

Exercicios de autoavaliación

Exercicio nº 1.-

Calcula os determinantes das matrices seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix},$$

Exercicio nº 2.-

Simbolizar e calcular os menores e os adxuntos dos elementos a_{21} , a_{23} e a_{32} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 3.-

$$\text{Calcula: } |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad |B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Exercicio nº 4.-

$$\text{Calcula o determinante das seguintes matrices; } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 5.-

$$\text{Calcula o valor de } a \text{ para que o determinante da matriz } A \text{ sexa cero: } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 6.-

$$\text{Calcula todas as raíces da seguinte ecuación na incógnita } x: \begin{vmatrix} x & -1 & 2 \\ -1 & x & 2 \\ -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

Exercicio nº 7.-

$$\text{Sabendo que } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = 3, \text{ calcula } \begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix}$$

Exercicio nº 8.-

$$\text{Calcula o valor do determinante: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix}$$

Exercicio nº 9.-

Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 1$, calcula $\begin{vmatrix} c & b & a \\ k & h & g \\ f & e & d \end{vmatrix}$

Exercicio nº 10.-

Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3$, calcula $\begin{vmatrix} 2x & z & 3y \\ 2p & r & 3q \\ 2a & c & 3b \end{vmatrix}$

Exercicio nº 11.-

Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, comproba se teñen inversas e, en caso afirmativo, calcúlalas.

Exercicio nº 12.-

Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Determinése se A e B se poden invertir, e no seu caso, calcúlese a matriz inversa.

Exercicio nº 13.-

Considérase a matriz: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

- Determina os valores do parámetro real a para os cales existe a inversa da matriz A
- Obtén a inversa de A para a = 3

Exercicio nº 14.-

Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

- Calcula a matriz P que verifica $B \cdot P - A = C^t$ (C^t indica trasposta de C)
- Determina a dimensión da matriz M para que poida efectuarse o produto $A \cdot M \cdot C$
- Determina a dimensión da matriz N para que $C^t \cdot N$ sexa una matriz cadrada

Exercicio nº 15.-

Resolve a ecuación matricial $X \cdot A + A^t = X \cdot B$, sendo A^t a matriz trasposta de A

Sabemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercicio nº 16.-

Considéranse as matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B$ e $B \cdot A$

b) Discute se existe solución do sistema $AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo, resólveo utilizando o método de Gauss.

Exercicio nº 17.-

Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula a matriz X que verifica a ecuación $A \cdot X \cdot B = 2 \cdot C$

Exercicio nº 18.-

Determina a matriz X que verifica a ecuación $B \cdot X - A = 2 \cdot X$ sendo $A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Xustifica a resposta.

Exercicio nº 19.-

Estuda e resolve o sistema:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 0 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

Exercicio nº 20.-

Resolve o sistema de Cramer:
$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + 3z = 14 \\ 7x + 4y + 6z = 34 \end{cases}$$

Solucións

Exercicio nº 1.-

$$|A| = -2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 = -14$$

$$|B| = 12$$

Exercicio nº 2.-

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -44 \Rightarrow A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 44$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 8$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 6$$

Exercicio nº 3.-

$$|A| = -4$$

$$|B| = -24$$

Exercicio nº 4.-

$$|A| = 1$$

$$|B| = 0; \text{ porque } F_3 = 3F_1$$

Exercicio nº 5.-

$$|A| = 1 - a^2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow a = \pm 1. \text{ Obtense directamente desenvolvendo pola 3ª columna}$$

Exercicio nº 6.-

$$|A| = 0 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \text{ (Por Ruffini)} \Rightarrow x = -1 \text{ (dobre), e } x = 2$$

Exercicio nº 7.-

$$\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} \text{ (2 de cada columna)} = 2^3 \begin{vmatrix} x & z & y \\ m & p & n \\ a & c & b \end{vmatrix} \text{ (intercambio } C_2 \text{ por } C_3) =$$

$$= -8 \begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ a & b & c \end{vmatrix} \text{ (} F_1 \leftrightarrow F_3 \text{)} = 8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} \text{ (} F_2 \leftrightarrow F_3 \text{)} = -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -8 \cdot 3 = -24$$

Exercicio nº 8.-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix} (C2' = C2 - C1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a+2 \\ a^2 & 2a+1 & (a+2)^2 \end{vmatrix} ((a+2) \text{ de } C3) =$$

$$= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & 2a+1 & a+2 \end{vmatrix} (C3' = C3 - C2) = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & 2a+1 & 1-a \end{vmatrix} = (a+2) (1-a) =$$

$$= - (a+2) (a-1)$$

Exercicio nº9.-

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ k & h & g \\ f & e & d \end{vmatrix} (C1 \leftrightarrow C3) = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix} (F2 \leftrightarrow F3) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 1$$

Exercicio nº10.-

$$\begin{vmatrix} 2x & z & 3y \\ 2p & r & 3q \\ 2a & c & 3b \end{vmatrix} (2 \text{ de } C1 \text{ e } 3 \text{ de } C3) = 6 \begin{vmatrix} x & z & y \\ p & r & q \\ a & c & b \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C2 \leftrightarrow C3 \Rightarrow (-1) \\ F1 \leftrightarrow F3 \Rightarrow (-1) \\ F2 \leftrightarrow F3 \Rightarrow (-1) \end{pmatrix} = -6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -6 \cdot 3 = -18$$

Exercicio nº 11.-

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 2 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{existe } B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 12.-

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{existe } A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 13.-

$$|A| = a^2 - 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow \text{existe } A^{-1} \text{ para todo valor de } a \text{ distinto de } \pm 1$$

Exercicio nº 14.-

- a) Cálculase a matriz P a partir de $BP - A = C^t$
Cámbiase de termo A: $BP = C^t + A$
Multiplícase por B^{-1} : $B^{-1}(BP) = B^{-1}(C^t + A)$
Opérase: $P = B^{-1}(C^t + A)$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; B^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; (\text{adx}(B))^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; |B| = 2; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -\frac{3}{2} \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) A matriz A é de dimensión 2×3 ; C é de dimensión 3×2 .
Para poder realizar o produto $A \cdot M$, M debe ter 3 columnas.
Para poder realizar o produto $M \cdot C$, M debe ter 3 filas
A dimensión de M debe ser unha matriz cadrada de orde 3.
- c) Como C é de dimensión 3×2 ; A matriz C^t será de dimensión 2×3 , para poder realizar o produto $C^t \cdot N$, N debe ter 2 columnas e a matriz produto terá orde 2×2

Exercicio nº15.-

$$X \cdot A + A^t = X \cdot B; X \cdot A - X \cdot B = -A^t; X(A-B) = -A^t; X = -A^t(A-B)^{-1}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 16.-

$$a) AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \rightarrow \begin{cases} y - 4z = 2 \\ -3x - 8y - 10z = 5 \\ 2x + 7y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 7y = 0 \\ -3x - 8y - 10z = 5 \\ y - 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y - 10z = 5 \\ -3x - 8y - 10z = 5 \\ y - 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y - 10z = 5 \\ 0x - 5y + 20z = -10 \\ 0x + y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y - 10z = 5 \\ 0x + y - 4z = 2 \\ 0x + y - 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y - 10z = 5 \\ 0x + y - 4z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado. Solución: $z = t$; $y = 2 + 4t$; $x = -14t - 7$

Exercicio nº 17.-

Multiplicar á esquerda por A^{-1} : $X \cdot B = 2 \cdot A^{-1} \cdot C$

Multiplicar á dereita por B^{-1} : $X = 2 \cdot A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Cálculo da inversa de A: $|A| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

Calculo da inversa de B: $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$X = 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercicio nº 18.-

Sexa X a matriz: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x + z & -2y + u \\ 3z & 3u \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2x + 7 & 2y - 7 \\ 2z + 3 & 2u + 1 \end{pmatrix}$

Identifícanse as dúas matrices e resultan os sistemas:

$$\begin{cases} -2x + z = 2x + 7 \\ 3z = 2z + 3 \end{cases}; \begin{cases} -2y + u = 2y - 7 \\ 3u = 2u + 1 \end{cases}$$

As solucións son: $z = 3$; $x = -1$; $u = 1$; $y = 2$. A matriz X será: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercicio nº 19.-

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow$ É un sistema compatible determinado

$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$;

$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 1$;

$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1 \Rightarrow \text{Sol. } (1, 1, 1)$

Exercicio nº 20

$|A| = -1 \Rightarrow$ É un sistema compatible determinado

$|A_x| = -6; \quad |A_y| = 2; \quad |A_z| = 0 \Rightarrow$ Sol. (6, -2, 0)

É un sistema compatible determinado