

Exercicios de Apoio

1. Clasifica e, no seu caso, resolve o sistema:

$$\begin{cases} x - 5y = -3 \\ -3x + 15y = 9 \end{cases}$$

2. Transforma os sistema seguinte en outro sistema equivalente con dúas ecuacións.

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

3. Recoñece como graduados os seguintes sistemas e resólveos:

$$a) \begin{cases} 4x = 8 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x = 9 \\ x + y + 3z = 8 \\ 7x - 5z = 16 \end{cases}$$

4. Indica de que tipo é cada un dos seguintes sistemas.

$$a) \begin{cases} x - 6y + 8z = 3 \\ 4x - y + 2z = 15 \\ 5x - 7y + 10z = 8 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 5 \end{cases}$$

5. Estuda e resolve, no seu caso, os seguintes sistemas de ecuacións lineais:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 4x - 6y + 2z = 10 \end{cases}$$

6. Estuda e resolve o seguinte sistema de ecuacións lineais homoxéneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

7. Considérese o sistema:
$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

a) Discútase segundo os valores do parámetro real a .

b) Resólvase para $a = 5$.

8. Dado o sistema de ecuacións lineais
$$\begin{cases} 2x - 4y - az = -2 \\ -y - z = 0 \\ ax + 2z = 2 \end{cases}$$

- a) Discute o sistema en función dos valores de a .
b) Resolve o sistema para o valor $a = 2$.

9. Discute os seguintes sistemas segundo os valores de m e interprétaos xeometricamente:

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$$

10. Unha fábrica de xeados elabora tres tipos de xeados, H1, H2 e H3, a partir de tres ingredientes A, B e C. Deséxase saber o prezo unitario de cada ingrediente sabendo que o xeadado H1 se elabora con 2 unidades de A, 1 unidade de B e 1 unidade de C e supón un custo de 0.9 euros. O xeadado H2 elabórase con 1 unidade de A, 2 unidades de B e 1 unidade de C e supón un custo de 0.8 euros. O xeadado H3 componse de 1 unidade de A, 1 unidade de B e 2 unidades de C e supón un custo de 0.7 euros.

Solucións:

1. Clasifica e, no seu caso, resolve o sistema:

$$\begin{cases} x - 5y = -3 \\ -3x + 15y = 9 \end{cases}$$

Solucion:

Substitúese a segunda ecuación, pola que resulta de sumar a esta, a primeira multiplicada por 3.

$$\begin{cases} 3x - 15y = -9 \\ -3x + 15y = 9 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y = -3 \\ -3x + 15y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y = -3 \\ 0y = 0 \end{cases}; \begin{cases} A \text{ segunda ecuación ten infinitas solucións,} \\ \text{logo o sistema é compatible indeterminado} \end{cases}$$

Faise $y=k$ e substitúese na primeira ecuación, $x = -3 + 5k$. A solución exprésase así: **$(x,y) = (-3 + 5k, k)$**

2. Transforma os sistema seguinte en outro sistema equivalente con dúas ecuacións.

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Solucion:

A terceira ecuación é suma da primeira mais a segunda por -2 ; polo que o sistema dado é equivalente a $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$.

3. Recoñece como graduados os seguintes sistemas e resólveos:

$$a) \begin{cases} 4x = 8 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x = 9 \\ x + y + 3z = 8 \\ 7x - 5z = 16 \end{cases}$$

Solución:

a)

$$\begin{cases} 4x = 8 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{4} = 2 \\ y = \frac{2x-5}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Solución : } \mathbf{x = 2 \text{ e } y = -1/3}$$

b)

$$\begin{cases} 3x = 9 \\ x + y + 3z = 8 \\ 7x - 5z = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ 7x - 5z = 16 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ z = \frac{7x-16}{5} = 1 \\ y = 8 - x - 3z = 8 - 3 - 1 = 4 \end{cases}$$

A solución é: $x=3$, $y=4$ e $z=1 \Rightarrow (x,y,z) = (3,4,1)$

4. Indica de que tipo é cada un dos seguintes sistemas.

$$a) \begin{cases} x - 6y + 8z = 3 \\ 4x - y + 2z = 15 \\ 5x - 7y + 10z = 8 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 5 \end{cases}$$

Solucion:

a) Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 15 \\ 5 & -7 & 10 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1^a Fx(-4) + 2^a F \\ 1^a Fx(-5) + 3^a F \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 3 \\ 0 & 23 & -30 & 3 \\ 0 & 23 & -30 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow -2^a F + 3^a F \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 3 \\ 0 & 23 & -30 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \text{ Esta é a matriz asociada ao sistema } \begin{cases} x - 6y + 8z = 3 \\ 23y - 30z = 3 \\ 0z = -10 \end{cases}$$

A terceira ecuación non ten solución polo que o sistema é incompatible.

b) Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad 1^a Fx(-2) + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Esta é a matriz asociada ao}$$

sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 5y - 6z = 3 \end{cases}$; a segunda ecuación ten infinitas solucións, polo que o sistema é compatible indeterminado.

5. Estuda e resolve, no seu caso, os seguintes sistemas de ecuacións lineais:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 2 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 4x - 6y + 2z = 10 \end{cases}$$

Solucion:

a) Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1^a Fx(-2) + 2^a F \\ 1^a Fx(-1) + 3^a F \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a F + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta é a matriz asociada ao sistema: $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -y + 3z = 0 \\ 5z = -1 \end{cases}$ A terceira ecuación ten solución única polo que o sistema é **compatible determinado**.

Da 3ª ecuación sae $z = -1/5$; $y = -3/5$ e da 1ª ecuación $x = 12/5$.

A solución expresase así: **(x,y,z) = (12/5, -3/5, -1/5)**

b) Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 2 & 10 \end{pmatrix} \quad 1^a Fx(-2) + 2^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Esta é a matriz asociada ao}$$

sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ 0z = 0 \end{cases}$; a segunda ecuación ten infinitas solucións, polo que o sistema é **compatible indeterminado**.

A 3ª ecuación ten infinitas solucións, o sistema é compatible indeterminado, o número de parámetros vén dado pola diferenza entre o número de incógnitas menos o de ecuacións, neste caso tres menos unha igual a dúas, é un sistema biparamétrico.

Faise $x = k$ e $y = m$, polo que $2k - 3m + z = 5$: $z = 5 - 2k + 3m$.

A solución expresase así: **(x,y,z) = (k, m, 5-2k+3m)**

6. Estuda e resolve o seguinte sistema de ecuacións lineais homoxéneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Solucion:

Os sistemas lineais homoxéneos teñen sempre solución, é dicir, son compatibles.

Escríbese a matriz asociada ao sistema e tratase de graduar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1^a Fx(-3) + 2^a F \\ 1^a Fx(-2) + 3^a F \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a F - 3^a F \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a Fx(-3) + 3^a Fx7 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Esta é a matriz asociada}$$

ao sistema:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y + z = 0 \\ -17z = 0 \end{cases}$$
 A terceira ecuación ten solución única polo que o

sistema é **compatible determinado**.

A solución é a trivial **(x,y,z) = (0,0,0)**

7. Considérese o sistema:
$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a - 4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

a) Discútase segundo os valores do parámetro real a .

b) Resólvase para $a = 5$.

Solución:

Esríbese a matriz asociada ao sistema e trátase de graduar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & a-4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{1^a F + 2^a F \text{ e } 3^a F - 1^a F} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2^a F + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 0 & a-2 & 18 \end{pmatrix}. \text{ Esta é a matriz asociada ao sistema}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -2y + (a-3)z = 13 \\ (a-2)z = 18 \end{cases}$$

a) Se na terceira ecuación o coeficiente de z fose 0, isto é $a - 2 = 0$. A solución de esta ecuación é: **$a = -2$** .

Para o resto dos posible valores de a , e dicir, **$a \neq -2$** o sistema é **compatible determinado**.

b) Para $a = 5$, queda o sistema graduado
$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2y + 2z = 13 \\ 3z = 18 \end{cases}$$

De onde $z = 6$, $y = -1/2$, $x = -1/2$.

A solución é: **(x,y,z) = (-1/2, -1/2, 6)**

8. Dado o sistema de ecuacións lineais
$$\begin{cases} 2x - 4y - az = -2 \\ -y - z = 0 \\ ax + 2z = 2 \end{cases}$$

a) Discute o sistema en función dos valores de a .

b) Resolve o sistema para o valor $a=2$.

Solucion:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -a & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1^a F / 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -a/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1^a Fx(-a) + 3^a F \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -a/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a & \frac{a^2}{2} + 2 & a + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^a Fx(-2a) + 3^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -a/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2} + 2a + 2 & a + 2 \end{pmatrix}.$$

Esta é a matriz asociada ao sistema :
$$\begin{cases} x - 2y - \frac{a}{2}z = -1 \\ y - z = 0 \\ \left(\frac{a^2}{2} + 2a + 2\right)z = a + 2 \end{cases}$$

a) Se na terceira ecuación o coeficiente de z fose 0, isto é $\frac{a^2}{2} + 2a + 2 = 0$, $(a+2)^2$ é
decir $a = -2$.

Para $a = -2$ a terceira ecuación queda $0z = 0$; sistema **compatible indeterminado**.

Para $a \neq -2$, o sistema é **compatible determinado**.

b) Para $a=2$ queda o sistema graduado
$$\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ y - z = 0 \\ 8z = 4 \end{cases}.$$

De onde $z = 1/2$, $y = 1/2$ e $x = 1/2$

9. Discute os seguintes sistemas segundo os valores de m e interprétaos xeometricamente:

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$$

Solucion:

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1^a F \text{ e } 2^a Fx \ m^{-1} \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 0 & 1 - m^2 & 2m^2 - m - 1 \end{pmatrix}$$

Se $m \neq 1$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{Sistema compatible determinado.} \text{ E son dúas rectas coincidentes.}$$

Se $m = -1$ queda:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **Sistema incompatible.** Son dúas rectas paralelas.

Se $m \neq 1$ e $m \neq -1 \Rightarrow$ **Sistema compatible determinado.** Son dúas rectas secantes.

- 10.** Unha fábrica de xeados elabora tres tipos de xeados, H1, H2 e H3, a partir de tres ingredientes A, B e C. Deséxase saber o prezo unitario de cada ingrediente sabendo que o xead H 1 se elabora con 2 unidades de A, 1 unidade de B e 1 unidade de C e supón un custo de 0.9 euros. O xead H₂ elabórase con 1 unidade de A, 2 unidades de B e 1 unidade de C e supón un custo de 0.8 euros. O xead H3 componse de 1 unidade de A, 1 unidade de B e 2 unidades de C e supón un custo de 0.7 euros.

Solucion:

Sexan x, y, z os prezos unitarios respectivos dos ingredientes A, B e C.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0,9 \\ x + 2y + z = 0,8; \text{ reordenase o sistema; a primeira ecuación pasa a terceira.} \\ x + y + 2z = 0,7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0,8 \\ x + y + 2z = 0,7; \\ 2x + y + z = 0,9 \end{cases}$$

a matriz asociada ao sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0,8 \\ 1 & 1 & 2 & 0,7 \\ 2 & 1 & 1 & 0,9 \end{pmatrix}$ $2^a F - 1^a F$ e $3^a F - 2 \times 1^a F \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0,8 \\ 0 & -1 & 1 & -0,1 \\ 0 & -3 & -1 & -0,7 \end{pmatrix} \Rightarrow 3^a F - 3 \times 2^a F \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0,8 \\ 0 & -1 & 1 & -0,1 \\ 0 & 0 & -4 & -0,4 \end{pmatrix} \text{ desta matriz pásase ao}$$

sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0,8 \\ 0x - y + z = -0,1 \\ 0x + 0y - 4z = -0,4 \end{cases}$$

Da terceira ecuación: $z = -0,4/-4 = 4/40 \Rightarrow$ **z = 0,1 euros**

Na segunda ecuación: $-y + 0,1 = -0,1 \Rightarrow$ **y = 0,2 euros**

Na terceira ecuación: $x + 0,4 + 0,1 = 0,8$; **x = 0,3 euros**