightarrow \begin{cases} F(-1)=\frac{8}{3} \\ F(1)=-\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow A=\left|F(1)-F(-1)\right|=\frac{16}{3}u^2$$

54. Calcula a área limitada polas gráficas das funcións $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^2 - x - 9$ e as rectas $x = -2$, $x = 6$.

Solución:

$h(x) = f(x) - g(x) = x - 3 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$ Hai que dividir o intervalo [-2,6] en 2 anacos $[-2,3] \cup [3,6]$,

co que a área queda: $$A = \left|\int_{-2}^{3} (x-3)\,dx\right| + \left|\int_{3}^{6} [x-3]\,dx\right| \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x \Rightarrow \begin{Bmatrix} F(-2) = 8 \\ F(3) = -\dfrac{9}{2} \\ F(6) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = |F(3) - F(-2)| + |F(6) - F(3)| = \left|-\frac{9}{2} - 8\right| + \left|0 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right| = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = 17\,u^2$$