

Unidade 8: Funcións elementais

1. Funcións polinómicas.
2. Funcións racionais.
3. Funcións exponenciais e logarítmicas.
4. Funcións trigonométricas.

Introducción

Funcións

O concepto de función como relación entre magnitudes é moi antigo: os matemáticos gregos sabían que a lonxitude dunha circunferencia obtense multiplicando o seu diámetro pola constante π , Galileo descubriu que o espacio que percorre un corpo o caer é igual ó cadrado do tempo multiplicado por 5, etc.

Sen embargo, o xeito de expresar esa relación, a notación, cambiou moito co paso do tempo: na antiga Grecia preferían facer relación a conceptos xeométricos (a función de Galileo expresaríana dicindo que a lonxitude percorrida polo móbil é cinco veces a área dun cadrado de lado igual ó tempo) e só coas aportacións de Descartes empezouse a utilizar fórmulas tal como hoxe as entendemos.

A invención das fórmulas e do cálculo simbólico foi un longo proceso que fixo posible as actuais Matemáticas e, o mesmo tempo, algo que por ser totalmente cotiá non se valora como merece.

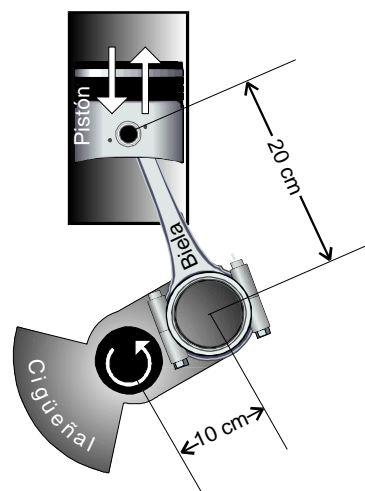
Actividade 8.1: Aplicando a Lei dos Gases Perfectos, atopa a fórmula que describe o volume que ocupa 1 mol de H_2 a temperatura normal segundo a presión.

Actividade 8.2: Unha cepa bacteriana reproducése por bipartición de xeito que, cada día, duplícase o número de individuos. Atopa a fórmula da función que describe o número de individuos segundo o tempo dun cultivo formado por 150000 bacterias desa cepa.

Actividade 8.3: As substancias radiactivas desintéganse (transfórmanse noutras e en enerxía ó emitir radiacións) de xeito que, cada certo tempo chamado período de semidesintegración, a cantidade de substancia redúcese a metade.

Dispoñemos dunha mostra de 4 g dunha substancia con período de semidesintegración de 1 ano, atopa a fórmula da función que describe a cantidade desa substancia que hai na mostra segundo o tempo.

Actividade 8.4: Un motor de explosión ten un cigüeñal cun radio de 10 cm e unha biela de 20 cm de lonxitude. Atopa a fórmula da función que describe a altura do pistón segundo o radio de xiro do cigüeñal.



Funcións elementais

Funcións elementais

Diremos que unha función é elemental cando ven descrita por unha fórmula simple.

As funcións elementais son continuas e derivables as veces que se queira en tódolos puntos do seu dominio. Faremos un estudo das máis significativas.

Funcións polinómicas

Son funcións que teñen por fórmula un polinomio, é dicir, que as únicas operacións que lle afectan a variable independente son produtos, potencias de expoñente natural e sumas.

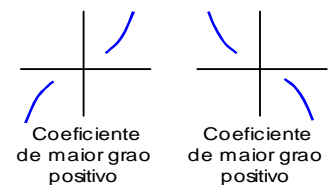
O dominio das funcións polinómicas é todo \mathbb{R} e non teñen asíntotas de ningún tipo.

Desempeñan un papel fundamental porque podemos aproximar calquera función, coa exactitude que desexemos, utilizando funcións polinómicas.

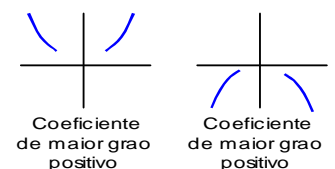
Para representar graficamente as funcións polinómicas é fundamental estudar crecemento, extremos relativos e tamén a paridade do expoñente do termo de maior grao.

Paridade: O tipo de gráfica depende de si o expoñente de maior grao é par ou impar:

1. **Impar:** As puntas da gráfica tenden a $\pm\infty$ pero con signos diferentes.



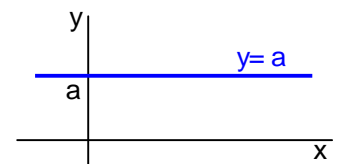
2. **Par:** As puntas tendenden a $\pm\infty$ per, neste caso, as dúas puntas co mesmo signo.



Funcións de grao 0, $f(x)=a$

O valor da función non varia ó variar x , polo que reciben o nome de funcións constantes.

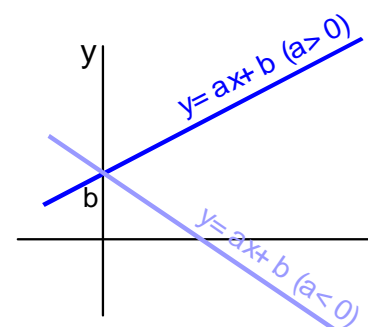
A gráfica é unha recta horizontal que corta ó eixe Y no punto $(0,a)$.



Funcións de grao 1, $f(x)=ax+b$

Son as funcións que describen unha maior cantidade de fenómenos físicos.

A súa gráfica é unha recta crecente, cando $a>0$, ou decrecente se $a<0$.



O coeficiente a determina a inclinación da gráfica e o b a ordenada na orixe.

Exercicio 8.1: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$f_1(x) = 2x$$

$$f_2(x) = 2x - 3$$

$$f_3(x) = 2x + 1$$

Explica como influe o valor do termo independente na gráfica.

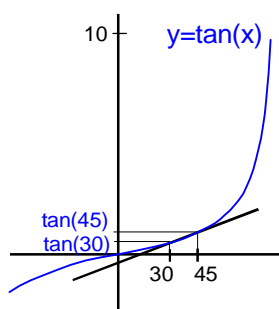
Exercicio 8.2: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$f_1(x) = 2x$$

$$f_2(x) = -3x$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x$$

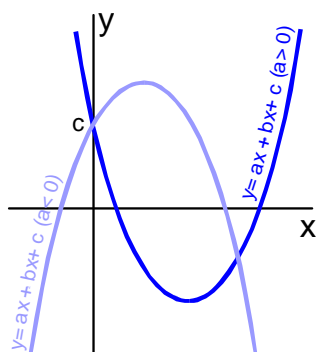
Explica como influe o valor do coeficiente de x na gráfica.



Interpolación e extrapolación

En ocasións, cando coñecemos dous valores dunha función e queremos calcular un terceiro, aproximamos a función cunha función de grao 1. Este procedemento coñécese como interpolación lineal (cando o valor descoñecido está entre os coñecidos) ou extrapolación lineal (se o valor a calcular está antes ou despois dos coñecidos).

Exercicio 8.3: Sabendo que $\tan(30)=0.5774$ e que $\tan(45)=1$ calcular, aproximadamente, $\tan(42)$ (interpolación) e $\tan(50)$ (extrapolación).



Funcións de grao 2, $f(x)=ax^2+bx+c$

É unha función par. A súa gráfica é unha parábola e, polo tanto, simétrica en relación a un eixe vertical que pase polo vértice. Os valores da función coinciden a ámbolos dous lados do vértice.

Se $a > 0$ é cóncava cara arriba e ten un mínimo absoluto na abscisa correspondente ó vértice.

Se $a < 0$ é cóncava cara abaixo e a función ten un máximo absoluto na abscisa correspondente ó vértice.

Exercicio 8.4: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = -2x^2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Explica como inflúe o valor do coeficiente de x^2 na gráfica.

Exercicio 8.5: Atopa o máximo da función $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$

Funcións de grao 3, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

O grao do polinomio determina a forma xeral da gráfica:

- Se é par, será similar a unha parábola, coas dúas puntas apuntando no mesmo sentido.
- Se é impar, as puntas apuntarán en sentidos contrarios.

As gráficas das funcións de grao tres serán deste último tipo.

Poden ter dous extremos relativos (un máximo e un mínimo) ou non pero sempre teñen un punto de inflexión.

Estas funcións coñécense tamén como “cúbicas”.

Exercicio 8.6: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$f_1(x) = x^3$$

$$f_2(x) = x^3 - 4x$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{3}x^3$$

$$f_4(x) = -x^3 + x^2$$

Describe a forma de cada unha indicando as súas principais características.

Exercicio 8.7: Fai un estudo analítico (crecemento e extremos) das gráficas das funcións $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^3 - 12x + 2$.

Funcións racionais

Son as funcións que teñen por fórmula un cociente de polinomios.

Caracterízanse porque poden existir números reais que non pertencen ao seu dominio (as raíces do denominador) e, polo tanto, poden ter asíntotas verticais.

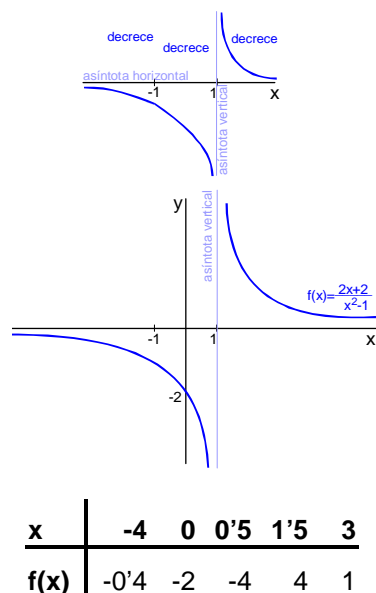
En parte, a súa gráfica será semellante á do polinomio de grao a diferenza entre o grao do numerador e do denominador agás pola existencia de asíntotas verticais e extremos.

Grao do numerador é menor co do denominador, ó eixe X é unha asíntota horizontal.

Graos iguais, aproxímarase a unha recta horizontal (hai unha asíntota horizontal).

Grao do numerador unha unidade maior co denominador, a gráfica aproxímarase a unha recta con pendente distinta de 0 (asíntota oblicua).

Grao do numerador 2 mais co denominador, aproxímarase a unha parábola (non ten asíntota oblicua nin horizontal).



Exemplo: Dada a función $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-1}$, estudia cal é o seu dominio, comproba se ten asíntotas e debuxa a súa gráfica.

Solución: En principio non poden pertencer ó dominio da función as raíces do denominador, xa que non podemos dividir entre 0.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

O dominio son tódolos números reais agás o 1 e o -1.

Para que unha recta $x=a$ sexa unha asíntota vertical é necesario que $x=a$ non pertenza ó dominio da función e que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

$$x = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x-1} = -1$$

A recta $x=-1$ non é unha asíntota vertical da función.

$$x = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+2}{x^2-1} = \frac{2}{0} = \pm \infty$$

A recta $x=1$ é unha asíntota vertical.

Sabemos que a recta $y=0$ (eixe das X) é unha asíntota horizontal.

Antes de darlle valores, estudiamos o crecemento e os extremos relativos. Dado que en 1 e en -1 non existe función, debemos engadir eses valores ós posibles extremos para estudar o crecemento.

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1) - (2x+2) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2 - 4x - 2}{(x^2-1)^2}$$

Os posibles extremos son os puntos que anulan a derivada:

$$-2x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = -1$$

O único posible extremo é $x=-1$, que non pertence ó dominio. A función non ten extremos relativos. Estudiamos o crecemento:

- $(-\infty, -1)$: $f'(-2) = -0'2 < 0$, $f(x)$ decrece.
- $(-1, 1)$: $f'(0) = -2 < 0$, decrece.
- $(1, +\infty)$: $f'(2) = -2 < 0$, decrece.

Exemplo: Dada a función: $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$

Estudia cal é o seu dominio, comproba se ten asíntotas e debuxa a súa gráfica.

Solución: Non poden pertencer ó dominio da función as raíces do denominador: $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

O dominio son tódolos números reais agás o 2.

Estudiamos se ten asíntotas: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x-2} = \frac{8}{0} = \pm\infty$

A recta $x=2$ é unha asíntota vertical.

Estudiamos o crecemento e os extremos relativos e damos valores:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-2) - x^3 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}$$

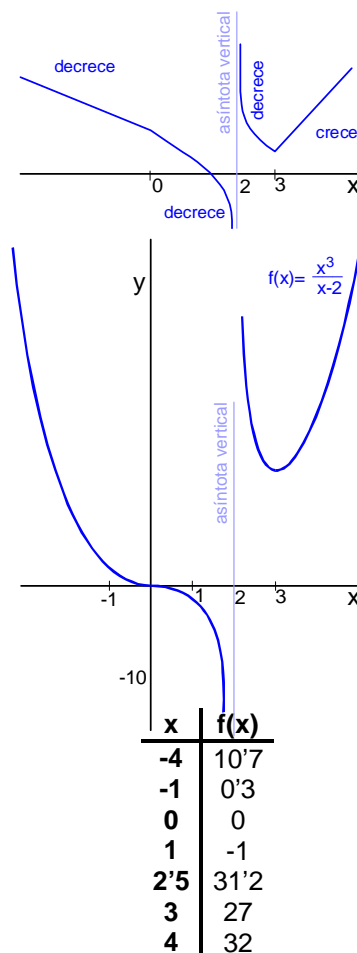
$$2x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Os posibles extremos son $x=0$ e $x=3$. Estudiamos o crecemento:

- $(-\infty, 0]$: $f'(-2) < 0$, $f(x)$ decrece.
- $[0, 2)$: $f'(1) < 0$, decrece.
- $(-2, 3]$: $f'(2'5) < 0$, decrece
- $[3, +\infty)$: $f'(4) > 0$, crece.

En $x=0$ hai un punto de inflexión con tanxente horizontal e en $x=3$ hai un mínimo relativo.

A hora de facer a gráfica ten en conta que a diferenza de graos é 2, polo que a gráfica semellará unha parábola.



Exercicio 8.8: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x} & f_2(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} & f_3(x) &= \frac{x}{x^2 + 1} \\ f_4(x) &= \frac{x^2}{x^2 - 1} & f_5(x) &= \frac{-x^2}{x^2 - 1} & f_6(x) &= \frac{x^2}{x - 1} \end{aligned}$$

Describe a forma de cada unha indicando as súas principais características e intenta obter algunha conclusión sobre as gráficas deste tipo de funcións.

Exercicio 8.9: Estudia analiticamente as gráficas das seguintes funcións (dominio, asíntotas, crecemento e extremos):

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

b) $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$

Funcións periódicas

Na natureza é frecuente que un fenómeno se repita ciclicamente: As subidas e baixadas do nivel do mar, a duración do día ó longo dun ano, o movemento das estrelas no ceo, a posición dunha partícula que vibra.

Para a descrición dalgúns destes fenómenos utilízanse as funcións periódicas que, do mesmo xeito que os ciclos da natureza, repiten os seus valores de xeito periódico.

Funcións periódicas son, por exemplo, o seno, o coseno e a tanxente utilizando o ángulo como variable independente.

Esas funcións reciben o nome de funcións trigonométricas.

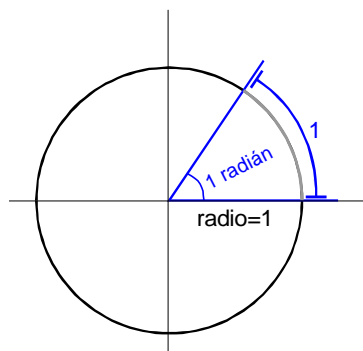
Se ben podemos seguir utilizando os graos como unidade de medida para a variable independente (o ángulo) resulta moito máis operativo medir os ángulos nunha nova unidade que chamaremos radián.

Radiáns

Para medir ángulos trazamos unha circunferencia de centro no vértice do ángulo.

Esa circunferencia divídese en 360 partes, cada unha é 1 grao, que a súa vez se divide en 60 partes, minutos, que a súa vez se divide en outras 60 partes, segundos.

É un sistema que se basa no sistema de numeración sesagesimal da babilonia de fai 3000 anos.



Outro xeito de medir ángulos é, en lugar de dividir a circunferencia en partes, medir o arco que abarca ese ángulo.

Un ángulo de **1 radián** é o que abarca un arco de igual lonxitude co radio.

A medida dun ángulo, en radiáns, será a lonxitude do arco que abarca dividido polo radio. É mais doado se a circunferencia é de radio 1 (trigonométrica) pois, nese caso, non é necesario dividir.

Deste xeito, medir ángulos equivale a medir lonxitudes.

Podemos transformar facilmente graos en radiáns e viceversa con só ter en conta que o arco que abarca un ángulo de 360° é unha circunferencia e a súa lonxitude é 2π . Polo tanto 180° equivalen a π radiáns, a proporción deberá ser a mesma en calquera ángulo:

$$\frac{\text{radiáns}}{\text{graos}} = \frac{\pi}{180}$$

Exemplo: Calculemos a derivada da función seno en $x=0$ (0 é o único ángulo co mesmo valor en graos e en radiáns) utilizando as dúas unidades de medida, graos e radiáns.

Solución: Obtemos un límite que no presente curso non podemos calcular alxebricamente, pero si podemos intentar obter o seu valor mediante aproximacións (asegúrate de por a calculadora no modo correspondente a cada unha das unidades: DEG para graos e RAD para radiáns):

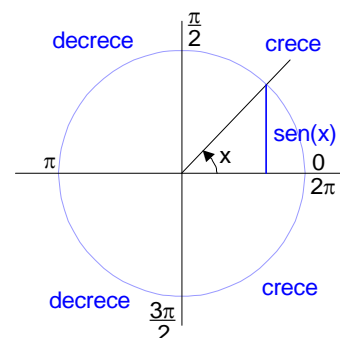
$$\text{sen}'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

En graos		En radiáns	
5°	0'0174311	0'04	0'999733
1°	0'0174524	0'009	0'999986
0'01	0'0174532	0'00009	0'999999
$\text{sen}'(0) = \frac{\pi \cdot \cos(0)}{180}$		$\text{sen}'(0) = \cos(0) = 1$	

Graos	Radiáns
0	0
30	$\frac{\pi}{6} = 0'52$
45	$\frac{\pi}{4} = 0'78$
90	$\frac{\pi}{2} = 1'57$
180	$\pi = 3'14$
270	$\frac{3\pi}{2} = 4'71$

Funcións seno e coseno

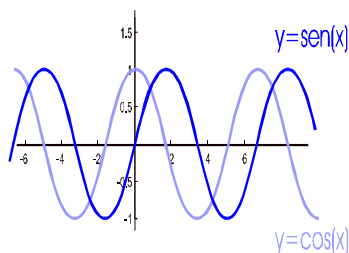
O seno e o coseno son as funcións periódicas máis simples. Utilízanse para a descrición de todo tipo de fenómenos periódicos, en especial os que en Física reciben o nome de movementos harmónicos.



Podemos estudar o crecemento e os extremos da función seno (e do coseno) utilizando a circunferencia trigonométrica:

- $[0, \pi/2]$: A función seno crece.
- $[\pi/2, \pi]$: Decrece.
- $[\pi, 3\pi/2]$: Decrecendo (valores cada vez máis negativos).
- $[3\pi/2, 2\pi]$: Crece.
- En $\pi/2$ hai un máximo e en $3\pi/2$ un mínimo.

As gráficas do seno e do coseno son semellantes (teñen a mesma forma), en efecto:

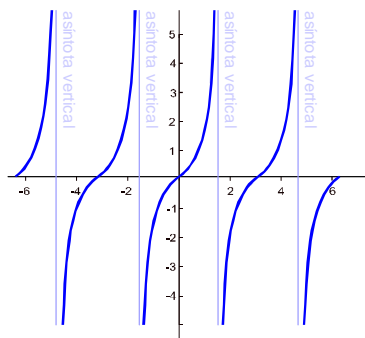


- Sabemos que o seno dun ángulo é igual ó coseno do seu complementario e viceversa: $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- Ademais, o coseno dun ángulo é igual o coseno do seu oposto: $\cos(x) = \cos(-x)$.

$$\text{Obtemos que } \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

- Esa relación tradúcese en que as gráficas da función seno e da función coseno teñen a mesma forma pero unha está desfasada en relación á outra: Cambiar x por $x - \frac{\pi}{2}$ equivale a trasladar a orixe ó punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Exercicio 8.10: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, investiga como inflúen na gráfica dunha función do tipo $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ os valores dos parámetros a , b e c (lembra que, en inglés, seno é sin)



Función tanxente

A diferenza do seno e do coseno, o dominio da función tanxente non é todo \mathbb{R} .

Non hai tanxente cando o coseno é 0:

$$-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

Neses puntos a función tanxente ten unha asíntota vertical, por

exemplo en $\pi/2$: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan(x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{0} = \pm\infty$

Funcións exponenciais

En moitos fenómenos reais atopámonos con funcións que aumentan ou diminúen proporcionalmente ós seus valores. Por exemplo a poboación, a desintegración radiactiva, o interese composto, a inflación, etcétera.

Exemplo: Chámase período de semidesintegración dunha substancia radiactiva ó tempo que tarda en reducirse a metade unha certa cantidade desa substancia. O período de semidesintegración é unha característica de cada substancia radiactiva así, por exemplo, o período de semidesintegración do C_{14} é de 5570 anos.

Medindo o contido de C_{14} que conserve un fósil podemos saber a súa antigüidade, pois mentres o organismo estaba vivo, recuperaba o C_{14} que se perdía por desintegración pero ó morrer o C_{14} xa non se renova e vai devecendo pouco a pouco.

Un fósil contiña, cando se formou, 3 g de C_{14}

- Atopa a función que describe o contido de C_{14} do fósil.
- Se na actualidade contén 0'04 g de C_{14} ¿Cal é a súa idade?

Solución: a) Sabemos que cada 5570 anos a cantidade de C_{14} redúcese a metade. Podemos construír unha táboa con algúns valores desa función. Consideramos cada unidade de tempo como un período de semidesintegración.

Ese tipo de funcións coa variable independente no expoñente reciben o nome de funcións exponenciais.

- A idade será o tempo que tarda a función que describe a cantidade de C_{14} en acadar o valor 0'04:

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0'04 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0'0133$$

Como non coñecemos a operación inversa a “elevar a x”, non podemos despegar a x nesa ecuación. Si podemos buscar unha solución aproximada coa axuda dunha calculadora:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0'063 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0'0039 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0'015 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0'007 \rightarrow x \approx 6$$

O fósil ten unha antigüidade aproximada de $6 \cdot 5570 = 33420$ anos.

Se consideras anos como unidade de tempo, a función será soamente un pouco máis complicada.

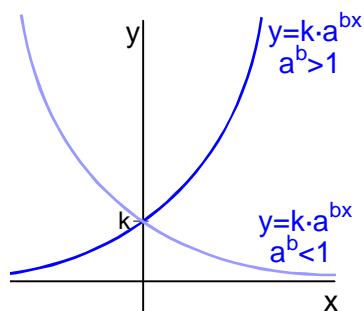
Tempo en períodos	C_{14}
0	3
1	$3 \cdot \frac{1}{2} = 1'5$
2	$1'5 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
x	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tempo en anos	C_{14}
0	3
5570	$3 \cdot \frac{1}{2} = 1'5$
11140	$1'5 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
x	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5570}}$

Sempre que a variación da función sexa proporcional o seu valor, como sucede no exemplo anterior, tratarase dunha función exponencial: $f(x)=k \cdot a^{bx}$. ($a>0$)

Características:

- O dominio dunha función exponencial é todo R.
- Son crecentes (se $a^b>1$) ou decrecentes (se $a^b<1$).
- Non teñen extremos.
- O eixe X é unha asíntota horizontal.
- Se dividimos valores dunha función exponencial correspondentes a valores de x cunha separación constante s, o resultado tamén é constante:



$$f(x) \text{ exponencial} \Rightarrow \frac{f(x+s)}{f(x)} = \text{cte}, \text{ calquera que sexa } x$$

Demostración:

$$\frac{f(x+s)}{f(x)} = \frac{k \cdot a^{b(x+s)}}{k \cdot a^{bx}} = \frac{a^{b(x+s)}}{a^{bx}} = a^{bx+bs-bx} = a^{bs} = \text{cte}$$

Esta propiedade permite determinar se unha serie de valores dunha función corresponden a unha función exponencial.

- Podemos escribir a fórmula dunha función exponencial con calquera base maior de 0 pero a base máis *natural* é un número irracional $e=2,71828182845...$ (cando o expoñente é complicado, as potencias dese número poden calcularse aproximando os seus valores mediante sucesións sinxelas). Ademais, a función exponencial de base o número e ten a derivada máis sinxela das funcións exponenciais, a propia función (e^x)'= e^x (é a única función que coincide coa súa función derivada).

Chamamos exponenciais estándar as que teñen base o número e: $f(x)=k \cdot e^{ax}$.

Exercicio 8.11: O número estimado de pitas do monte en Galicia en diferentes anos foi:

anos	0 (1990)	1	2	3	4
pitas	1024	768	576	432	324

Estudia se o número de pitas do monte ven dado por unha función exponencial e, en caso afirmativo, atopa a súa fórmula.

Exercicio 8.12: Escribe a fórmula da función exponencial do exercicio anterior en forma estándar.

Funcións logarítmicas

Son as funcións inversas das exponenciais e defínense a partir delas: $\log_a(M) = m \Leftrightarrow a^m = M$ ($a > 0$) \leftarrow o logaritmo é o expoñente

Historicamente foron utilizadas para realizar facilmente operacións complicadas (potencias, raíces, produtos e cocientes) pero, despois da xeneralización do uso da calculadora, solo se utilizan para a resolución de ecuacións exponenciais e para describir algúns fenómenos físicos (crecemento dos seres vivos por exemplo).

Utilízanse logaritmos en base o número e (logaritmos neperianos ou naturais), \ln , e logaritmos en base 10, \log .

Características:

- O dominio das funcións logarítmicas son os números estritamente positivos (maiores ca 0).
- Teñen unha asíntota vertical en $x=0$.
- Son estritamente crecentes se a base é maior que 1, ou decrecentes se é menor.
- A súa gráfica é simétrica en relación a recta $y=x$ da correspondente á exponencial da mesma base.

Propiedades: Ó ser a función inversa da exponencial, o logaritmo herda moitas das propiedades das potencias:

- **Logaritmo de 1**, en calquera base, $0: \log_a(1) = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
- **Logaritmo dun produto**, é a suma dos logaritmos dos factores:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) + \log_a(N)$$

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} m = \log_a(M) \Leftrightarrow a^m = M \\ n = \log_a(N) \Leftrightarrow a^n = N \end{array} \right\} M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

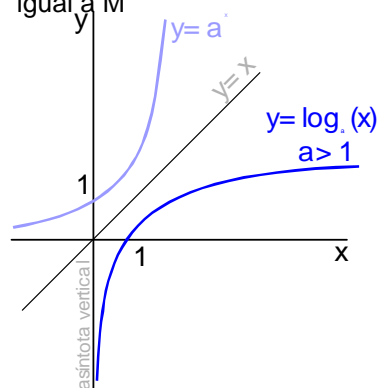
Dado que o logaritmo en base a dun número é o expoñente ó que debemos elevar a para obter ese número, resulta:

$$\log_a(M \cdot N) = m + n$$

- **Logaritmo dun cociente**, é o logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador.

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$$

O logaritmo en base a dun número M é outro número m tal que a^m é igual a M



Demostración:
$$\left. \begin{array}{l} m = \log_a(M) \Leftrightarrow a^m = M \\ n = \log_a(N) \Leftrightarrow a^n = N \end{array} \right\} \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Polo tanto: $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = m - n = \log_a(M) - \log_a(N)$

- **Logaritmo dunha potencia**, é o expoñente polo logaritmo da base.

$$\log_a(M^r) = r \cdot \log_a(M)$$

Demostración:

$$m = \log_a(M) \Leftrightarrow a^m = M \rightarrow M^r = (a^m)^r = a^{mr} \Leftrightarrow a^{mr} = M^r$$

Polo tanto: $\log_a(M^r) = r \cdot m = r \cdot \log_a(M)$

Exercicio 8.13: Os logaritmos permiten, entre outras cousas, resolver ecuacións exponenciais.

Lembra o exemplo no que debiamos atopar a idade dun fósil medindo a cantidade de C_{14} que contiña.

- O fósil contiña, cando se formou, 3 g de C_{14}
- Na actualidade contén 0'04 g de C_{14} ¿Cal é a súa idade?
- A función que describe o contido de C_{14} do fósil é:

$$f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5570}}$$

Calcula o o valor exacto da antigüidade do fósil

Derivadas das funcións elementais

DERIVADAS ELEMENTAIS		
función	derivada	regra
$\sin(x)$	$\cos(x)$	A derivada do seno de x é o coseno de x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	A derivada do coseno de x é menos seno de x
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	Derivada da tanxente é o inverso do coseno ó cadrado ou tamén 1 máis a tanxente ó cadrado
e^x	e^x	A derivada da exponencial en base e é ela mesma
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$	Derivada da exponencial en base a é ela mesma multiplicada polo logaritmo neperiano da base
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	A derivada do logaritmo neperiano de x é 1 partido por x

En moitas ocasións, en lugar de x aparece unha función u , neses casos as derivadas son:

DERIVADAS ELEMENTAIS	
función	derivada
$\sin(u)$	$\cos(u) \cdot u'$
$\cos(u)$	$-\sin(u) \cdot u'$
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos^2(u)} = [1 + \tan^2(u)] \cdot u'$
e^u	$e^u \cdot u'$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Ampliación

Fenómenos periódicos

Chámanse periódicos ós fenómenos que repiten os seus valores cada certo tempo. Ciclos biolóxicos, sons, temperaturas medias, mareas, horas de luz diarias durante un ano, movementos dos astros, glaciacións, etc. son fenómenos periódicos. Os tempo que tardan os seus valores en repetirse (período) poden ir desde as fraccións de segundo ata os millóns de anos

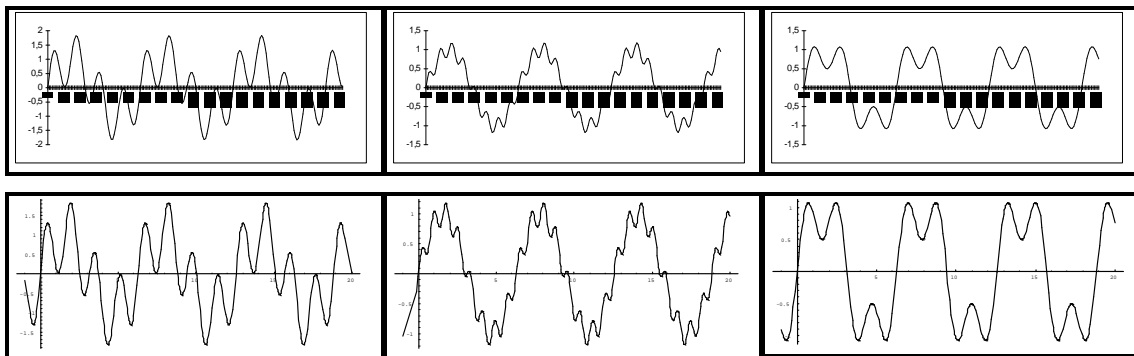
Os fenómenos periódicos sinxelos descríbense utilizando funcións do tipo $f(t)=A\cdot\text{sen}(\omega\cdot t+f_0)$ chamadas funcións de onda.

Actividade: Coa axuda da calculadora gráfica investiga de que xeito inflúen os valores de a , b e c nas gráficas das funcións do tipo: $f(t)=A\cdot\text{sen}(\omega\cdot t+f_0)$ (Podes empezar pola máis sinxelas: $A=1$, $\omega=1$ e $f_0=0$. Logo cambias A , logo ω , logo f_0 e finalmente combinalos).

O son

Os sons son fenómenos periódicos producidos pola vibración dun obxecto (unha lámina metálica, o ar ó saír por un orificio, as cordas vocais, etc). Esa vibración transmítese ás moléculas do ar que experimentan un movemento horizontal adiante e atrás producindo compresións e depresións, algo semellante as ondas producidas nun estanque ó lanzar unha pedra, coa salvedade de que nestas últimas o movemento das moléculas de auga é en vertical.

Podemos visualizar ese movemento das moléculas que producen os sons coa axuda dun micrófono e un osciloscopio: O micrófono transforma o son producido pola voz en corrente eléctrica e o osciloscopio permítenos visualizar as variacións desa corrente.

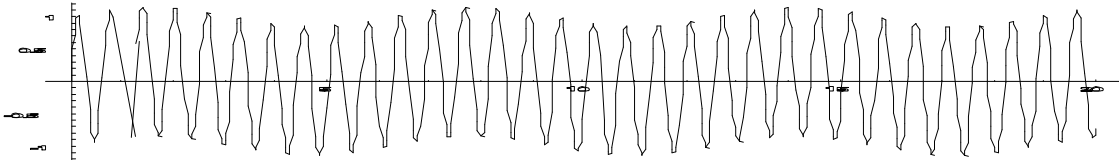


Observamos que a amplitude correspondese coa intensidade e a frecuencia co ton utilizado.

Os sons que corresponden a una onda máis simple son os das vocais, en especial as pechadas: un "iiii..." cerrado vémoste no osciloscopio como una onda sinusoidal simple mentres que a forma dun "aaaaa..." corresponde a unha suma de dúas funcións onda.

Tamén se poden obter sons puros soplando nunha botella con auga, variando a altura da auga conseguimos variar a frecuencia do son.

Una onda curiosa obtense ó asubiar diante do micrófono, pois a súa frecuencia é moito máis alta ca da voz e ademais pode apreciarse claramente a existencia dunha onda portadora similar á da emisión de ondas de radio de Modulación de Amplitude (AM).



Funcións paramétricas

Ó representar graficamente unha función obtemos unha curva do tipo $y=f(x)$ (a segunda coordenada dos puntos da curva obtense substituíndo a primeira na fórmula da función).

Exemplo: Lanzamos un obxecto cun ángulo de 60° en relación á horizontal e cunha velocidade inicial de 20 m/s. Supoñendo que o obxecto só se ve afectado pola gravidade, atopa a función que describe altura segundo o tempo e debuxar a gráfica desa función. ¿Cal é a súa traxectoria?

Solución: No relativo á altura, trátase dun movemento uniformemente decelerado pero debemos calcular a compoñente vertical da velocidade inicial:

$$v_y = 20 \cdot \sin(60) = 17.3 \text{ m/s}$$

A altura segundo o tempo virá dada pola función:

$$h(t) = 17.3t - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2 = 17.3t - 4.9t^2$$

A gráfica desa función é unha parábola concava hacia abaixo cun máximo en

$$t = \frac{17.3}{9.8} = 1.77 \text{ s}$$

A pesar do que poda parecer, esa gráfica non describe a traxectoria seguida

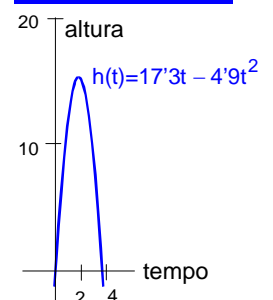
pelo obxecto senón só como variou a altura segundo o tempo. Para obter a traxectoria necesitamos outra función que describa a 1ª coordenada do obxecto segundo o tempo. Dado que a gravidade non ten compoñente horizontal, a compoñente horizontal do movemento é uniforme con velocidade: $v_x = 20 \cdot \cos(60) = 10 \text{ m/s}$

A posición segundo o tempo (traxectoria) ven dada polas funcións:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 10t \\ y(t) &= 17.3t - 4.9t^2 \end{aligned} \right\} \text{ Posición segundo o tempo.}$$

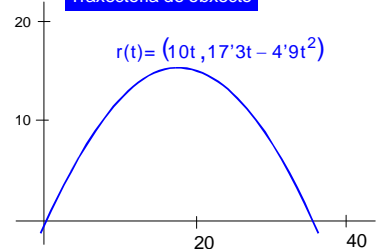
En moitas ocasións, como na traxectoria do obxecto anterior, resultan necesario describir as coordenadas dos puntos dunha curva mediante dúas funcións dunha mesma variable (as ecuacións paramétricas dunha recta son un caso particular).

Gráfica altura/tempo



Fixate que no eixe X está representado o tempo e non a posición.

Traxectoria do obxecto



Ó substituír t por un valor concreto en $r(t)$ obtemos as coordenadas dun punto da curva que corresponde á posición do obxecto nese intre.

Podemos considerar un novo tipo de función que, a cada valor da variable, faille corresponder as coordenadas dun punto do plano: $r(t) = (x(t), y(t))$

Ese tipo de funcións reciben o nome de **paramétricas**.

Podemos definir a derivada dunha función paramétrica de xeito semellante á dunha función real: $r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))}{h}$

Lembra que podemos interpretar as coordenadas dun punto como as compoñentes do vector que vai da orixe a ese punto, polo que obtemos:

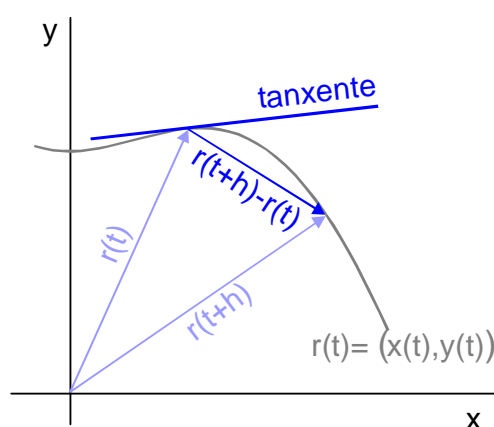
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) = (x'(t), y'(t))$$

A derivada dunha función paramétrica é un vector:

Dirección: tanxente á gráfica da función no punto.

Módulo: medida da variación do punto ó largo da curva en relación á variación de t nese punto.

Se a función paramétrica describe a posición dun móbil segundo o tempo, a súa derivada nun punto é o vector velocidade nese punto.



Cando h tende a 0, a dirección do vector $r(t+h) - r(t)$ tende a dirección da tanxente.

Exercicio 8.14: Atopa a función paramétrica que describe a posición dun satélite en órbita circular a unha distancia de 900 km da superficie da Terra e que completa unha órbita cada 12 horas (podes supoñer que para $t=0$ atopabase no eixe X).

Calcula fórmula do vector velocidade nun intre calquera da órbita dese satélite e demostra que o seu módulo é constante ó longo de toda a traxectoria.

Operacións con funcións

Operacións

En ocasións cómpre descompoñer unha función complexa en partes máis manexables, para facilitar o seu estudo.

Exemplo: A función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ semella bastante complexa

pero, se facemos a división, podemos poñela como suma de funcións coñecidas, o que pode facer máis doado o estudo:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Noutros casos, a situación é inversa: necesitamos combinar varias funcións nunha nova.

Exercicio 8.15: na esquina dunha rúa hai unha farola de 300 cd a 4 m. de altura. Como a intensidade lumínica é inversamente proporcional ao cadrado da distancia, a función que describe a intensidade lumínica no solo é:

$$I(x) = \frac{1}{x^2 + 16} \quad \text{sendo } I(x) \text{ a intensidade e } x \text{ a distancia á esquina.}$$

Se o concello coloca outra farola tamén a 4 m de altura e a 10 m, da esquina, ¿cal será a función que describa agora a intensidade de luz no solo?

Suma de funcións

Dadas dúas funcións $f(x)$ e $g(x)$, a suma é unha nova función que ten por fórmula $f(x)+g(x)$.

Esa nova función estará definida en todos os valores de x nos que estén definidas as dúas funcións orixinais ou, o que é o mesmo, o seu dominio será a intersección dos dominios das funcións $f(x)$ e $g(x)$.

Exemplo: sexan as funcións $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

A súa suma será:

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x^2-x} + \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-x}$$

Como $f(x)$ está definida en todo \mathbb{R} agás no 0, e $g(x)$ está definida en todo \mathbb{R} agás no 1, a suma estará definida en todo \mathbb{R} agás 0 e 1, pois nin no 0 nin no 1 será posible facer a suma das dúas.

Exercicio 8.16: coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, estudia que sucede ao sumarlle a unha función calquera un número (función constante).

Exercicio 8.17: coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, observa que sucede ao sumar a función *sin* coa función identidade, $f(x)=x$.

Producto de funcións

Dadas dúas funcións $f(x)$ e $g(x)$, o seu produto é unha nova función que ten por fórmula $f(x) \cdot g(x)$.

Esa nova función estará definida en todos os valores de x nos que estén definidas simultaneamente as funcións orixinais.

Exemplo: sexan as funcións $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. O seu produto será:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-x}$$

Como $f(x)$ está definida en todo \mathbb{R} agás no 0 e $g(x)$ está definida en todo \mathbb{R} agás no 1, a suma estará definida en todo \mathbb{R} agás no 0 e no 1.

Exercicio 8.18: coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, estudia que sucede ao multiplicar unha función calquera por un número (función constante).

Cociente de funcións

Dadas dúas funcións $f(x)$ e $g(x)$, o seu cociente é unha nova función que ten por fórmula $\frac{f(x)}{g(x)}$.

O cociente non estará definido nos valores nos que $g(x)$ sexa 0 (non se pode dividir entre 0) nin, posiblemente, naqueles valores nos que non estaban definidas $f(x)$ e $g(x)$.

Exemplo: sexan as $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. O cociente será:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x^2+x}$$

Dominio de $f(x)$: \mathbb{R} agás 0

Dominio de $g(x)$: \mathbb{R} agás 1

Dominio de $f(x)/g(x)$: \mathbb{R} agás 0 e -1 (neste último $g(x)=0$)

Pero $f(x)/g(x)$ si está definida en $x=1$ a pesar de que $g(x)$ non estaba.

Exercicio 8.19:

- a) Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, observa que sucede ao dividir a función *sin* entre a función identidade, $f(x)=x$.
- b) Coidas que se cambiamos *sin* por *cos* obteremos un resultado similar?
- c) Investiga que sucede nos dous casos cando x tende a 0.

Composición de funcións

É unha operación que consiste en aplicar unha función ao resultado de aplicar outra:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] \text{ (leese de dereita a esquerda: g composto con f)}$$

Obviamente, a operación composición non é conmutativa.

Exemplo: considera as funcións: $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x+1}$

- f composto con g será: $g \circ f(x) = g[f(x)] = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{2x^2+1}$

- g composto con f será:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = 2[g(x)]^2 = 2\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Exemplo: considera as funcións: $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x^2 + x$

- f composto con g será:

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = (\sin(x))^2 + \sin(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$$

- g composto con f será:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = \sin(g(x)) = \sin(x^2 + x)$$

Exercicio 8.20:

- a) Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, investiga que sucede ao compoñer a función *sin* coa función $f(x)=1/x$.
- b) Investiga que sucede nos dous casos cando x tende a 0.

Exercicio 8.21: Estudiamos que as funcións elementais caracterízanse pola súa regularidade. As súas gráficas non teñen cambios bruscos ou, polo menos eso di a teoría.

Observa que sucede coa gráfica de, por exemplo, $f(x)=4\sin(x^3)$.

Ocórreseche algunha explicación ou é que a teoría está errada?

Funcións non elementais

Funcións definidas a trozos

Funcións non elementais son as que non están definidas por unha fórmula. Non podemos escribilas como unha combinación das fórmulas coñecidas: polinomiais, trigonométricas, exponenciais, radicais.

Un exemplo característico son as definidas por varias fórmulas, cada unha aplicable nun certo conxunto de valores de x .

Exercicio 8.22: Nun concello decidiron potenciar o aforro de auga con prezos en función do consumo:

- Ata 10 m^3 mensuais, págase só 10 €.
- O que exceda de 10 m^3 , ata 15 m^3 , pagarase a 1'5 € o m^3 .
- O que exceda de 15 m^3 , pagarase a 3 € o m^3 .

a) Completa a seguinte táboa

Consumo m^3	0	5	10	11	12	15	16	20
Importe €		10		11'5			20'5	

b) ¿Cal será a expresión que relacione o consumo co importe?

Exercicio 8.23: Quentamos un trozo de xeo de auga de 20 gr desde -10°C ata que se funde e acada os 4°C . A táboa co volume a diferentes temperaturas foi:

	sólido			líquido		
Temperatura en $^\circ \text{C}$	-10	-5	$\lim_{x \rightarrow 0^-}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+}$	1	2
Volume en cm^3	20	19'9	19'6	17'8	17'9	18

- ¿Que sucede en 0?
- Fai unha gráfica con eses valores.
- Atopa a expresión desa función.

Función valor absoluto

O valor absoluto é unha operación que designamos con barras verticais: $|\text{número}|$, e consiste en transformar o número en positivo.

Por exemplo, $|4| = 4$ (o valor absoluto de 4 é 4) e $|-4| = 4$ (o valor absoluto de -4 é 4).

Empregamos o valor absoluto para asegurarnos de que unha certa cantidade é positiva.

Por exemplo, a distancia na recta entre os puntos 2 e 5 calcúlase coa súa diferenza:



As distancias son sempre valores positivos. Para referirnos á distancia entre dous valores calesquera **a** e **b** debemos empregar algunha operación que nos asegure que obtemos un valor positivo, e esa operación é o valor absoluto: $d(a,b) = |b - a|$.

Podemos definir a función valor absoluto do seguinte xeito:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

É unha función definida a trozos, a súa gráfica está formada por dous trozos de recta que se unen na orixe de coordenadas.

Nese punto a gráfica forma un ángulo, non ten derivada en $x=0$.

Ten un mínimo en $x=0$.

Exercicio 8.24: considera a función formada pola composición da función sin coa función valor absoluto, ¿como será a súa gráfica?

Exemplo: resolve a ecuación $|3x-2|=1$.

Solución: debemos ter en conta que, o valor absoluto dunha cantidade, deixa a mesma cantidade (se é positiva) ou cámbialle o signo (se é negativa)

$$|3x-2|=1 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2=1 \\ ou \\ 3x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ ou \\ 3x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x=1/3 \end{cases}$$

Para que o valor absoluto de $3x-2$ sea 1, x debe valer 1 ou $1/3$.

$$\text{En efecto } \begin{cases} |3 \cdot 1 - 2| = |1| = 1 \\ \left| 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \right| = |1 - 2| = |-1| = 1 \end{cases}$$

Exercicio 8.25: resolve as ecuacións:

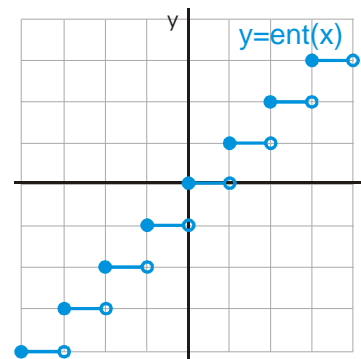
$$\text{a) } |x - 2 \cdot (x - 2)| = 3 \quad \text{b) } \left| \frac{2x-1}{x+2} \right| = 0 \quad \text{c) } |x^2 - 6x + 8| = 3$$

Función parte enteira

Chámase así a función que, a cada número, faille corresponder o número enteiro inferior máis cercano a ese número.

Se o número de partida é positivo, a función parte enteira simplemente borra os seus decimais: $\text{ent}(2'27) = 2$

En cambio, se o número é negativo, o enteiro inferior resulta de restarlle 1 ao número sen decimais: $\text{ent}(-2'27) = -3$



Exercicio 8.26: considera a función formada pola composición da función sin coa función parte enteira, ¿como será a súa gráfica?

Funcións, ecuacións e inecuacións

Ecuacións

Unha ecuación é unha igualdade entre expresións matemáticas nas que algunhas cantidades descoñecidas son substituídas por letras. O noso obxectivo é calcular os valores desas cantidades.

Exercicio 8.26: resolve a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

Exercicio 8.27: resolve a ecuación $x^2 - 4 = 2x - 1$

Funcións e ecuacións

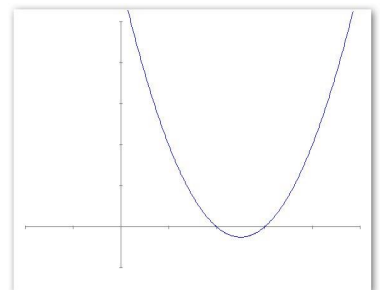
Traducir as ecuacións ao linguaxe de funcións permítenos estudar a existencia de solucións, e pode proporcionarnos métodos alternativos para a súa resolución.

Ecuacións cun membro 0

Se a ecuación ten 0 nun dos seus membros, podemos traducila por buscar os valores de x para os cauais a función que ten de fórmula o outro membro da ecuación sexa 0.

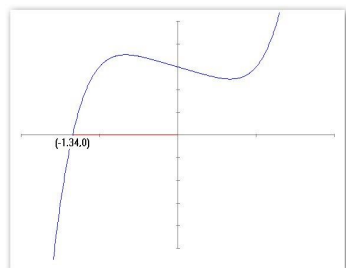
Exemplo: resolver a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ é o mesmo que atopar os valores de x que, ao substituílos na función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ da 0 (eses valores chámanse “raíces” da ecuación ou “ceros” da función).

Podemos atopar eses valores, de xeito aproximado. Na gráfica da función: son $x=2$ e $x=3$.



Neste caso dispoñemos dun procedemento alxébrico (exacto) para resolvela: $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 3 \text{ ou } 2$

O método gráfico era máis impreciso, pero non sempre é así.



Exemplo: a ecuación $x^5 - x + 3 = 0$ non podemos resolvela alxebricamente, pero si podemos facelo graficamente.

Observamos que ten unha única solución aproximadamente em

$$X = -1.34.$$

Este método non permite, na maioría das ocasións un cálculo exacto da solución, pero podemos calculala con toda a exactitude que necesitemos.

Exercicio 8.28: resolve a ecuación $x^2 - \cos(x) = 0$

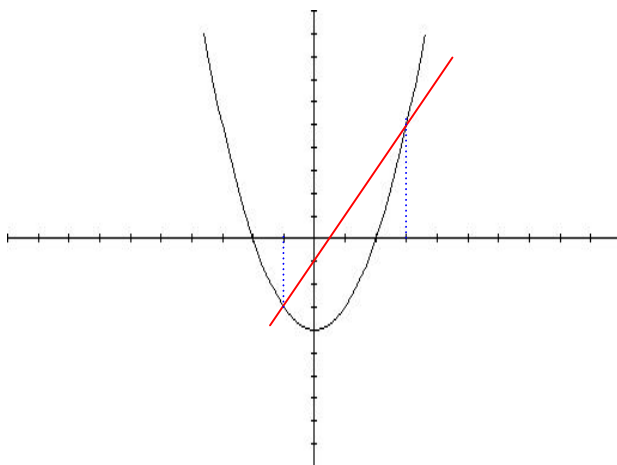
Ecuacións cos dous membros distintos de 0

Podemos traducir ese tipo de ecuacións por *buscar os valores de x dos puntos de corte das gráficas das funcións correspondentes a cada membro da ecuación*.

Exemplo: resolver a ecuación $x^2 - 4 = 2x - 1$ é o mesmo que atopar os valores de x correspondentes aos puntos de corte das gráficas de $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 2x - 1$.

Observando as gráficas, vemos que as solucións son $x = -1$ e $x = 3$.

Igual que no caso anterior, este procedemento permite a resolución de ecuacións imposibles de abordar alxebricamente.



Exercicio 8.29: resolve a ecuación $x^2 + 1 = 2^x$

Funcións e sistemas

Unha ecuación con dúas incógnitas podemos interpretala como unha función non definidas explicitamente (coa y sen despegar); e,

resolver un sistema de ecuacións con dúas incógnitas, interpretariámolo como atopar as coordenadas dos puntos de corte das gráficas das funcións que corresponderían a cada ecuación.

Exercicio 8.30: resolve graficamente o sistema ecuacións:

$$\begin{cases} x^2 + y = 4x \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Exercicio 8.31: resolve graficamente o sistema ecuacións:

$$\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Inecuacións

Unha inecuación é unha desigualdade entre expresións matemáticas nas que algunhas cantidades descoñecidas son substituídas por letras. O noso obxectivo é calcular os valores desas cantidades.

Exemplo: Resolver a inecuación $3x - 2 < 4$.

Podemos realizar o mesmo tipo de transformacións que nunha ecuación: $3x - 2 < 4 \Leftrightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2$



Podemos expresar a solución de varias formas:

- Intervalo: $(-\infty, 2)$
- Conxunto: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

Exemplo: Resolver a inecuación $3x^2 + 24 < 18x$.

1) Deixamos 0 nun dos membros: $3x^2 - 18x + 24 < 0$

2) Descompoñemos o polinomio en factores de gao 1

a) Resolvemos a ecuación $3x^2 - 18x + 24 = 0$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

b) A descomposición será: $3x^2 - 18x + 24 = 3(x - 4)(x - 2)$

- 3) Analizamos as posibilidades de que o produto deses factores sexa < 0 (negativo): un factor deberá ser $+$ e o outro $-$:

$$a) \begin{cases} x - 4 < 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 4$$

$$b) \begin{cases} x - 4 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 2 \end{cases} \text{ Imposible.}$$

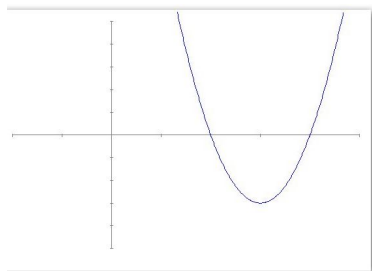
A solución será pois o intervalo $(2,4)$.

Inecuacións e funcións

De xeito similar, podemos traducir as inecuacións ao linguaxe de funcións:

Exemplo: Resolver a inecuación $3x^2 + 24 < 18x$.

- 1) Deixamos 0 nun dos membros: $3x^2 - 18x + 24 < 0$
- 2) Resolver a inecuación é o mesmo que atopar os valores de x nos que a función $f(x) = 3x^2 - 18x + 24$ toma valores negativos (a gráfica está por abaixo do eixe X).
- 3) Representamos graficamente esa función.
- 4) Os valores de x dos puntos nos que a y é negativa son os do intervalo $(2,4)$.
- 5) Para calcular con exactitude os límites do intervalo é necesario atopar as raíces da función ou, o que é o mesmo, resolver a ecuación $3x^2 - 18x + 24 = 0$



Exercicio 8.32: resolve graficamente a inecuación: $x^3 - 4x > 0$

Inecuacións con dúas incógnitas

Este tipo de inecuacións resólvense graficamente. As súas solucións serán rexións do plano.

Exemplo: atopa a solución da inecuación $3 - 2(x + 1) < 3y$.

Considero

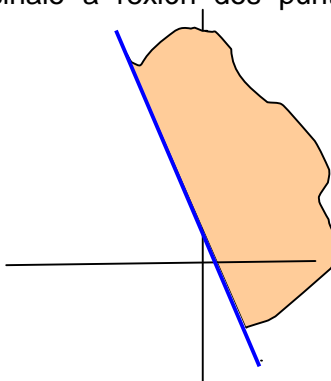
a) Se facemos unhas pequenas transformacións: $\frac{3-2(x+1)}{3} < y$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} < y, \text{ recoñecemos facilmente a recta } y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Resolver a inecuación equivale a preguntarse: ¿que puntos do plano están por riba da recta? (xa que a ordenada, y , é “maior”)

Represento a recta e sinalo a rexión dos puntos do plano que constitúen a solución.

x	y
0	1/3
1	-1/3



Unha forma de comprobación sería coller un punto calquera, por exemplo o (0, 0) e ver se verifica a desigualdade, e ver se cae na zona que lle corresponde:

$$-\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0 \quad \text{Non cumpre a desigualdade, debe estar fóra da}$$

rexión sinalada e, efectivamente, está fóra.

Exercicio 8.33: Despexa y na seguinte inecuación:

Exercicio 8.34: resolve a desigualdade: $|x-1| \leq 3$

Exercicio 8.35: resolve a inecuación $|2x-3| < 1$

Exercicio 8.36: resolve a inecuación $\left| \frac{2-3x}{2} \right| \leq 4$