

Actividades

1. Descubre a ecuación da recta tanxente á curva $y = (x - 1)e^{-3x}$ no punto de abscisa $x = 0$.

2. Acha o valor do parámetro a para que a recta tanxente á curva $y = \frac{1}{a-x}$ sexa paralela a recta $y = 4x - 5$ no punto de abscisa 1. Escribe a ecuación da devandita recta tanxente.

3. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

4. Estuda a monotonía da función $y = (x^2 + x - 11) \cdot e^x$.

5. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = (3x - 2) \cdot e^{4x-1}$.

6. Estuda a monotonía da función $y = \frac{2x^2-5}{x+8}$.

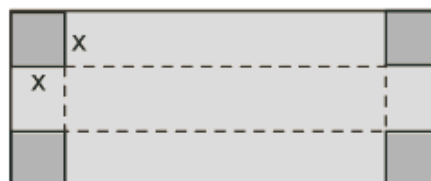
7. Dada a función $y = |x^2 - 7|$

a) represéntaa graficamente;

b) acha a ecuación da recta tanxente no punto de abscisa $x = 1$;

c) descobre os seus máximos e mínimos relativos.

8. Recortando convenientemente en cada esquina dunha lámina de cartón de dimensións 80 cm x 50 cm un cadrado de lado x e dobrando convenientemente constrúese unha caixa (ver figura adxunta). Calcula x para que o volume da devandita caixa sexa máximo.



9. Certa entidade financeira lanza ao mercado un plan de investimento cuxa rendibilidade $R(x)$, en euros, vén dada en función da cantidade que se invista x , en euros, por medio da expresión $R(x) = -0,001x^2 + 3x + 2,5$.

a) Deduce razoadamente qué cantidade de diñeiro lle convén investir a un cliente no devandito plan.

b) Que rendibilidade obtería?

10. Unha folla de papel debe ter 18 cm^2 de texto impreso, marxes superior e inferior de 2 cm de altura e marxes laterais de 1 cm de anchura. Obtén razoadamente as dimensións que minimizan a superficie de papel.

11. O custo de produción de x unidades diarias dun determinado produto é $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ euros e o prezo de venda dunha delas é $5 - \frac{x}{4}$ euros. Acha o número de unidades que deben venderse diariamente para que o beneficio sexa máximo.

12. a) A segunda derivada dun polinomio de 2º orde que pasa polo punto (1,17) é 4. Acha o polinomio se se sabe que ten un mínimo en $x = -1$.

b) Obtén as zonas nas que crece e as zonas nas que decrece.

13. Unha ventá normanda consiste nun rectángulo coroado cun semicírculo. Atopa as dimensións da ventá de área máxima se o seu perímetro é de 10 m.

14. Durante 31 días consecutivos as accións da compañía A e B tiveron unhas cotizacións dadas polas funcións $C_A = 0,02x^3 - 0,9x^2 + 7,5x + 100$ e $C_B = 0,1x^2 - 0,3x + 100$ de días transcorridos. onde x é o número de días transcorridos. **a)** Acha as cotizacións máxima e mínima de cada compañía e os días en que se conseguiron

b) Acha os días en que as respectivas accións estiveron en alza (subindo de prezo) e os que estiveron á baixa.

15. Atopa as funcións polinómicas $ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuxa segunda derivada sexa $x - 1$. ¿Cal ou cales delas teñen un mínimo relativo no punto $(4, -1/3)$?

16. De dúas funcións, f e g , sábese que a representación gráfica das súas funcións derivadas é unha recta que pasa polos puntos (0,2) e (2,0) (para a derivada de f) e unha parábola que corta ao eixe OX en (0,0) e (4,0) e ten por vértice (2,1) (para a derivada de g). Utilizando as gráficas de tales derivadas:

a) estuda o crecemento e decrecemento de f e g ;

b) determina, se existen, máximos e mínimos de f e g .

17. A función do custo total de produción de x unidades dun determinado produto é

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200.$$

Define a función do custo medio por unidade con $C_M(x) = C(x)/x$. ¿A que nivel de produción será mínimo o coste medio por unidade?

18. Quérese construír o marco dunha ventá rectangular de 8 m^2 . O metro lineal de tramo horizontal custa 2,5 €, mentres que o metro lineal de tramo vertical custa 5 €. Determina:

a) as dimensións da ventá para que o custo do marco sexa mínimo; **b)** canto custa o marco?

19. Estuda a curvatura e acha as coordenadas dos puntos de inflexión das seguintes funcións: **a)** $y = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$; **b)** $y = (2x - 3)^3$.

20. Acha os intervalos nos que as seguintes funcións son cóncavas e convexas, así como as coordenadas dos seus puntos de inflexión, se os teñen:

$$\text{a) } y = \frac{x^2+1}{x}; \text{ b) } y = \frac{x^2}{x^2-9}$$

21. Descubre en que intervalos as seguintes funcións son cóncavas ou convexas, así como os seus puntos de inflexión:

a) $y = \frac{2x^2-5}{x+8}$ **b)** $y = \frac{1-x^2}{(x+3)^2}$

22. Estuda a curvatura e descubre os puntos de inflexión das seguintes funcións:

a) $y = \ln(x^2+1)$; **b)** $y = (x^2+x) \cdot e^{x-1}$

Soluciones:

1. Descubre a ecuación da recta tanxente á curva $y = (x - 1)e^{-3x}$ no punto de abscisa $x=0$.

Solución:

$$y_0 = y(0) = 1; f'(x) = -(3x + 2)e^{-3x} \Rightarrow f'(0) = -2; \Rightarrow y - 1 = -2x$$

2. Acha o valor do parámetro a para que a recta tanxente á curva $y = \frac{1}{a-x}$ sexa paralela a recta $y = 4x - 5$ no punto de abscisa 1. Escribe a ecuación da devandita recta tanxente.

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{(a-1)^2} = 4 \Rightarrow a - 1 = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 1/2 \text{ e } a_2 = 3/2 \Rightarrow$$

$$r_1 :: a = a_1 \Rightarrow f(1) = -2 \Rightarrow y + 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 6$$

$$r_2 :: a = a_2 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 2$$

3. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow \text{Num} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ e } x = 1;$$

$$\text{Den} > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$\text{sgn } f'$	+	-	+
f	$C \uparrow$	$D \downarrow$	$C \uparrow$

4. Estuda a monotonía da función $y = (x^2 + x - 11) \cdot e^x$.

Solución: $y' = (x^2 + 3x - 10) \cdot e^x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$
 $\Rightarrow x = -5 \text{ e } x = 2 \Rightarrow$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn } y'$	+	-	+
y	$C \uparrow$	$D \downarrow$	$C \uparrow$

5. Determina os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = (3x - 2) \cdot e^{4x-1}$

Solución:

$$f'(x) = (12x - 5)e^{4x-1} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5/12$$

	$(-\infty, 5/12)$	$(5/12, \infty)$
$\text{sgn } f'$	-	+
f	$D \downarrow$	$C \uparrow$

6. Estuda a monotonía da función $y = \frac{2x^2-5}{x+8}$

Solución:

$$y' = \frac{2x^2+32x+5}{(x+8)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Num} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -15,84 \\ x_2 = -0,158 \end{cases} \\ \text{Den} > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-8\} \end{cases}$$

	$(-\infty, x_1)$	$(x_1, x_2) \cup \{-8\}$	(x_2, ∞)
$\text{sgn } y'_i$	+	-	+
y	C	D↓	C↑

7. Dada a función $y = |x^2 - 7|$

a) represéntaa graficamente;

b) acha a ecuación da recta tanxente no punto de abscisa $x=1$;

c) descobre os seus máximos e mínimos relativos.

Solución:

a) $y = |x^2 - 7| \Rightarrow$ parábola con vértice en $x_v = -b/2a$; $y_v = y(0)=7 \Rightarrow V(0,7)$. Corta ao eixe OX nos puntos $y=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow (-\sqrt{7}, 0); (+\sqrt{7}, 0)$. O valor absoluto converte o anaco negativo (que vai de $-\sqrt{7}$ a $+\sqrt{7}$) en positivo.

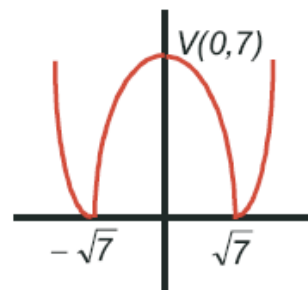
$$b) \begin{cases} x^2 - 7 \text{ se } x \leq -\sqrt{7} \\ -x^2 + 7 \text{ se } -\sqrt{7} < x < \sqrt{7} \\ x^2 - 7 \text{ se } x \geq \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow y'(1) = -2x|_{x=1} = -2; y(1) = 6 \Rightarrow r: y = -2x + 8$$

c) Da gráfica da función obtemos que só ten un máximo no seu vértice (0,7)

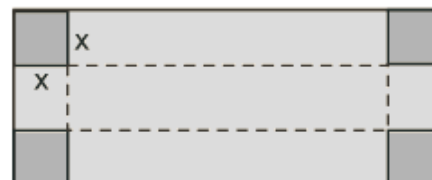
Usando a derivada:

$$y' = \begin{cases} 2x \text{ se } x \in (-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, \infty) \\ -2x \text{ se } (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) \end{cases} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$0 \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) \Rightarrow y'' = -2 < 0 \Rightarrow \text{máximo en } (0, 7)$$



8. Recortando convenientemente en cada esquina dunha lámina de cartón de dimensións 80 cm x 50 cm un cadrado de lado x e dobrando convenientemente constrúese unha caixa (ver figura adxunta). Calcula x para que o volume da devandita caixa sexa máximo.



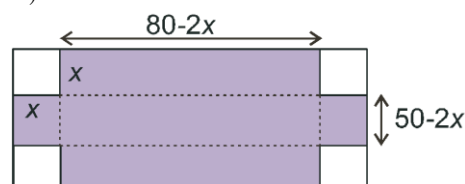
Solución:

Función que hai que optimizar: $V(x) = x(80-2x)(50-2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x \Rightarrow$

$$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000; V'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 100/3 \text{ (absurda); } x_2 = 10;$$

$$V''(x) = 24x - 520 \Rightarrow V''(100/3) = 280 > 0$$

O volumen da caixa é máximo cortando un cadrado de lado **10 cm** e vale **$V_{\max} = 18000 \text{ cm}^3$**



9. Certa entidade financeira lanza ao mercado un plan de investimento cuxa rendibilidade $R(x)$, en euros, vén dada en función da cantidade que se invista x , en euros, por medio da expresión $R(x) = -0,001x^2 + 3x + 2,5$.

a) Deduce razoadamente qué cantidade de diñeiro lle convén investir a un cliente no devandito plan.

b) Que rendibilidade obtería?

Solución:

$$R'(x) = -0,002x + 3 \Rightarrow R'(x) = 0 \Rightarrow x = 1500; R'(1500) = -0,002 \Rightarrow$$

a) a rendibilidade máxima obtense investindo **1500 euros**;

b) $R_{\max} = 2252,5$ euros.

10. Unha folia de papel debe ter 18 cm² de texto impreso, marxes superior e inferior de 2 cm de altura e marxes laterais de 1 cm de anchura. Obtén razoadamente as dimensións que minimizan a superficie de papel.

Solución:

Función que hai que optimizar: $S(x, y) = (x+2)(y+4)$

Relación variables: $xy = 18 \Rightarrow S(x) = 26 + 4x + 36/x \Rightarrow S'(x) = 4 - 36/x^2 \Rightarrow S'(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$; $S''(x) = 72/x^3 = 8/3 > 0 \Rightarrow$ o gasto de papel é mínimo para

$x = 3$ cm, $y = 6$ cm

Ao resolver a ecuación $x^2 = 9$ desbotamos a solución negativa por non ter sentido no problema.

11. O custo de produción de x unidades diarias dun determinado produto é $1/4 x^2 + 35x + 25$ euros e o prezo de venda dunha delas é $5 - x/4$ euros. Acha o número de unidades que deben venderse diariamente para que o beneficio sexa máximo.

Solución:

$$B(x) = x(50 - x/4) - (1/4 x^2 + 35x + 25) = -x^2/2 + 15x - 25 \Rightarrow B'(x) = -x + 15 \Rightarrow$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 15; B''(x) = -1 < 0$$

O beneficio é máximo para unha venda de **15 unidades** diarias $\Rightarrow B_{\max} = 87,5$ euros

12. A segunda derivada dun polinomio de 2º orde que pasa polo punto (1,17) é 4.

a) Acha o polinomio se se sabe que ten un mínimo en $x = -1$.

b) Obtén as zonas nas que crece e as zonas nas que decrece.

Solución:

$$\text{a) } f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a \Rightarrow f''(1) = 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow$$

$$-4 + b = 0 \Rightarrow b = 4; f(1) = 2 + 4 + c = 17 \Rightarrow c = 11.$$

b) Como é un polinomio de 2º grao cun mínimo, é **decrecente** en $(-\infty, -1)$ e **crecente** en $(-1, \infty)$.

13. Unha ventá normanda consiste nun rectángulo coroado cun semicírculo. Atopa as dimensións da ventá de área máxima se o seu perímetro é de 10 m.

Solución:

Función a optimizar: $A(r,h) = 2rh + \pi r^2/2$

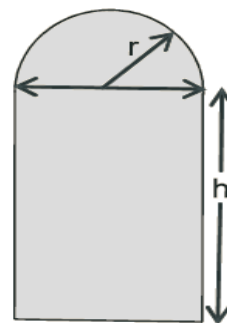
Relacion de variables: $P = 2h + 2r + \pi r = 10 \Rightarrow h = \frac{10 - (2+\pi)r}{2} \Rightarrow$

$$A = 1/2 [20r - (4+\pi)r^2].$$

$$A'(r) = 10 - (4 + \pi)r \Rightarrow A'(r)=0 \Rightarrow r = 10/(4+\pi);$$

$$A''(r) = -(4 + \pi) \Rightarrow A''(r) < 0 \Rightarrow r = 10/(4+\pi); A''(r) = -(4+\pi) < 0 \Rightarrow$$

Máximo para $r=10/(4+\pi)$ m. $h=10/(4+\pi)$ m.



14. Durante 31 días consecutivos as accións da compañía A e B tiveron unhas cotizacións dadas polas funcións $C_A=0,02x^3 - 0,9x^2 + 7,5x + 100$ e $C_B=0,1x^2 - 0,3x + 100$ de días transcorridos. onde x é o número de días transcorridos.

a) Acha as cotizacións máxima e mínima de cada compañía e os días en que se conseguiron.

b) Acha os días en que as respectivas accións estiveron en alza (subindo de prezo) e os que estiveron á baixa.

Solución:

a) $C'_A = 0,06x^2 - 1,8x + 7,5 \Rightarrow C'_A = 0 \Rightarrow 5,25 \Rightarrow C''_A = 0,12x - 1,8 \Rightarrow C''_A(5) = -1,2 > 0$ e $C''_A(25) = 1,2 \Rightarrow$ A compañía alcanza a súa máxima cotización ao 5º día e a mínima o 25º. $C'_B = 0,2x - 3 \Rightarrow C'_B = 0 \Rightarrow x = 15 \Rightarrow C''_B = 0,2 > 0 \Rightarrow$ a compañía B alcanza a súa mínima cotización o 15º día

b) A compañía A estivo á alza do 1º ao 5º día; despois á baixa ata o 25º día, e de novo á alza a partir do 26º.

A compañía B estivo á baixa ata o 15º día. Despois estivo á alza.

15. Atopa as funcións polinómicas $ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuxa segunda derivada sexa $x - 1$. ¿Cal ou cales delas teñen un mínimo relativo no punto $(4, -1/3)$?

Solución:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6} \\ 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(4) = 0 \Rightarrow 8 - 4 + c = 0 \Rightarrow c = -4; f(4) = -1/3 \Rightarrow 32/3 - 8 - 4 + d = -1/3 \Rightarrow d = 1$$

$$f(x) = 1/6 x^3 - 1/2 x^2 - 4x + 1$$

16. De dúas funcións, f e g , sábese que a representación gráfica das súas funcións derivadas é unha recta que pasa polos puntos $(0,2)$ e $(2,0)$ (para a derivada de f) e unha parábola que corta ao eixe OX en $(0,0)$ e $(4,0)$ e ten por vértice $(2,1)$ (para a derivada de g). Utilizando as gráficas de tales derivadas:

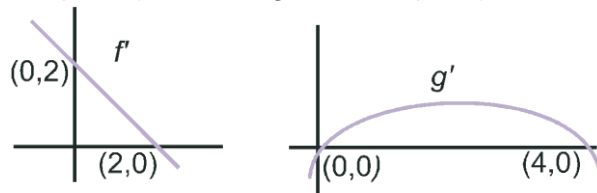
a) estuda o crecemento e decrecemento de f e g ;

b) determina, se existen, máximos e mínimos de f e g .

Solución:

- a)** f' é positiva en $(-\infty, 2) \Rightarrow f$ é crecente en $(-\infty, 2)$; f' é negativa en $(2, \infty) \Rightarrow f$ é decrecente en $(2, \infty)$; f' é cero en $x=2$.

g' é negativa en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty) \Rightarrow g$ é decrecente nos devanditos intervalos; g' é positiva en $(0,4)$, polo que g é crecente no devandito intervalo; g' é cero en $x=0,4$.



- b)** f ten un máximo en $x=2$ (á súa esquerda crece e á súa dereita decrece); g ten un mínimo en $x=0$ (á súa esquerda decrece e á súa dereita crece) e un máximo en $x=4$ (á súa esquerda crece e á súa dereita decrece).

17. A función do custo total de produción de x unidades dun determinado produto é $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$.

Define a función do custo medio por unidade con $C_M(x) = C(x)/x$. ¿A que nivel de produción será mínimo o coste medio por unidade?

Solución:

$$C_M(x) = x/2 + 3 + 200/x \Rightarrow C'_M(x) = 1/2 - 200/x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 200 ; C''_M(20) = 400/x^3;$$

$$C''_M(20) = 1/20 > 0 \Rightarrow \text{mínimo para } x = 20 \text{ unidades e un coste mínimo de 23.}$$

A solución negativa non ten sentido no problema.

18. Quérese construír o marco dunha ventá rectangular de 8 m^2 . O metro lineal de tramo horizontal custa 2,5 €, mentres que o metro lineal de tramo vertical custa 5 €. Determina:

- a)** as dimensións da ventá para que o custo do marco sexa mínimo; **b)** canto custa o marco?

Solución:

A función a optimizar é: $C(x,y) = 5x + 10y$;

A relación entre as variables: $x \cdot y = 8$; $\Rightarrow C(x) = 5x + 80/y \Rightarrow$

$$C'(x) = 5 - 80/x^2 \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow x = 4 \text{ (solución positiva)}$$

$$C''(x) = 160/x^3 \Rightarrow C''(4) = 5/2 > 0 \Rightarrow \text{O coste é mínimo para } x=4 \text{ m. e } y=2 \text{ m. sendo o coste mínimo } C_{\min} = 40 \text{ euros. A solución } -4 \text{ no ten sentido no problema.}$$

19. Estuda a curvatura e acha as coordenadas dos puntos de inflexión das seguintes funcións: **a)** $y = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$; **b)** $y = (2x - 3)^3$.

Solución:

a) $y' = 4x - x^2 \Rightarrow y'' = 4 - 2x \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$
Punto de inflexión $(2, 16/3)$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$sgn y'$	+	-
y	\cup	\cap

b) $y' = 6(2x-3)^2 \Rightarrow y'' = 24(2x-3) \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = 3/2 \Rightarrow$
Punto de inflexión $(3/2, 0)$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$sgn y'$	-	+
y	\cap	\cup

20. Acha os intervalos nos que as seguintes funcións son cóncavas e convexas, así como as coordenadas dos seus puntos de inflexión, se os teñen:

a) $y = \frac{x^2+1}{x}$; b) $y = \frac{x^2}{x^2-9}$

Solución:

a) $y' = 1 - 1/x^2 \Rightarrow y'' = 2/x^3 \Rightarrow \{Num > 0 \text{ e } Den = 0 \Rightarrow x=0\} \Rightarrow$
non ten puntos de inflexión.

	$(-\infty, 3/2)$	$(3/2, \infty)$
$sgn y''$	-	+
y	\cap	\cup

b) $y' = -\frac{18x}{(x^2-9)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{54(x^2+3)}{(x^2-9)^3} \Rightarrow$
 $\{Num > 0 \text{ e } Den = 0 \Rightarrow x=\pm 3(\text{triple})\}$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
$Sgn y''$	+	-	+
y	\cup	\cap	\cup

21. Descubre en que intervalos as seguintes funcións son cóncavas ou convexas, así como os seus puntos de inflexión:

a) $y = \frac{2x^2-5}{x+8}$ b) $y = \frac{1-x^2}{(x+3)^2}$

Solución:

a) $y' = 2 - \frac{123}{(x+8)^2} \Rightarrow y'' = \frac{246}{(x+8)^3} \Rightarrow$

$\begin{cases} Num > 0 \\ Den = 0 \Rightarrow x = -8 \end{cases} \Rightarrow$ Non ten punto de inflexión

	$(-\infty, -8)$	$(-8, \infty)$
$sgn y''$	-	+
y	\cap	\cup

b) $y = \frac{-2(3x+1)}{(x+3)^3}$
 $\Rightarrow y'' = \frac{12(x-1)}{(x+3)^4} \Rightarrow \begin{cases} Num = 0 \Rightarrow x = 1 \\ DEN > 0 \text{ en } R - \{-3\} \end{cases} \Rightarrow$
Punto de inflexión $(1, 9)$

	$(-\infty, 1) - \{-3\}$	$(1, \infty)$
$sgn y''$	-	+
y	\cap	\cup

22. Estuda a curvatura e descubre os puntos de inflexión das seguintes funcións:

a) $y = \ln(x^2+1)$; b) $y = (x^2+x) \cdot e^{x-1}$

Solución:

$$y = \frac{2x}{(x^2 + 1)} \Rightarrow y'' = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{Num} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \text{Den} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Puntos de inflexión $(-1, \ln 2)$; $(1, \ln 2)$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$\text{sgn } y''$	-	+	-
y	\cap	\cup	\cap

b) $y' = (x^2 + 3x + 1)e^{x-1} \Rightarrow y'' = (x^2 + 5x + 4)e^{x-1} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$; $x = -4$ e $x = -1$.

Puntos de inflexión $(-4, 12/e^5)$, $(-1, 0)$.

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, \infty)$
$\text{sgn } y''$	-	+	-
y	\cap	\cup	\cap