

Exercicios de Apoio

Exercicio nº 1.-

Acha: a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}{x^3 + 8x^2 + 11x - 20}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5 + 2x} - 7x}{3x + 8}$

Exercicio nº 2.-

Calcula: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{6-x}}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 25}{x^3 + 2x - 7}$

Exercicio nº 3.-

Descobre: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1/x})$

Exercicio nº 4.-

Calcula: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 3x^2 + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x + 5} - \frac{x^2}{x + 1} \right)$

Exercicio nº 5.-

Calcula: a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^3 - 4x^2 - 19x - 14}{x^2 - 49}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+9} - 3}{x^2};$

Exercicio nº 6.-

Estuda a continuidade de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Exercicio nº 7.-

Considérase a función real de variable real $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

a) Estuda a continuidade de $f(x)$ en $x = 1$; b) Esboza a súa gráfica.

Exercicio nº 8.-

Calcula as asíntotas de $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

Exercicio nº 9.-

Considérase a función real de variable real definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$

a) Determinar o seu dominio de definición; b) Obter as súas asíntotas.

Exercicio nº 10.-

Sexa $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{se } x < 1 \\ (x+a)^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Para que valores de a a función é continua?

Exercicio nº 11.-

Dada $f(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{se } x > 4 \\ \frac{x+4}{x-4}, & \text{se } x \leq 4 \end{cases}$, acha $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Solucións

Exercicio nº 1.-

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}{x^3 + 8x^2 + 11x - 20} &= \frac{0}{0} \text{ (ind)} = (\text{Por Ruffini}) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x+1)(x-3)}{(x+4)(x-1)(x+5)} = \\ &= -\frac{21}{5} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5 + 2x} - 7x}{3x + 8} &= \frac{-\infty + \infty}{-\infty} \text{ (ind)} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{5/3}}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{2/3}}{3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} = \infty \end{aligned}$$

Exercicio nº 2.-

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{6-x}}{x-2} &= \frac{0}{0} \text{ (ind)} = (\text{polo conxugado}) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{6-x})} \right) = \\ \frac{2}{4} &= \frac{1}{2} \\ \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 25}{x^3 + 2x - 7} &= \frac{-\infty}{-\infty} \text{ (ind)} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty \end{aligned}$$

Exercicio nº 3.-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1/x}) = -\infty \cdot e^0 = -\infty$$

Exercicio nº 4.-

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 3x^2 + 4} &= \frac{0}{0} \text{ (ind)} = (\text{Por Ruffini}) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x + 5} - \frac{x^2}{x+1} \right) &= \infty - \infty = \text{(ind)} = (\text{restamos}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 - 1)(x+1) - x^2(x^2 + 3x + 5)}{(x^2 + 3x + 5)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 5x^2 - x - 1}{x^3 + 4x^2 + 8x + 5} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2 \end{aligned}$$

Exercicio nº 5.-

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^3 - 4x^2 - 19x - 14}{x^2 - 49} &= \frac{0}{0} \text{ (ind)} = (\text{Por Ruffini}) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x+1)(x+2)}{(x+7)(x-7)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x+1)(x+2)}{x+7} = \frac{72}{14} = \frac{36}{7} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+9} - 3}{x^2} &= \frac{0}{0} \text{ (ind)} = (\text{polo conxugado}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2(\sqrt{3x+9} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x(\sqrt{3x+9} + 3)} = \frac{3}{0} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x(\sqrt{3x+9} + 3)} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x(\sqrt{3x+9} + 3)} = \frac{3}{0^+} = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Exercicio nº 6.-

Posible punto de descontinuidade $x=0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ é continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, e presenta una descontinuidade inevitable de salto finito en $x = 0$.

Exercicio nº 7.-

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} \Rightarrow \text{DEN} > 0 \Rightarrow \text{Non ten asíntotas verticais. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} \approx$$

$\approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{4x^2} = 1 \Rightarrow y_H = 1 \Rightarrow \text{Non ten asíntota oblicua, porque ten asíntota}$
horizontal $y_H = 1$, que se achega á función do seguinte modo:

$$\text{sgn}(f - y_H) = \text{sgn} \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} - 1 \right) = \text{sgn} \left(\frac{-4x}{4x^2 + 1} \right) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \rightarrow -\infty \Rightarrow f > y_H \\ < 0 & \text{se } x \rightarrow \infty \Rightarrow f < y_H \end{cases}$$

Exercicio nº 8.-

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$$

a) $\begin{cases} \text{NUM} = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \text{DEN} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{+} = -$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{-}{+} = -$	$\frac{+}{+} = +$

$$\Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [2, \infty)$$

b) Asíntotas verticais $x = -1$, $x = 1$. A función sempre tenderá a ∞ , porque sempre é positiva.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2}} = 1 \Rightarrow y_H = 1. \text{ A función } f \text{ vai sempre}$$

por debaixo de y_H , porque $x^2 - 4 < x^2 - 1$.

Exercicio nº 9.-

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{se } x < 1 \\ (x+a)^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow (1+a)^2 = 1 \Rightarrow 1+a = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$

Exercicio nº 10.-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{se } x < -1 \\ -2x^3 + b, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ e^x - a, & \text{se } 0 \leq x \end{cases} \text{ . Posibles puntos de descontinuidade } x=-1, x=0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + a) = 1 + a = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x^3 + b) = -2 + b \Rightarrow 1 + a = -2 + b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x^3 + b) = b = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - a) = 1 - a \Rightarrow b = 1 - a$$

Resolvendo o sistema obtense $a = 1$, $b = 0$.

Exercicio nº 11.-

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{se } x > 4 \\ \frac{x+4}{x-4}, & \text{se } x \leq 4 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+4}{x-4} = \frac{8}{0^-} = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x - 4) = 0$$