Unidade 9 – Resumo

Comezamos esta unidade decindo que F é unha **función primitiva ou primitiva** de *f* se *F'(x)*=*f*(x).

Tralo cálculo dunha primitiva dunha sinxela función decatámonos de que a primitiva non é única, é dicir, se sumamos unha constante calquera á primitiva, esta segue sendo primitiva da mesma función, o cal lévanos definición de a **integral indefinida** como:

$\int f = F + k$ *ou* $\int f(x)dx = F(x) + k$.

Para calcular integrais máis complicadas, necesitamos coñecer algunhas propiedades da integral. Estas denomínanse **propiedades de linealidade** e son as seguintes:

$\int (f + g) = \int f + \int g \equiv$ A *integral dunha suma é igual á suma das integrais.*

$\int (\lambda f) = \lambda \int f \equiv$ A *integral do produto dunha constante por unha función é igual á constante pola integral da función.*

Estas propiedades adoitan abreviarse escribindo $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$.

De seguido achamos **integrais case-inmediatas** , chamadas dese xeito porque a función que debemos integrar pode converterse de forma sinxela nunha integral inmediata.

Para resolver algunhas integrais deste tipo usamos o chamado **método de substitución ou de cambio de variable** que consiste en cambiarlle o nome á función da que aparece a súa derivada, de modo que tras este cambio quede unha integral inmediata.

Debemos sinalar que historicamente, a integral xorde como ferramenta para o cálculo de áreas de figuras planas e é anterior á derivación.

Chamamos $\int_a^b f(x)dx$ **á área encerrada pola función f, o eixe OX, e as rectas x=a , x=b**

Grazas ao **Teorema fundamental do cálculo**, podemos escribir que:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + k$$

Evidentemente, non podemos deixar a área en función dunha constante arbitraria *k*.
O inconveniente da área dependendo dunha constante k resolvémol co resultado, coñecido como **Regra de Barrow:** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_{x=a}^{x=b}$

Se tentamos calcular a área encerrada pola función $f(x) = x^3$, o eixe *OX* e as rectas $x = -1$, $x = 1$, e aplicamos os resultados anteriores tal cal, teriamos que A = 0.
Pero unha área non pode ser nula, polo tanto, a integral por si soa non é capaz de calcular correctamente a área, de ahí que se distinga entre **integral definida,** que pode tomar calquera valor (positivo, negativo ou nulo), e a área, que só pode ser positiva.

Dado que non abonda a integral definida para o cálculo da área encerrada por unha función, o eixe *OX* e as rectas $x = a$ e $x = b$.

$$\text{Área} = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|$$

onde x_1, x_2 e x_3 son os puntos de corte da función co eixe *OX*, isto é, os puntos nos que a función cambia de signo

Para calcular a área encerrada por dúas función facemos duas observacións:

a) Se as dúas funcións se cortan en máis dun punto, determinan unha ou varias rexións que teñen unha área, sen necesidade de rectas verticais que a delimiten.

b) Se non se cortan, necesitaremos de rectas verticais para poder descubrir a área encerrada polas dúas funcións.

En calquera caso, úsase unha función auxiliar definida como $h(x) = f(x) - g(x)$, co que pasariamos a calcular a área encerrada por unha función $h(x)$ e o eixe *OX*, pois naqueles puntos nos que $f(x) = g(x)$ teriamos que $h(x) = 0$, que son os puntos de corte de h co eixe