

# Unidade 11: Probabilidade

1. Experimento aleatorio. Espacio mostral asociado.
  - 1.1. Concepto de experimento aleatorio.
  - 1.2. Espacio mostral. Sucesos.
  - 1.3. Operacións con sucesos: Unión, intersección e diferencia.
  - 1.4. Propiedades.
  - 1.5. Sucesos incompatibles.
2. Probabilidade.
  - 2.1. Frecuencia absoluta e relativa dun suceso.
  - 2.2. A probabilidade como límite de frecuencias.
  - 2.3. Definición axiomática de probabilidade.
  - 2.4. Propiedades da probabilidade.
  - 2.5. Regra de Laplace.
3. Probabilidade condicionada.
  - 3.1. Probabilidade da intersección.
  - 3.2. Teorema das probabilidades totais.
  - 3.3. Regra de Bayes.
4. Combinatoria.
  - 4.1. Permutacións.
  - 4.2. Variacións.
  - 4.3. Combinacións.

## Introdución

### ***Azar e necesidade***

As ciencias naturais ocúpanse da descrición da realidade nos seus múltiples aspectos, dedicando unha especial atención á predicción do comportamento dos sistemas físicos, o que obriga a establecer con claridade as relacións causa-efecto.

Os fenómenos que obedecen a unha multitude de causas e os debidos ó azar son moi difíciles de estudar con esas premisas. É doado comprender porque: As relacións causa-efecto son doadas de comprender cando unha causa produce directamente un efecto que podemos medir, en cambio é moito máis complexo entender as relacións nas que unha causa só varía as posibilidades de que aconteza un certo efecto.

Incluso na actualidade, a pesar dos estudos que o demostran, moitas persoas non aceptan que o fumar é nocivo. O seu argumento é que coñecen a alguén que fumaba moito e morreu ós 90 anos, pero esquecen que moitos outros fumadores contraeron cancro de pulmón: efectivamente, fumar non determina que se padeza a dita doenza, pero aumenta notoriamente o risco de padecela.

## Azar e determinación

Cando estudiamos a natureza, atopámonos con dous tipos de fenómenos:

**Fenómenos determinísticos:** Aqueles nos que podemos predicir o seu comportamento a partir das condicións nas que se producen (velocidade dun obxecto ó aplicarlle unha forza, deformación dun muelle ó colgarlle un peso, ...).

Resulta paradóxico que, en sentido estricto, os fenómenos determinísticos non poden existir, pois sempre hai algún factor de indeterminación (erros nas medicións, redondeos nos cálculos, rozamentos, etc.) que impiden que o resultado poda predicirse con total exactitude.

**Fenómenos aleatorios:** Non podemos predicir o resultado, ben porque intervén o azar, ben porque non podemos controlar tódalas variables que inflúen no proceso (lanzar un dado, resultado dun exame, estatura que vai ter unha persoa, etc).

Non podendo predicir o que vai suceder, intentaremos coñecer-las posibilidades de cada un dos resultados que poidesen acontecer. Esa medida das posibilidades de que algo se verifique é a probabilidade.

## Probabilidade

A probabilidade xurde coa correspondencia entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665) sobre os xogos de dados. Esa correspondencia serviu de base a un tratado publicado en 1657 por Huygens: *De ratiociniis in ludo aleae* (Sobre razoamentos relativos ós xogos de dados).

**Exercicio 11.1:** Un dos problemas que lle propuxeron a Pascal foi o seguinte: Un xogador aposta que en 8 lanzamentos consecutivos dun dado saca, polo menos, un 1. Despois de lanzar 3 veces sen obter o 1, o xogo interrómpese ¿Que parte da aposta se lle debe devolver?

# Probabilidade

## Terminoloxía

**Experimento aleatorio:** Experimento do que non podemos predicir os resultados e que se pode repetir as veces que se desexe nas mesmas condicións.

**Espacio mostral (E):** Conxunto de tódolos posibles resultados dun experimento aleatorio.

**Suceso:** Calquera subconxunto de **E**. Un suceso é un conxunto de resultados dun experimento aleatorio.

Podemos describir un suceso enumerando os resultados que o forman ou mediante unha condición.

**Suceso imposible  $\emptyset$ :** Suceso que non contén ningún resultado.

**Suceso seguro E:** Formado pola totalidade dos resultados.

### Exemplo:

**Experimento aleatorio:** Lanzar 1 dado e anotar a cara que sae.

**Resultados:** Saír 1, (1); saír 2, (2); ...; saír 6, (6).

**Espazo mostral:**  $E = \{(0), (1), (2), (3), (4), (5), (6)\}$

**Sucesos:**  $A = \{\text{saír par}\} = \{(2), (4), (6)\}$

$B = \{\text{saír maior que 8}\} = \emptyset$

$C = \{\text{saír 1}\} = \{(1)\}$

## Operacións con sucesos

De xeito semellante ós demais conxuntos, podemos efectuar diferentes operacións con sucesos

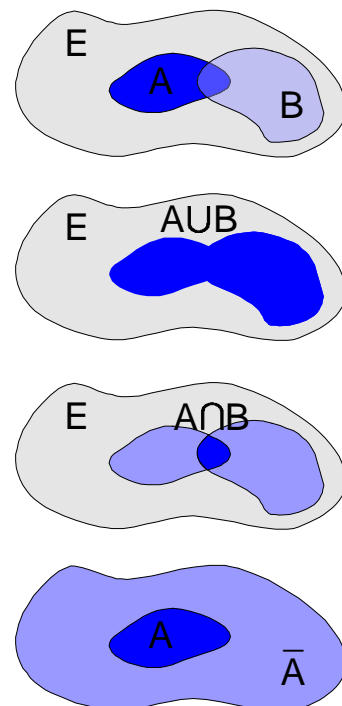
**Unión:** A unión de dos sucesos A e B é outro suceso  $A \cup B$  que está formado polos resultados que pertencen A ou a B. A unión verifícase cando se verifica algún dos sucesos que a forman.

**Intersección:** A intersección dos sucesos A e B é outro suceso  $A \cap B$  formado polos resultados que pertencen ós dous. A intersección verifícase cando se verifican os dous sucesos que a forman.

Cando a intersección de dous sucesos é o suceso imposible  $\emptyset$  diremos que os sucesos son **incompatibles**.

$$A \text{ e } B \text{ incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Se a unión de dous sucesos incompatibles é o suceso seguro E, diremos que son **complementarios**.



$$A \text{ e } B \text{ complementarios} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = E \end{cases}$$

O complementario dun suceso  $A$ , que simbolizaremos  $\bar{A}$ , é outro suceso que está formado por tódolos resultados que non están en  $A$ .

**Diferencia:**  $A-B$  é o suceso formado polos elementos de  $A$  que non están en  $B$ :

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

Ó estudar fenómenos aleatorios xurde a necesidade de medir dalgún xeito as posibilidades que ten cada suceso de verificarse, esa medida é a **probabilidade**.

Hai moitos xeitos de asignarlle a un suceso unha probabilidade:

- 1 Analizando teoricamente os resultados do experimento.  
Por exemplo, ó lanzar nunha moneda, poden darse dous resultados coas mesmas posibilidades, saír cara e saír cruz, polo que podemos definir as probabilidades de que saia cara e de que saia cruz como 0'5.
- 2 Non sempre dispoñemos de información sobre as posibilidades de verificarse cada resultado. Nestes casos podemos definir empiricamente a probabilidade repetindo o experimento aleatorio unha cantidade grande de veces.  
Así, aos sucesos que nos interesan, asignámoslles como probabilidade a frecuencia relativa coa que se verificaron.  
Por exemplo algúns xogadores da lotería primitiva estudian cales son os seis números que saíron máis veces nos sorteos anteriores e cubren o boleto con eses números pois entenden que "é o que ten máis probabilidade de saír".  
Por outra parte, ninguén cobre un boleto cos números 1, 2, 3, 4, 5, 6 porque pensa que é imposible que poda saír e, polo tanto, implicitamente estalle asignando 0 de probabilidade.
- 3 É claro que do xeito anterior a probabilidade dun suceso varia segundo o número de veces que se repita o experimento e os resultados que teñan saído. Se facemos que o número de veces que se repita o experimento tenda a infinito, a frecuencia relativa de cada suceso tende a estabilizarse, podemos definir a probabilidade do suceso como ese valor límite.

Chamando  $N$  ó número de veces que se repite o experimento e  $n$  ás veces nas que se verifica o suceso  $A$ :

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{N} \right)$$

**Exemplo:** Lanzamos unha moeda e anotamos a cara que sae. Na seguinte táboa aparecen os resultados obtidos ó repetir o experimento<sup>1</sup>:

Lanzamentos	100	200	500	1000	10000	50000
Nº caras C	48	89	242	483	4962	25027
Nº cruces +	52	111	258	517	5038	24973
Fr. caras	0'48	0'445	0'484	0'483	0'4962	0'50054
Fr. cruces	0'52	0'555	0'516	0'517	0'5038	0'49946

As frecuencias relativas vanse aproximando a 0'5.

Intuitivamente, podemos dicir que a probabilidade dun suceso é a frecuencia relativa dese suceso cando repetimos infinitas veces o experimento:

$$P(C) = \lim_{N \rightarrow \infty} [fr(C)] = 0'5 \text{ e } P(+) = \lim_{N \rightarrow \infty} [fr(+)] = 0'5$$

**Exercicio 11.2:** Discute a validez dos razoamentos utilizados polos xogadores de lotería primitiva que se mencionan no apartado 2 (nos xeitos de asignar a probabilidade).

## Axiomas da probabilidade

En Matemáticas, cando se quere elaborar a base teórica dun concepto, comparase con outros semellantes e establécense cales son as características básicas comúns a todos eles.

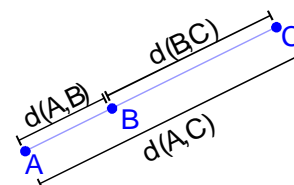
A probabilidade é unha *medida* polo que podemos comparala con outros tipos de medida, como a lonxitude:

- I. Medir unha lonxitude é comparar esa lonxitude con outra que eliximos como patrón, o metro.
- II. Unha lonxitude é sempre maior que 0.
- III. A distancias entre dous puntos aliñados é igual a suma das distancias deses puntos a un punto intermedio entre eles.

Podemos definir calquera medida a partir desas tres propiedades básicas que, no caso da probabilidade, quedan da forma:

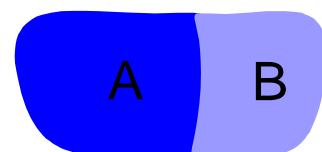
- I. Unidade de medida:  $P(E)=1$ .
- II. Valores sempre maiores ou iguais a 0:  
 $P(A) \geq 0$  para todo suceso  $A \subset E$
- III. A probabilidade da unión de dous sucesos incompatibles é a suma das probabilidades:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$$

### DESIGUALDADE TRIANGULAR



$$\text{Se } A \cap B = \emptyset \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

<sup>1</sup> Datos obtidos cun programa de simulación nunha calculadora programable.

Consecuencias dos axiomas da probabilidade son:

$$a) P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

**Demostración:**

$$P(E) = P(A \cup \bar{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ A \cap \bar{A} = \emptyset}}{=} P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$b) P(\emptyset) = 0$$

## Probabilidades de Laplace

É un xeito de definir a probabilidade cando tódolos resultados do experimento teñen as mesmas posibilidades de verificarse:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

A probabilidade dun suceso é a relación das posibilidades de que ocorra ese suceso entre todas as posibilidades que haxa na experiencia (suceso seguro).

**Exemplo:** Estudamos, nun grupo de alumnos, a cantos lles gusta o fútbol e obtemos os seguintes resultados:

	Alumnos	Alumnas
Gústalles o fútbol	8	10
Non lles gusta	4	12

Considera os sucesos  $A = \{\text{ser rapaza}\}$  e  $B = \{\text{gustarlle o fútbol}\}$ . Elixindo un alumno ó chou, calcula as seguintes probabilidades expresándoas como operacións entre os sucesos A e B:

- |  |   |
|--|---|
| a) ¿Probabilidade de ser rapaza?                                 | b) ¿Probabilidade de non ser rapaza?                              |
| c) ¿Cal é a probabilidade de que lle guste o fútbol?             | d) ¿Que porcentaxe son rapazas e gústalle o fútbol?               |
| e) ¿Cal é a probabilidade de que sexa home ou gústelle o fútbol? | f) ¿Cal é a probabilidade de que sendo rapaza lle guste o fútbol? |

**Solución:** Como as posibilidades de elixir a calquera son as mesmas (ao chou), podemos utilizar as probabilidades de Laplace.

$$\text{Casos posibles: } 8+4+10+12=34$$

$$a) \text{ Casos favorables: } 10+12=22 \quad P(A) = \frac{22}{34}$$

$$b) \text{ Casos favorables: } 8+4=12 \quad P(\bar{A}) = \frac{12}{34}$$

$$c) \text{ Casos favorables: } 8+10=18 \quad P(B) = \frac{18}{34}$$

d) Casos favorables: 10  $P(A \cap B) = \frac{10}{34} = 0'2941$

Para pasar unha probabilidade á porcentaxe só temos que multiplicar por 100: 29'41% son rapazas e gústalle o fútbol.

e) Casos favorables:  $8+4+10=22$   $P(\overline{A} \cup B) = \frac{18}{34}$

f) Neste caso, o número de casos posibles vese limitado ao número de rapazas, 22. O número de casos favorables é 10. As probabilidades, nas que se limita os casos posibles aos que verifiquen unha certa condición chamarémoslles probabilidades condicionadas:

Gustarlle o fútbol sendo muller:  $P(B/A) = \frac{10}{22} = 0'454$

**Exercicio 11.3:** Dunha bolsa na que hai 7 bólas brancas, 5 azuis e 3 verdes elíxense dúas bólas

a) ¿Cal é a probabilidade de que as dúas sexan brancas?

b) ¿Cal é a probabilidade de que polo menos unha sexa branca?

**Exercicio 11.4:** Para comproba-la eficacia dunha vacina contra a gripe, faise un estudo cunha mostra de 700 persoas obtendo os resultados que aparecen na táboa.

a) ¿Cal é a probabilidade de colle-la gripe?

b) ¿Cal é a probabilidade de estar vacunado?

c) ¿Cal é a probabilidade de colle-la gripe ou estar vacunado?

d) ¿Cal é a probabilidade de colle-la gripe e estar vacunado?

e) ¿Cal é a probabilidade de colle-la gripe estando vacunado?

	Collen a gripe	Non collen a gripe
Vacinados	135	365
Sen vacinar	84	116

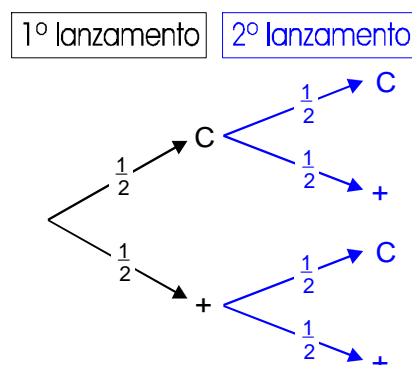
## Experimentos compostos

Un experimento composto é o que podemos describir mediante dous ou máis experimentos simples. Farémolo así cando nos resulte máis doado calcular as probabilidade que buscamos.

**Exemplo:** Lanzamos dúas moedas e anotamos as caras que saen. ¿Cal é a probabilidade de cada resultado?

**Solución:**

Podemos dividir o experimento en dous máis sinxelos:



- Lanzar unha moeda e anotar o resultado
- Lanzar a outra e anotar o resultado.

Como os resultados dun non inflúen nos do outro, os experimentos son **independentes**.

Podemos calcula-la probabilidade dun resultado do experimento composto a partir dos resultados dos experimentos simples.

**Probabilidade de saír 2 caras:**

$$P\{(C,C)\} = P\{(C \text{ no } 1^{\circ})\} \cdot P\{(C \text{ no } 2^{\circ})\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Fíxate que no experimento composto o suceso {saír dúas caras} é a intersección dos sucesos {saír cara no 1º lanzamento} e {saír cara no 2º lanzamento}

**Probabilidade de 1 cara e 1 cruz:**

$$P\{(C,+)\} = P\{(C \text{ } 1^{\circ})\} \cdot P\{(+ \text{ } 2^{\circ})\} + P\{(+ \text{ } 1^{\circ})\} \cdot P\{(C \text{ } 2^{\circ})\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Probabilidade de saír 2 cruces:**

$$P\{(+,+)\} = P\{(+ \text{ } 1^{\circ})\} \cdot P\{(+ \text{ } 2^{\circ})\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

## Probabilidade condicionada

Definimos a **probabilidade do suceso A condicionada a B** como a probabilidade de que ocorra A supoñendo que ocorre o suceso B:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ou sexa, considerando que os casos posibles son só aqueles nos que sucede B (os outros nos temos en conta).

En moitos casos, empregaremos esa definición para calcular a probabilidade da intersección de dous sucesos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

**Exercicio 11.5:** Nunha clase hai 23 alumnas e 12 alumnos. Elíxese un delegado/a e subdelegado/a.

- a) Cal é a probabilidade de que sexan dúas mulleres?
- b) ¿Cal é a probabilidade de que sexan dous homes?
- c) ¿Cal é a probabilidade de que sexan home e muller?
- d) Se para o cargo de delegado foi elixida unha muller, ¿cal é a probabilidade de que o subdelegado sexa home?



## Sucesos independentes

Dous sucesos A e B son independentes cando o feito de ocorrer un non inflúe na probabilidade de que ocorra o outro:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A) \text{ e } P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$$

Se dous sucesos son independentes, a probabilidade da súa intersección é o produto das probabilidades:

$$A \text{ e } B \text{ independentes} \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Exercicio 11.6:** Nun modelo de automóbil comprobouse que, antes dos 50 000 km, un 28% sofren algunha avaría no sistema eléctrico e un 12% fano no sistema mecánico.

- ¿Cal é a probabilidade de que un coche sufra os dous tipos de avaría?
- ¿Cal é a probabilidade de que un coche non teña ningunha desas avarías antes dos 50 000 km?

## Teorema das probabilidades totais

En moitas ocasións, é máis doado calcular a probabilidade dun suceso analizando todas as diferentes posibilidades nas que ese suceso pode acontecer.

Este teorema proporciona un xeito de facelo:

Se  $A_1, \dots, A_n$  verifican que:

- $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

Entón, calquera que sexa o suceso B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i)$$

**Demostración:**

$$P(B) = P(B \cap E) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right] \stackrel{\substack{\text{distributiva da } \cup \\ \text{respecto } \cap}}{=} P\left[\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right]$$

Como os  $A_i$  son disxuntos, os  $B \cap A_i$  tamén o serán e a probabilidade da súa unión será a suma das probabilidades:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right] = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) \stackrel{P(B \cap A_i) = P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i)}{=} \sum_{i=1}^n P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i)$$

**Exercicio:** Nunha cidade, un 39% son homes en idade de actividade laboral o e un 41% mulleres son mulleres en idade de actividade laboral. Entre eses homes, o 12% está no paro e entre esas mulleres, está no paro o 23%. ¿Cal é a porcentaxe total de parados?

**Solución:**

Non se pode simplemente sumar  $0'12+0'23$  porque esas probabilidades refírense a distintos espazos mostrais: homes e mulleres en idade laboral.

Podemos calcula-la probabilidade que nos piden facéndoo "a cachos" que non teñan coincidencias entre si:

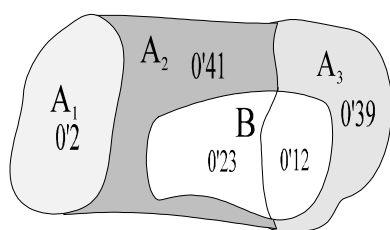
O primeiro cacho serían xubilados e nenos (o 20% restante da poboación), entre os que non computamos ningún parado; o segundo cacho serían homes en idade laboral (39% da poboación) e o terceiro mulleres en idade laboral (41% da poboación).

$$P(B \cap A_1) = P\left(\frac{B}{A_1}\right) \cdot P(A_1) = 0 \cdot 0'20$$

$$P(B \cap A_2) = P\left(\frac{B}{A_2}\right) \cdot P(A_2) = 0'23 \cdot 0'41$$

$$P(B \cap A_3) = P\left(\frac{B}{A_3}\right) \cdot P(A_3) = 0'12 \cdot 0'39$$

A probabilidade pedida será a suma desas tres probabilidades.



$A_1 = \{\text{xubilados e nenos}\}$

$A_2 = \{\text{mulleres}\}$

$A_3 = \{\text{homes}\}$

$B = \{\text{parados}\}$

## Regra de bayes

Sexan  $A_1, \dots, A_n$  unha familia completa de sucesos, entón, calquera que sexa o suceso B:

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i)}$$

**Demostración:**

Utilizando a definición de probabilidade condicionada obtemos:

$$P(A_i \cap B) = P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i)$$

$$P(A_i \cap B) = P\left(\frac{A_i}{B}\right) \cdot P(B) \Rightarrow P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Utilizando a fórmula das probabilidades totais e as relacións anteriores, queda:

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P\left(\frac{B}{A_i}\right) \cdot P(A_i)}$$

A regra de Bayes, utilízase, en moitas ocasións, para verificar a validez dunha hipótese.

**Exemplo:** Para comproba-la efectividade dunha vacina faise un ensaio sobre un certo grupo de persoas.

Ese grupo, E, divídese en varios grupos de control:

- $A_1$  adminístraselles a vacina.
- $A_2$  adminístraselles un placebo.
- $A_3$  non reciben tratamento.

O suceso B é non enfermarse.

As  $P(A_i)$  chámase probabilidade a *priori*.

As  $P\left(\frac{B}{A_i}\right)$  verosimilitudes (non enfermarse no caso de ser vacinado, de tomar o placebo ou de non tomar nada).

As  $P\left(\frac{A_i}{B}\right)$  probabilidade a *posteriori*, porque indican en que medida, o feito de que ocorrese B, se relaciona coa hipótese  $A_i$ .

**Exercicio 11.7:** Faise un estudio comparativo do funcionamento de 3 modelos de ordenadores durante 10.000 horas. O 20% dos do 1º modelo, o 35% do 2º e un 15% do 3º sufriron algún fallo. Se utilizamos 50 ordenadores do 1º modelo, 20 do 2º e 40 do 3º

- a) ¿Cal é a probabilidade de que falle un ordenador?
- b) ¿Se un ordenador fallou, cal é a probabilidade de que fose do 1º modelo?

**Exercicio 11.8:** Unha bolsa contén 4 bolas vermellas e 5 verdes e outra 6 bolas vermellas e 3 verdes.

- a) Se eliximos unha bola ó chou, ¿cal é a probabilidade de que sexa vermella?
- b) Se a bola elixida foi verde, ¿cal é a probabilidade de que fose da primeira bolsa?
- c) Eliximos dúas bolas, unha de cada bolsa, ¿Cal é a probabilidade de que as dúas teñan a mesma cor?

**Exercicio 11.9:** Carme e Pedro lanzan unha pelota a un branco. A probabilidade de que Carme dea no branco é  $\frac{1}{3}$  e a probabilidade de que dea Pedro é  $\frac{1}{4}$ . Supóñase que Carme lanza primeiro e que os dous rapaces vanse alternando para lanzar.

- a) Calcula a probabilidade de que o primeiro lanzamento que dea no branco sexa o 2º de Carme.
- b) ¿Cal é a probabilidade de que Carme dea no branco antes de que o faga Pedro?



# Ampliación

## Combinatoria

Para aplicar as probabilidades de Laplace é necesario contar os casos posibles e os casos favorables, cousa que non sempre é tan doado como parece.

**Exemplo:** Un señor cubre tódalas semanas unha aposta da primitiva ¿Cal é a probabilidade de que obteña un premio de 1ª categoría (acertar os seis números)?

**Solución:** Na primitiva elíxense seis números dun total de 49. Saber de cantos xeitos diferentes se pode facer esa elección (casos posibles) é realmente complicado.

Empecemos por problemas máis simples:

- Elixindo 1 número a resposta é inmediata: 49 posibilidades.
- Elixindo 2 serían: 49 para o 1º e 48 para o 2º (calquera menos o de antes), en total 49·48. Pero dese xeito contamos dúas veces cada elección segundo a orde no que elixamos os números (por exemplo o 5 e o 12, ou o 12 e o 5), polo que as posibilidades serán a metade:  $49 \cdot 48 / 2$ .
- Elixindo 3:  $49 \cdot 48 \cdot 47$  dividido por tódolos xeitos posibles de ordenar tres números, 6:  $(49 \cdot 48 \cdot 47) / (3 \cdot 2)$
- ....
- Elixindo 6:  $(49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 44) / (6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2) = 13.983.816$

A **Combinatoria** proporciónanos unha serie de fórmulas e procedementos para contar de cantos xeitos diferentes se pode facer unha elección de varios obxectos de entre unha colección.

## Fórmulas combinatorias

Queremos saber de cantos xeitos podemos elixir grupos de  $m$  obxectos de entre unha colección formada por  $n$  obxectos.

Loxicamente, segundo fagamos a elección, teremos máis ou menos xeitos diferentes de facela. En particular, dependerá de si debemos ter en conta a orde ou non e de si pode repetirse un mesmo obxecto en cada elección.

**Exemplo:** Nunha clase queremos elixir 2 persoas para ocupar os postos de delegado e subdelegado respectivamente. ¿Importa a orde no que se elixen esas dúas persoas? ¿Pode repetirse unha mesma persoa nunha elección?

**Solución:** A resposta a primeira pregunta é SI, posto que non é equivalente elixir a Manolo para delegado e María subdelegada que elixir a María delegada e Manolo subdelegado. Cambiando a orde cambiamos a elección.

A resposta a segunda cuestión é NON, non podemos elixir a mesma persoa para delegado e subdelegado.

**Exemplo:** Cubrir unha primitiva consiste en elixir 6 números dun total de 49. ¿importa a orde na que se fai? ¿Pode repetirse un número?

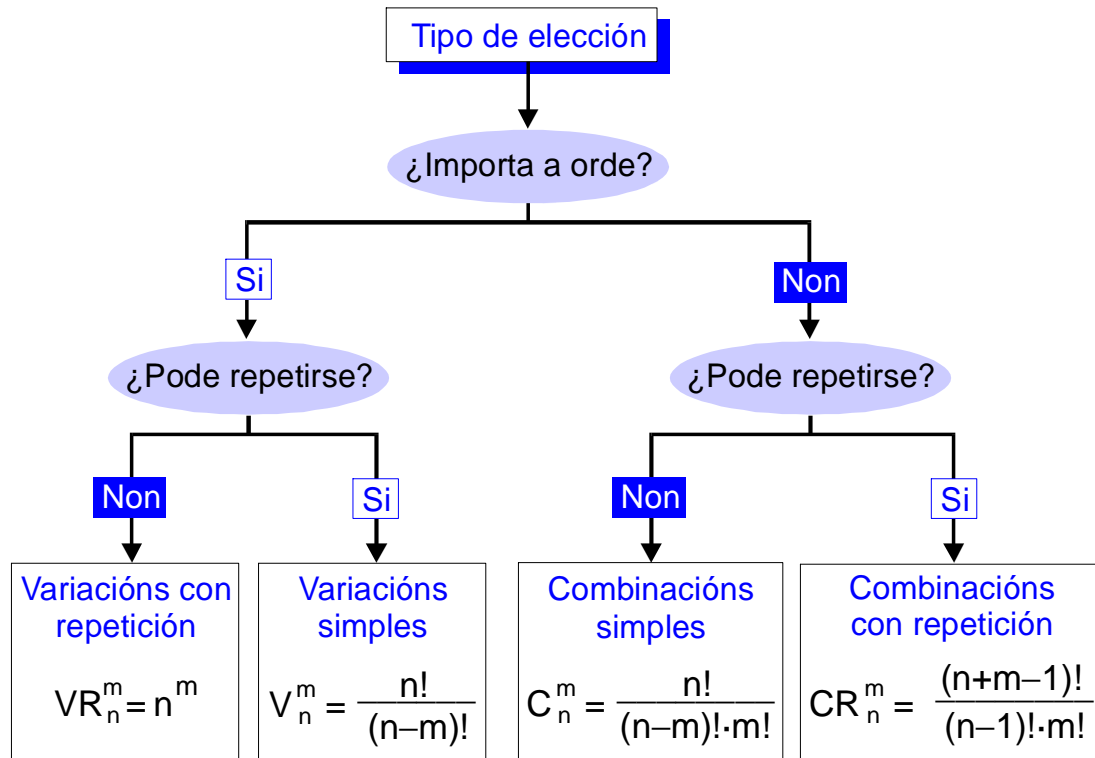
**Solución:** Claramente NON pode repetirse (non podemos marcar dúas veces o mesmo número) e NON importa a orde no que elixamos os números, marcar 2, 4, 14, 15, 17, 32 é o mesmo que marcar 4, 2, 15, 14, 32, 17.

- **Factorial dun número natural:** Nas fórmulas combinatorias aparece o produto dun número por tódolos números naturais máis pequenos agás o 0, é o que chamamos factorial dun número e representámolo cun !:  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$   
Por cuestións de notación  $0! = 1$ .

- **Principais fórmulas combinatorias:** Son as correspondentes a variacións, permutacións e combinacións

Para descubrir que fórmula debe usarse en cada caso debemos contesta-las seguintes preguntas:

- ¿Tense en conta a orde nos elementos de cada elección? **Dito doutro xeito, cambiando a orde dos elementos ¿resultan eleccións diferentes?**
- ¿Pode repetirse un mesmo elemento nunha elección?



**Exemplo:** Nunha clase de 24 alumnos ¿De cantos xeitos se pode elixir un delegado e un subdelegado?

**Solución:** Debemos ter en conta a orde e non pode repetirse nunha mesma elección un alumno, polo tanto son variacións de 24 elementos elixidos de 2 en 2:

$$V_{24}^2 = \frac{24!}{(24-2)!} = 24 \cdot 23 = 552$$

**Exemplo:** ¿Cantos números naturais de tres cifras se poden facer cos díxitos 1,2,3,4,5?

**Solución:** Debemos ter en conta a orde (non é o mesmo 123 que 321) e poden repetirse (por exemplo 122), polo tanto trátase de variacións con repetición:

$$VR_5^3 = 5^3 = 125$$

**Exemplo:** ¿De cantos xeitos se pode sentar á mesa unha familia de cinco membros?

**Solución:** Debemos ter en conta a orde e non poden repetirse (xa que precisamente queremos saber de cantas formas diferentes podemos ordenalos), polo tanto trátase de variacións. Cando se elixe a totalidade da colección en cada elección, as variacións reciben o nome de permutacións. A fórmula é:

$$P_5 = V_5^5 = 5! = 120$$

**Exemplo:** ¿De cantos xeitos diferentes podemos elixir unha comisión de 3 alumnos dunha clase de 15?

**Solución:** Dado que a orde da elección NON ten importancia e que NON poden repetirse un elemento nunha elección, trátase de combinacións.

$$C_{15}^3 = \binom{15}{3} = \frac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$$

**Exemplo:** ¿Cantos resultados posibles hai o lanzar tres dados?

**Solución:** En cada lanzamento obtemos tres valores dunha colección de 6. A orde da elección NON ten importancia e pode repetirse unha mesma cara, trátase de combinacións con repetición:

$$CR_6^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

**Exemplo:** Cubrindo unha aposta da primitiva, ¿cal é a probabilidade de acertar un premio de 2ª categoría (acertar 5)?

**Solución:** Dado que tódolos resultados son equiprobables, podemos utilizar as probabilidades de Laplace.

- **Casos posibles:** Xeitos de elixir 6 elementos dunha colección de 49 sen ter en conta a orde e sen que podan repetirse:

$$C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = 13983816$$

- **Casos favorables:** Xeitos de acertar 5 dun total de 6 que marcamos nesa aposta.

$$C_6^5 = \binom{6}{5} = \frac{6!}{(6-5)! \cdot 5!} = 6$$

- **Probabilidade:**  $\frac{6}{13983816} = 0'00000043$