

Exercicios resoltos 1

Exercicio 8.1: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$f_1(x) = 2x$$

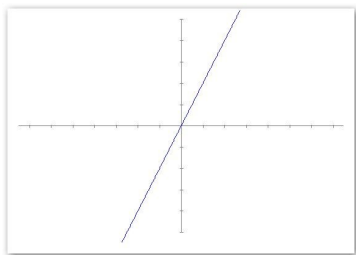
$$f_2(x) = 2x - 3$$

$$f_3(x) = 2x + 1$$

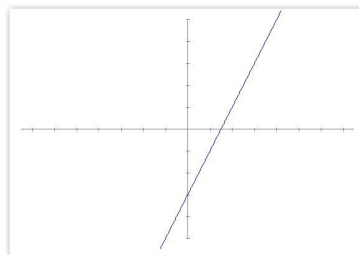
Explica como influe o valor do termo independente na gráfica.

Solución:

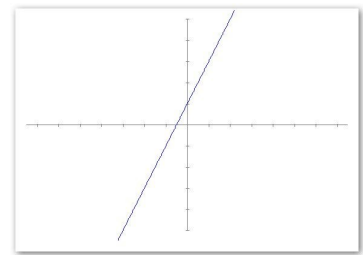
$$f_1(x) = 2x$$



$$f_2(x) = 2x - 3$$



$$f_3(x) = 2x + 1$$



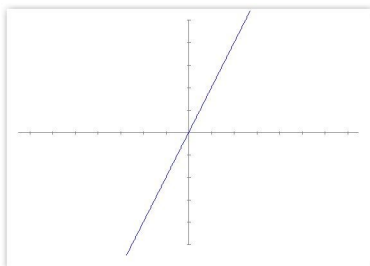
Observamos que se obtéñen tres rectas paralelas (o termo independente non cambia a dirección da recta) e que a segunda coordenada do punto de corte co eixe Y coincide co valor do termo independente.

Exercicio 8.2: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

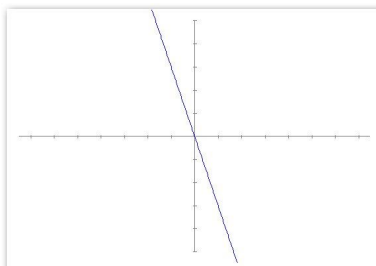
Explica como influe o valor do coeficiente de x na gráfica.

Solución:

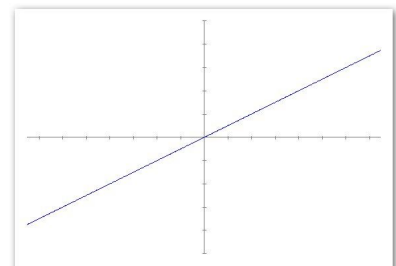
$$f_1(x) = 2x$$



$$f_2(x) = -3x$$



$$f_3(x) = \frac{1}{2}x$$



O coeficiente de x determina a inclinación da recta:

- Se é positivo, a recta crece.
- Se é negativo, a función decrece.
- Canto maior sexa o valor dese coeficiente, máis inclinada é a recta.
- Polo feito de determinar a inclinación da recta, chámase pendente e o seu valor coincide coa tanxente do ángulo que forma a recta ao corta ao eixe X.

Exercicio 8.3: Sabendo que $\tan(30)=0'5774$ e que $\tan(45)=1$ calcular, aproximadamente, $\tan(42)$ (interpolación) e $\tan(50)$ (extrapolación).

Solución: Aproximamos a función tanxente pola recta (función de grao 1) que pasa polos puntos $(30, 0'5774)$ e $(45, 1)$.

$$f(x) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \rightarrow f(x) - 1 = \frac{0'5774 - 1}{30 - 45} (x - 45)$$

$$f(x) = 0'02817x - 0'2678$$

Os valores que obtemos son:

$$\tan(42) \approx 0'02817 \cdot 42 - 0'2678 = 0'9153$$

$$\tan(50) \approx 0'02817 \cdot 50 - 0'2678 = 1'1407$$

Os valores reais eran $\tan(42)=0'9004$ e $\tan(50)=1'1918$

Exercicio 8.4: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = -2x^2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$$

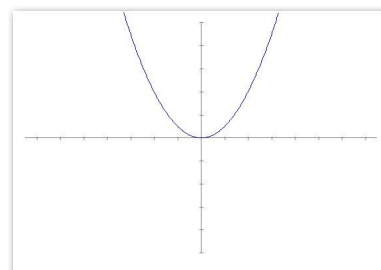
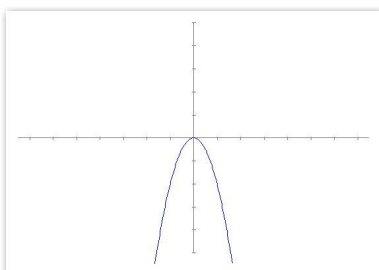
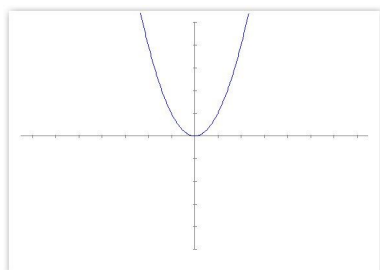
Explica como influe o valor do coeficiente de x^2 na gráfica.

Solución:

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = -2x^2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$$



Observamos que, ao variar o coeficiente de x^2 , a forma da parábola cambia:

- Se é positivo, a parábola é convexa, cóncava se é negativo.
- Canto maior sexa o seu valor, máis pechada é a parábola.
- Ese coeficiente determina a curvatura da parábola.

Exercicio 8.5: Atopa o máximo da función $f(x)=-2x^2+6x-1$

Solución: Sabemos que nos extremos relativos, en particular nos máximos, a derivada é 0, polo tanto:

$$f'(x) = -4x + 6 \rightarrow -4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{-4} = 1'5$$

Temos que comprobar se efectivamente é un máximo e, para facelo, estudamos o crecemento ós dous lados do punto:

$$x = 1'5 \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = -4 \cdot 1 + 6 = 2 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece} \\ f'(2) = -4 \cdot 2 + 6 = -2 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \end{array} \right\} \text{ máximo}$$

Como a función pasa de crecente a decrecente, ten un máximo relativo en $x=1'5$ que, por tratarse dunha función de grao 2, tamén é absoluto.

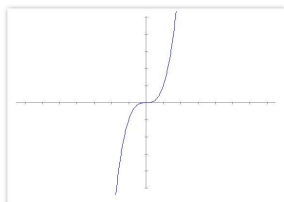
Exercicio 8.6: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$f_1(x) = x^3 \quad f_2(x) = x^3 - 3x \quad f_3(x) = -\frac{1}{3}x^3 \quad f_3(x) = -x^3 + 2x^2$$

Describe a forma de cada unha indicando as súas principais características.

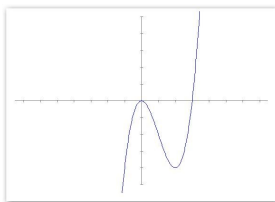
Solución:

$$f_1(x) = x^3$$



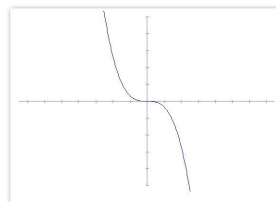
- Definida en todo \mathbb{R} .
- Simétrica respecto a orixe.
- Non ten extremos.
- Punto de inflexión con tanxente horizontal en $x=0$
- É sempre crecente.

$$f_2(x) = x^3 - 3x$$



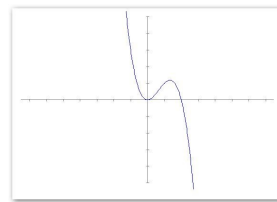
- Definida en todo \mathbb{R} .
- Non é simétrica.
- Máximo relativo en $x=0$ e mínimo relativo en $x=2$ (aprox)..
- Punto de inflexión en $x=1'5$ (aprox).

$$f_3(x) = -\frac{1}{3}x^3$$



- Definida en todo \mathbb{R} .
- Simétrica respecto a orixe.
- Non ten extremos.
- Punto de inflexión con tanxente horizontal en $x=0$
- Sempre decrecente.

$$f_3(x) = -x^3 + 2x^2$$



- Definida en todo \mathbb{R} .
- Non é simétrica.
- Máximo relativo en $x=1'5$ e mínimo relativo en $x=0$ (aprox)..
- Punto de inflexión en $x=1$ (aprox).

- As gráficas de polinomios de grao tres corresponden a dous tipos básicos: con e sen extremos.
- Sempre teñen un cambio de curvatura (punto de inflexión).
- Ao ser impar, as dúas “puntas” teñen comportamento inverso: unha vai a $+\infty$ e a outra a $-\infty$

Exercicio 8.7: Fai un estudo analítico (crecemento e extremos) das gráficas das funcións $f(x)=x^3$ e $g(x)=x^3-12x+2$.

Solución: Estudamos o crecemento e os extremos e logo construímos unha táboa de valores de cada unha das funcións.

- $f'(x) = -3x^2 \rightarrow -3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $x = 0 \left\{ \begin{array}{l} f'(-1) = -3(-1)^2 = -3 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \\ f'(3) = -3 \cdot 3^2 = -27 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \end{array} \right\} \text{ inflexión}$

(Non hai cambio no crecemento, en $x=0$ hai un punto de inflexión con tanxente horizontal).

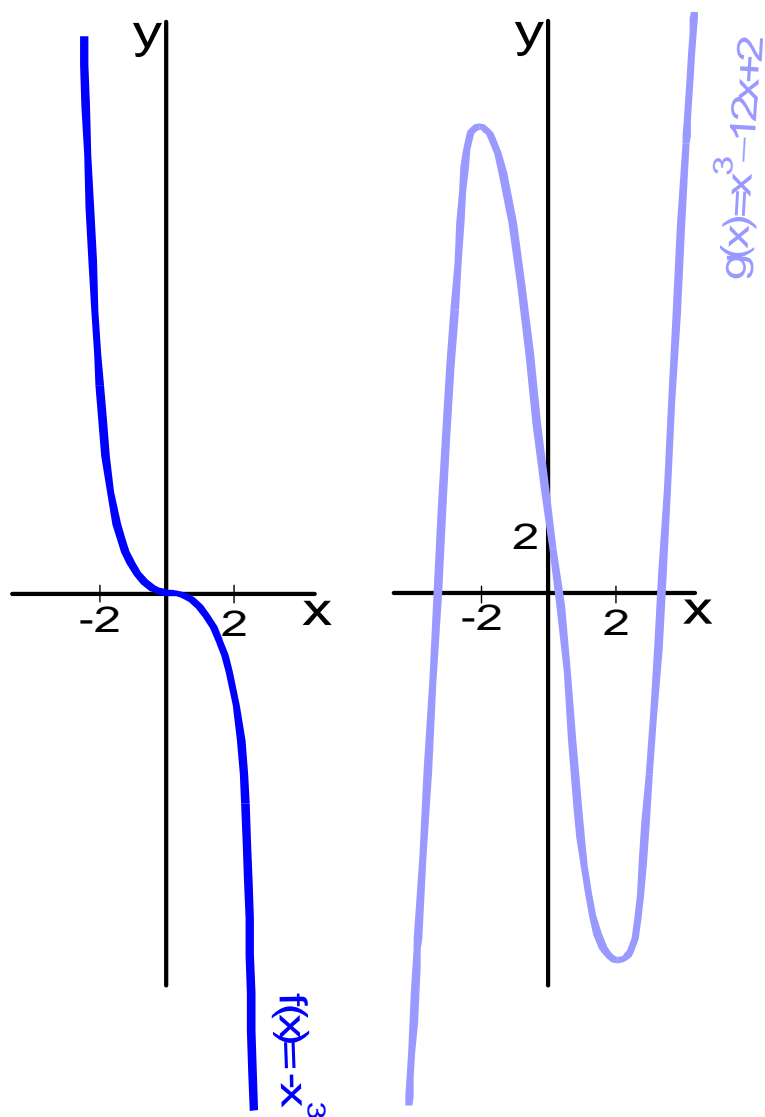
- $g'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$$x = -2 \left\{ \begin{array}{l} g'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 15 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece} \\ g'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 = -12 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \end{array} \right\} \text{ Máximo}$$

(Dado que $g(x)$ pasa de crecer a decrecer, ten un máximo relativo en $x=-2$).

$$x = 2 \left\{ \begin{array}{l} g'(0) = -12 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece} \\ g'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 = 15 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece} \end{array} \right\} \text{ Mínimo}$$

(En $x=2$ pasa de decrecer a crecer, ten que ser un mínimo relativo).



Exercicios resoltos 2

Exercicio 8.8: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, fai as gráficas das seguintes funcións de grao 1:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_4(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f_5(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$$

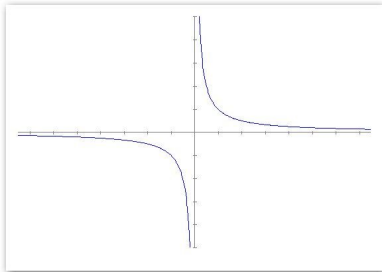
$$f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f_6(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Describe a forma de cada unha indicando as súas principais características e intenta obter algunha conclusión sobre as gráficas deste tipo de funcións.

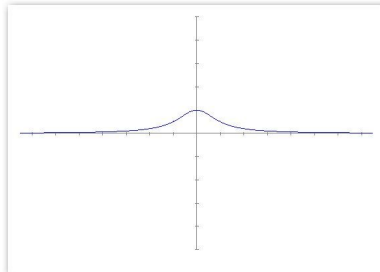
Solución:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}$$



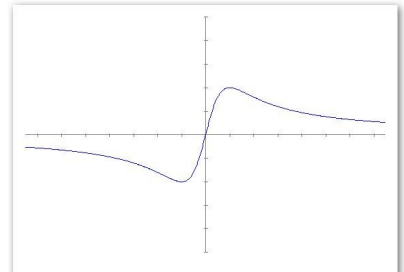
- En 0 non está definida.
- Simétrica respecto a orixe.
- Non ten extremos.
- É sempre decrecente.
- O eixe X é unha asíntota vertical.
- O eixe Y é unha asíntota horizontal

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$



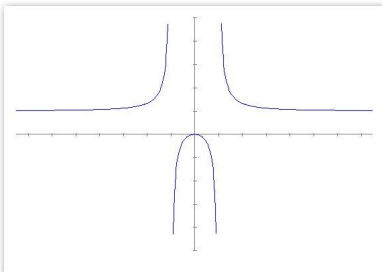
- O seu dominio é todo R.
- Simétrica respecto ao eixe Y.
- Non ten asíntotas verticais.
- Ten un máximo en x=0
- Ten dous puntos de inflexión.
- O eixe Y é unha asíntota horizontal.

$$f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$



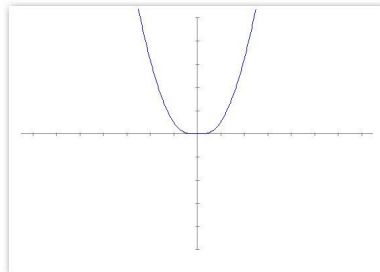
- Definida en todo R.
- Simétrica respecto a orixe.
- Un mínimo en x=-1 e un máximo en x=1.
- Tres puntos de inflexión (aprox -2'5, 2'5 e 0).
- O eixe Y é unha asíntota horizontal.

$$f_4(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$



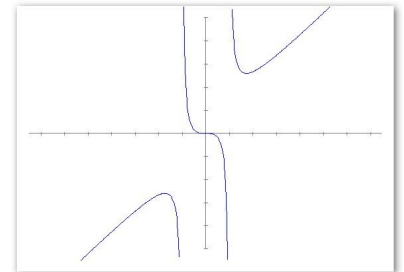
- Non está definida en -1 e 1.
- As rectas x=-1 e x=1 son asíntotas verticais.
- Simétrica respecto ao eixe Y.
- Máximo relativo en x=0.
- A recta y=1 é unha asíntota horizontal

$$f_5(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$$



- Definida en todo R.
- Simétrica respecto ao eixe Y.
- Mínimo en x=0.
- É sempre convexa.
- Non ten asíntotas

$$f_6(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$



- Non está definida en -1 e 1.
- Asíntotas verticais x=-1 e x=1.
- Simétrica respecto a orixe.
- Máximo relativo en -1'5 e mínimo relativo en 1'5 (aprox).
- Punto de inflexión con tanxente horizontal en x=0.
- Asíntota oblicua, a recta y=x

As principais características das gráficas das funcións racionais son:

- O seu dominio, que pode non ser todo \mathbb{R}
- As asíntotas, xa sexan verticais, horizontais ou oblíquas pero tamén poden non telas, como a gráfica 5.
- Os posibles extremos.

Exercicio 8.9: Estudo analiticamente as gráficas das seguintes funcións (dominio,

asíntotas, crecemento e extremos): $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ e $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$

Solución:

Función $f(x)$

1. Dominio: $x+1=0 \rightarrow x=-1$. O dominio de $f(x)$ é todo \mathbb{R} agás -1 .

2. Asíntotas:

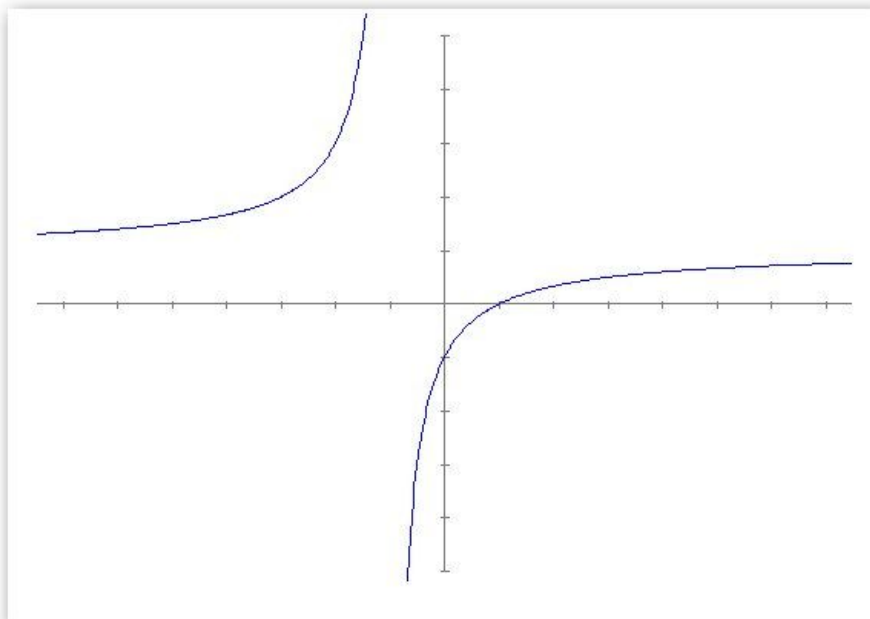
a. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0} = \pm\infty$ a recta $x = -1$ é unha asíntota vertical

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$, a recta $y = 1$ unha asíntota horizontal.

3. Crecemento: $f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$.

A derivada non se anula e sempre é positiva, non ten extremos e a función é sempre crecente.

4. Para obter a gráfica só resta dar valores.



Función g(x)

1. Dominio: como $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$. O dominio de f(x) é todo R agás ± 2 .

2. Asíntotas:

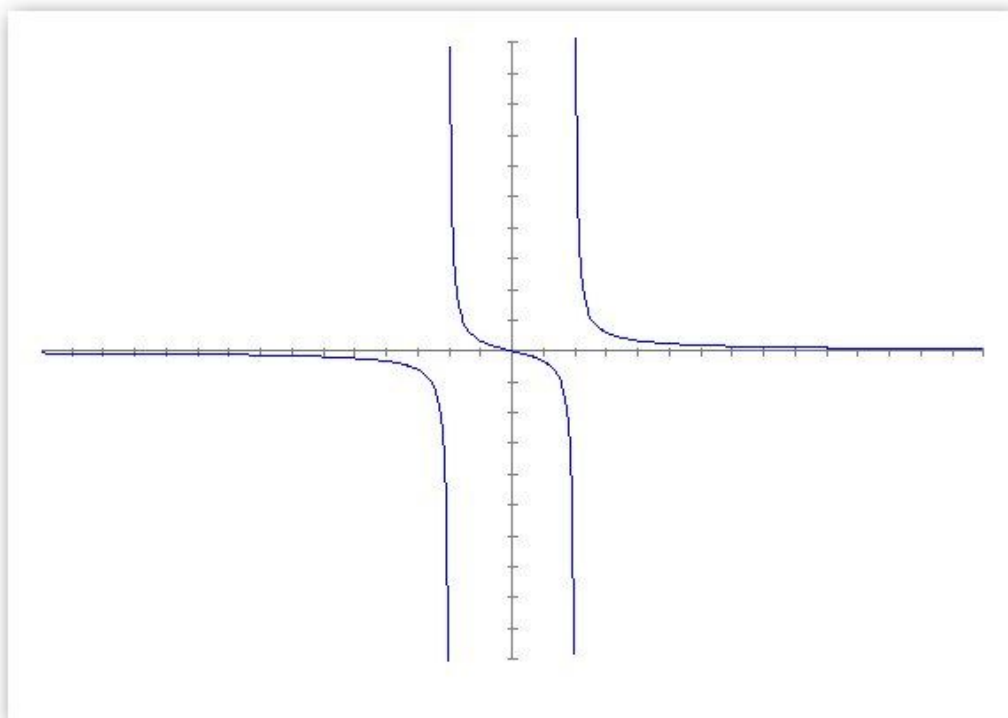
a. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0} = \pm\infty$ a recta $x = -2$ é unha asíntota vertical

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0} = \pm\infty$ a recta $x = 2$ é unha asíntota vertical

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$, a recta $y=0$ é unha asíntota horizontal.

3. Crecemento: $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 4) - x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$. A derivada non se anula e sempre

é negativa, non ten extremos e a función é sempre decrecente.

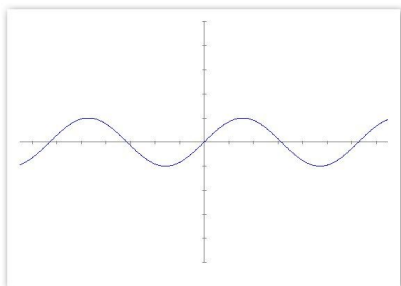


Exercicios resolto

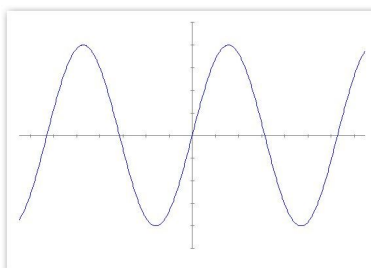
Exercicio 8.10: Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, investiga como inflúen na gráfica dunha función do tipo $f(x)=A\cdot\text{sen}(Bx+C)$ os valores dos parámetros a , b e c (lembra que, en Inglés, seno é sin)

Solución:

$$f_1(x) = \text{sen}(x)$$

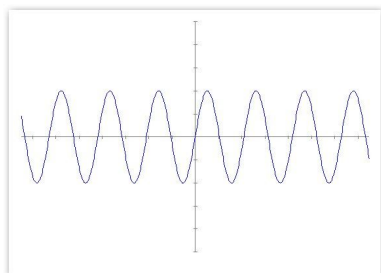


$$f_4(x) = 4 \cdot \text{sen}(x)$$

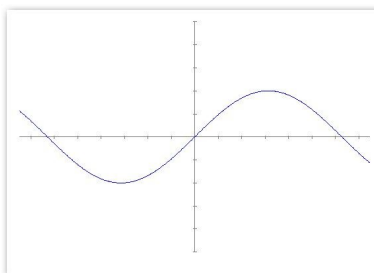


Ao variar **A**, amplitude, varia a altura dos picos e vales pero

$$f_2(x) = 2 \cdot \text{sen}(3x)$$

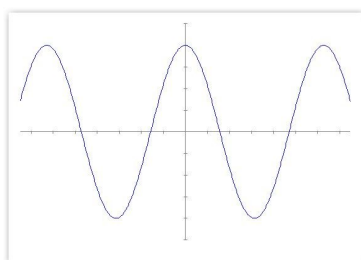


$$f_5(x) = 2 \cdot \text{sen}(0.5x)$$

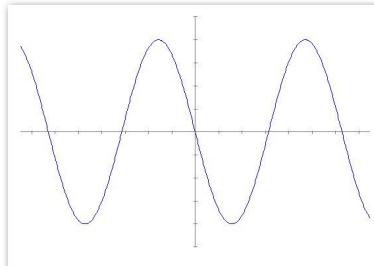


B, indica o número de ciclos completos entre 0 e 2π (ou calquera outro intervalo con esa mesma lonxitude).

$$f_3(x) = 4 \cdot \text{sen}(x + 1.57)$$



$$f_6(x) = 4 \cdot \text{sen}(x + 3.14)$$



C, fase inicial, determina o punto da onda correspondente a $x=0$ (notar que ao desprazala xusto $\pi/2$, a gráfica do seno coincide coa do coseno)

Exercicio 8.11: O número estimado de pitas do monte en Galicia en diferentes anos foi:

Estudia se o número de pitas do monte ven dado por unha función exponencial e, en caso afirmativo, atopa a súa fórmula.

anos	0 (1990)	1	2	3	4
pitas	1024	768	576	432	324

Solución: Dividimos os valores da función correspondentes a valores de x tomados de 5 en 5 (é necesario que todos teñan a mesma separación).

$$\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{768}{1024} = 0'75 \quad \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{576}{768} = 0'75 \quad \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{432}{576} = 0'75 \quad \frac{f(4)}{f(3)} = \frac{324}{432} = 0'75$$

A función é exponencial, a súa fórmula é: $f(x) = 1024 \cdot 0'75^x$

Se tomásemos os datos de, por exemplo, 2 en 2, teriamos:

$$\frac{f(2)}{f(0)} = \frac{576}{1024} = 0'5625 \quad \frac{f(4)}{f(2)} = \frac{324}{576} = 0'5625 \quad \frac{f(3)}{f(1)} = \frac{432}{768} = 0'5625$$

A fórmula sería: $f(x) = 1024 \cdot 0'5625^{\frac{x}{2}}$ onde $0'5625^{\frac{1}{2}} = 0'75$

Exercicio 8.12: Escribe a fórmula da función exponencial do exercicio anterior en forma estándar.

Solución: en forma estándar sería: $f(x) = 1024 \cdot 0'5625^{\frac{x}{2}} = 1024 \cdot \left(0'5625^{\frac{1}{2}}\right)^x$

- Debermos atopar un número que verifique: $e^N = 0'5625^{\frac{1}{2}}$.
- Ese número é o logaritmo: $N = \ln\left(0'5625^{\frac{1}{2}}\right) = -0'2788$
- Polo tanto, a función será: $f(x) = 1024 \cdot e^{-2'7488x}$

Exercicio 8.13: Os logaritmos permiten, entre outras cousas, resolver ecuacións exponenciais.

No exemplo no que debiamos atopar a idade dun fósil medindo a cantidade de C_{14} .

- O fósil contiña, cando se formou, 3 g de C_{14}
- Na actualidade contén 0'04 g de C_{14} ¿Cal é a súa idade?
- A función que describe o contido de C_{14} do fósil é: $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5570}}$

Calcula o valor exacto da antigüidade do fósil

Solución: Empregaremos logaritmos neperianos (base e).

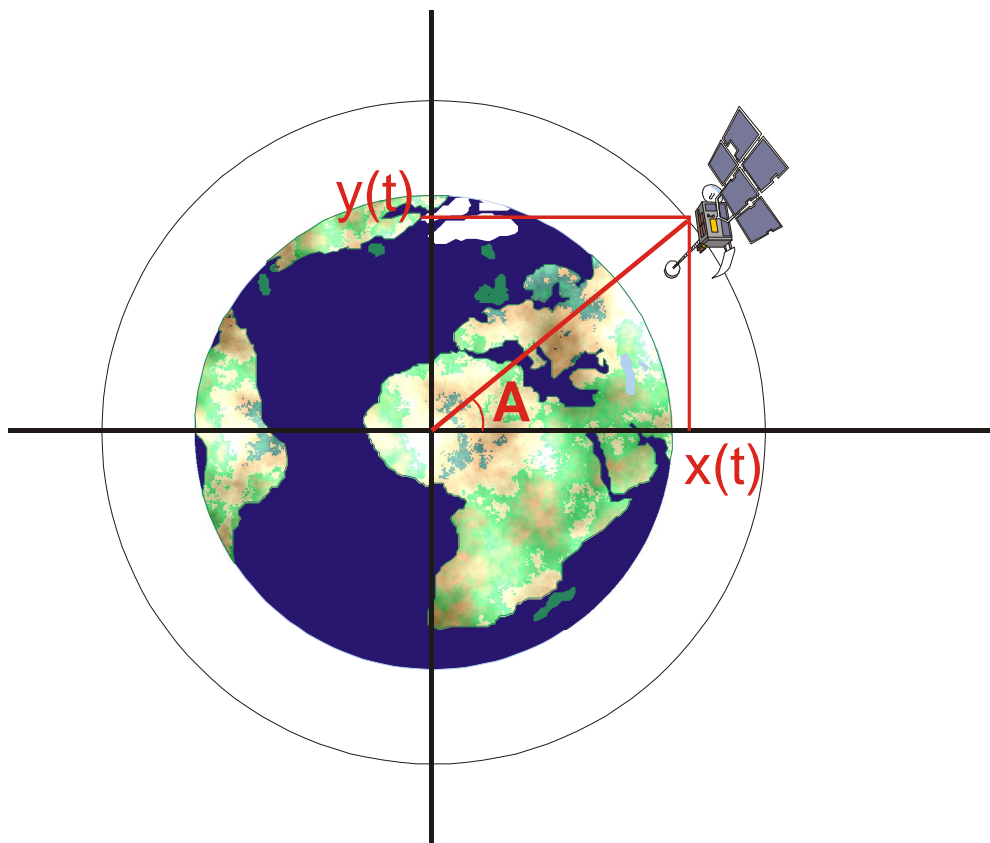
Debemos resolver a ecuación: $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5570}} = 0'04 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5570}} = 0'0133$

$$\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5570}}\right] = \ln(0'0133) \xrightarrow{\text{propiedade 3}} \frac{x}{5570} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(0'0133)$$

$$\frac{x}{5570} \cdot [\ln(1) - \ln(2)] = \ln(0'0133) \rightarrow x = \frac{\ln(0'0133) \cdot 5570}{-\ln(2)} = 34714 \text{ anos}$$

Exercicio 8.14: Atopa a función paramétrica que describe a posición dun satélite en órbita circular a unha distancia de 900 km da superficie da Terra e que completa unha órbita cada 12 horas (podes supoñer que para $t=0$ atopábase no eixe X). Calcula fórmula do vector velocidade nun intre calquera da órbita dese satélite e demostra que o seu módulo é constante ó longo de toda a traxectoria.

Solución:



- A órbita do satélite é unha circunferencia de centro o centro da Terra e radio o radio da Terra (6370 km) máis a súa altura (900 km), en total 7270
- A posición do satélite ven dada polas súas coordenadas $(x(t), y(t))$.
- Esas coordenadas van variando co tempo ao ir movéndose o satélite ao longo da súa órbita (unha circunferencia con centro no centro da Terra) e dependen do ángulo A.
- Por Trigonometría elemental (fórmase un triángulo rectángulo) podemos calcular as coordenadas nun momento dado:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 7270 \cdot \cos(A) \\ y(t) &= 7270 \cdot \sin(A) \end{aligned} \right\}$$

- Se temos en conta que o ángulo varia en función do tempo: $A = \frac{2\pi}{12} t$
- Obtemos a fórmula da función paramétrica que da a posición do satélite:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 7270 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} t\right) \\ y(t) &= 7270 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} t\right) \end{aligned} \right\} \rightarrow (x(t), y(t)) = \left(7270 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} t\right), 7270 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{180} t\right) \right)$$

Solucións aos exercicios

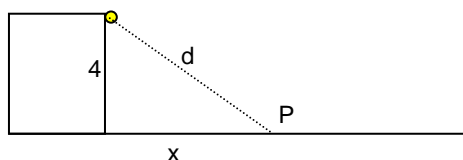
Exercicio 8.15: na esquina dunha rúa hai unha farola de 300 cd a 4 m. de altura. Como a intensidade lumínica é inversamente proporcional ao cadrado da distancia, a función que describe a intensidade lumínica no solo é:

$$I(x) = \frac{1}{x^2 + 16} \quad \text{sendo } I(x) \text{ a intensidade e } x \text{ a distancia á esquina.}$$

Se o concello coloca outra farola tamén a 4 m de altura e a 10 m, da esquina, ¿cal será a función que describa agora a intensidade de luz no solo?

Solución:

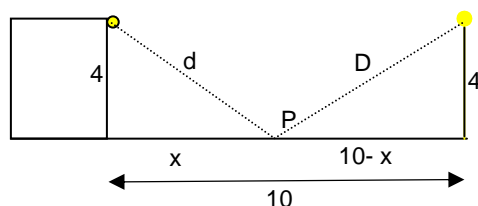
i) Analicemos a función que se nos proporciona, facendo un esquema:



Polo teorema de pitágoras:

$$d^2 = x^2 + 16 \rightarrow I(x) = \frac{1}{d^2} \rightarrow I(x) = \frac{1}{x^2 + 16}$$

ii) Vexamos a nova situación:



A intensidade en P será a suma das intensidades que proporcionan cada unha das farolas:

$$D^2 = (10 - x)^2 + 16 \rightarrow J(x) = \frac{1}{D^2} \rightarrow J(x) = \frac{1}{(10 - x)^2 + 16}$$

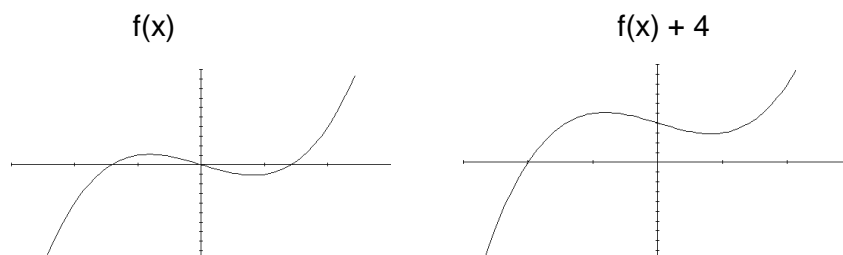
$$I(x) + J(x) = \frac{1}{x^2 + 16} + \frac{1}{(10 - x)^2 + 16}$$
 e poderíamos facer operacións para simplificar.

Exercicio 8.16: coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, estudia que sucede ao sumarlle a unha función calquera un número (función constante).

Solución:

Se $f(x)$ é unha función calquera, $f(x) + n$ é unha nova función que vale, en cada x , o que valía $f(x)$ máis ese n que sumamos.

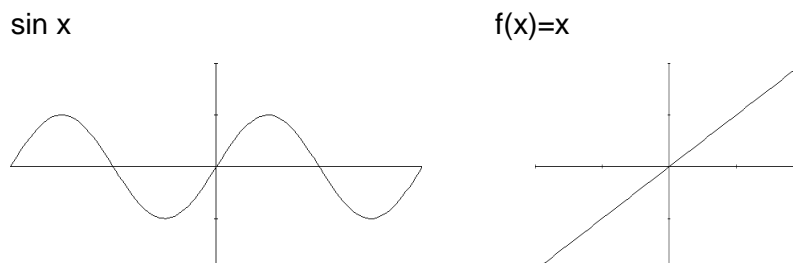
Daquela a gráfica será semellante, pero “subida” n unidades:



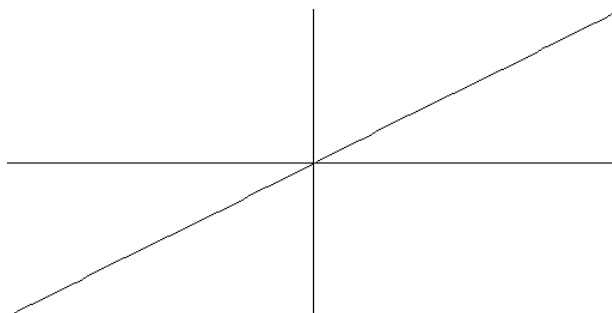
Exercicio 8.17: coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, observa que sucede ao sumar a función *sin* coa función identidade, $f(x)=x$.

Solución:

i) Representamos cada unha por separado, para facenos unha primeira idea:



ii) Agora sumámoas $\sin x + x$

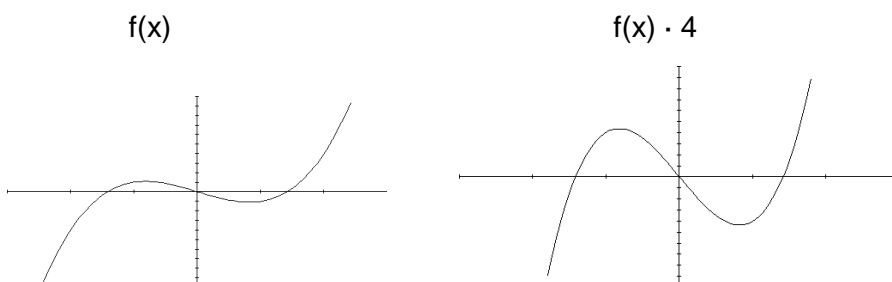


O que podemos observar é “case” a función $f(x) = x$, xa que os valores de $\sin(x)$ son moi pequenos respecto dela, polo que as alteracións que lle causan son moi pequenas

Exercicio 8.18: coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, estudia que sucede ao multiplicar unha función calquera por un número (función constante).

Solución:

Se $f(x)$ é unha función calquera, $f(x) \cdot n$ é unha nova función que vale, en cada x , o que valía $f(x)$ por ese n que multiplicamos.



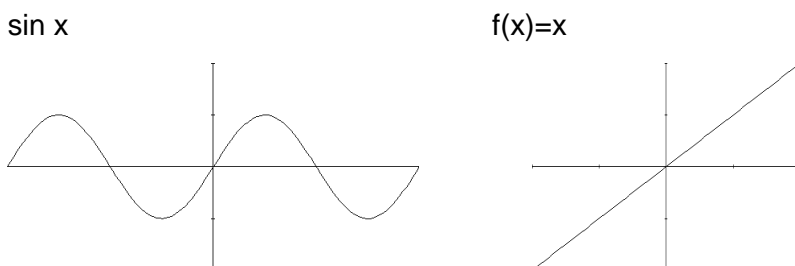
Observamos que a función “estírase”, pois no mesmo intervalo ten que chegar a valer 4 veces máis (ou catro veces menos, no caso dos negativos).

Exercicio 8.19:

a) Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, observa que sucede ao dividir a función *sin* entre a función identidade, $f(x)=x$.

Solución:

i) Representamos cada unha por separado, para facenos unha primeira idea:



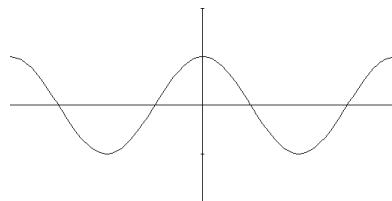
ii) Agora dividímolas $\frac{\sin x}{x}$

Se nos fixamos, en torno ao 0 son case iguais, polo que debe ter un valor aproximado de 1, a pesar de que a expresión numérica sería $0/0$.

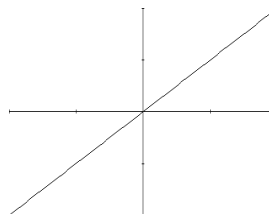
b) Coidas que se cambiamos *sin* por *cos* obteremos un resultado similar?

i) Representamos cada unha por separado, para facenos unha primeira idea:

$\sin x$



$f(x)=x$



ii) Agora dividímolas $\frac{\cos x}{x}$

Se nos fixamos, en torno do 0 debe dar:

$-\infty$ antes do 0, xa que $\cos x$ vale case 1 e x case 0,
resultando: $1/-0$

$+\infty$ despois do 0, xa que $\cos x$ vale case 1 e x algo máis ca 0,
resultando: $1/+0$

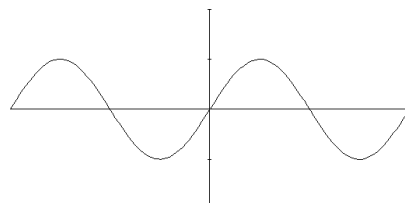
Exercicio 8.20:

- a) Coa axuda da calculadora gráfica ou dun programa de representación de funcións, investiga que sucede ao compoñer a función \sin coa función $f(x)=1/x$.

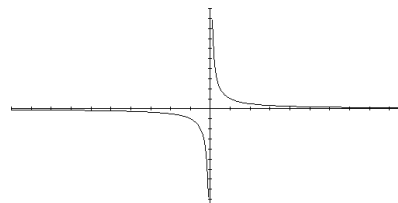
Solución:

i) Representamos cada unha por separado, para facenos unha primeira idea:

$\sin x$

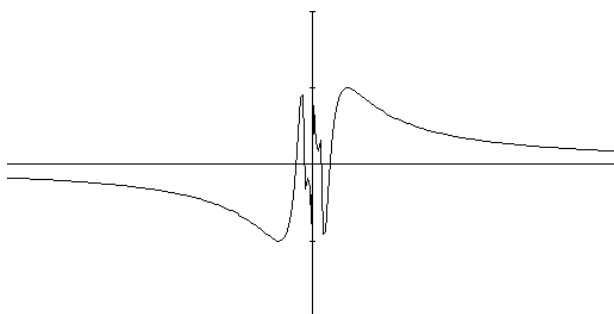


$f(x)= 1/x$



ii) Agora facemos a composición. Damos de nome $g(x)=\sin x$

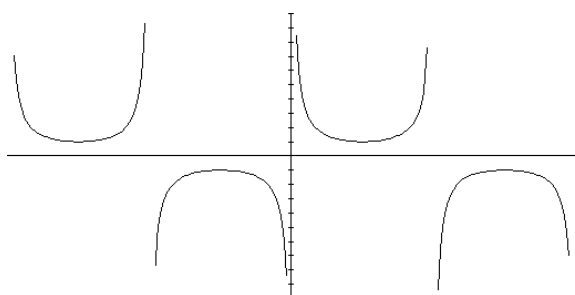
- f composto con g será: $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



Se x tende a 0, $1/x$ faise
moi grande, pero a función
 \sin oscila entre -1 e 1

- g composto con f será:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = \frac{1}{\sin x}$$



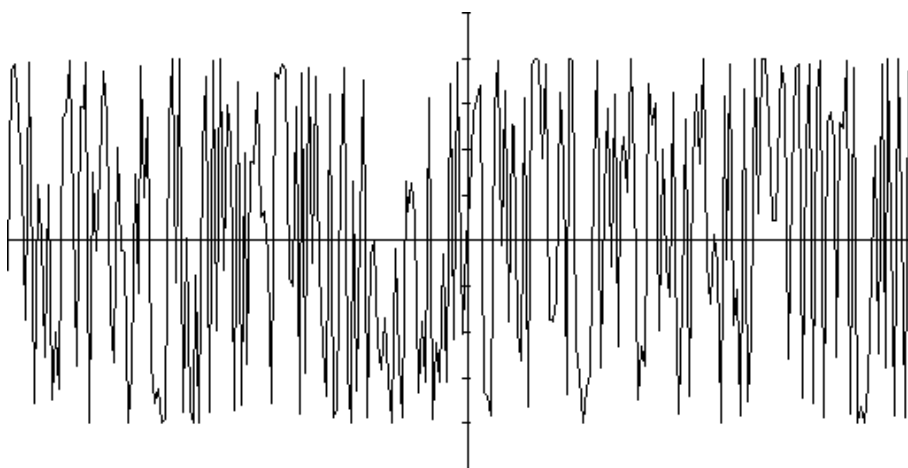
Como \sin oscila entre -1 e 1, cada vez
que se anule haberá unha
discontinuidade.

Se x tende a 0, ao ser $\sin 0 = 0$, o
cociente tende a infinito (- ou +,
respectivamente).

Exercicio 8.21: Estudiamos que as funcións elementais
caracterízanse pola súa regularidade. As súas gráficas non teñen
cambios bruscos ou, polo menos eso di a teoría.

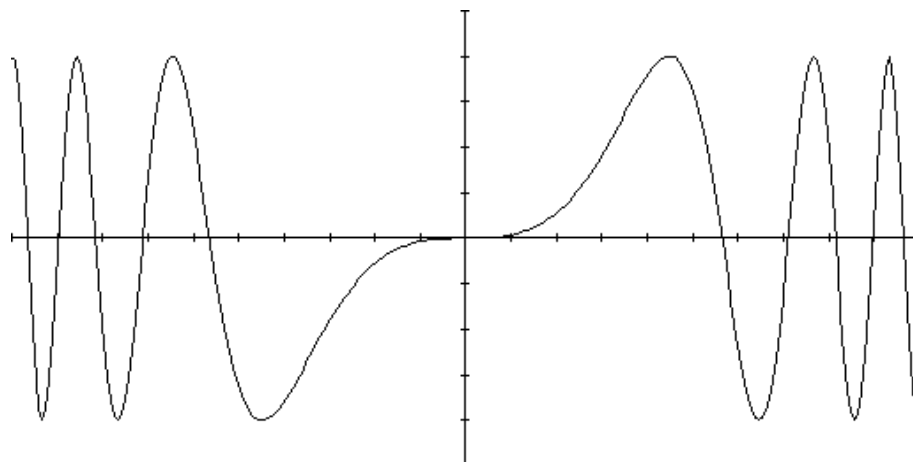
Observa que sucede coa gráfica de, por exemplo, $f(x) = 4\sin(x^3)$.

Ocórreseche algunha explicación ou é que a teoría está errada?



Ao ter x^3 , os valores do ángulo “aceléranse”, e o sin acaba máis rápido os extremos (quer -1, quer +1). Multiplicando por 4 o que facemos e estírala, aumentando o efecto do qu semellan picos.

Se representamos un entorno pequeno, por exemplo entre -10 e 10, vemos como en realidade non hai picos senón curvas “bruscas”



Solucións aos exercicios

Exercicio 8.22: Nun concello decidiron potenciar o aforro de auga con prezos en función do consumo:

- Ata 10 m^3 mensuais, págase só 10 €.
- O que exceda de 10 m^3 , ata 15 m^3 , pagarase a 1'5 € o m^3 .
- O que exceda de 15 m^3 , pagarase a 3 € o m^3 .

a) Completa a seguinte táboa

Consumo m^3	0	5	10	11	12	15	16	20
Importe €	10	10	10	11'5	13	17'5	20'5	32'5

b) ¿Cal será a expresión que relacione o consumo co importe?

Solución:

Vemos que hai tres partes:

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x \leq 10 \\ 10 + 1'5 \cdot (x - 10) & \text{se } 10 < x \leq 15 \\ 17'5 + 3 \cdot (x - 15) & \text{se } 15 < x \end{cases}$$

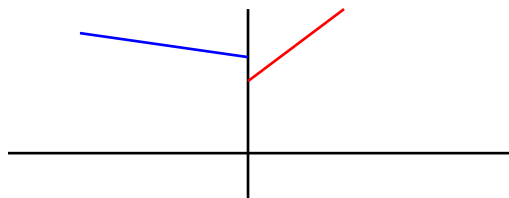
Exercicio 8.23: Quentamos un trozo de xeo de auga de 20 gr desde -10°C ata que se funde e acada os 4°C . A táboa co volume a diferentes temperaturas foi:

	sólido			líquido		
Temperatura en $^\circ \text{C}$	-10	-5	$\lim_{x \rightarrow 0^-}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+}$	1	2
Volume en cm^3	20	19'9	19'8	17'8	17'9	18

a) ¿Que sucede en 0? Prodúcese o cambio de estado, de sólido a líquido. Como o xeo ten máis volume, hai unha diminución drástica.

b) Fai unha gráfica con eses valores.

A primeira parte baixa unha décima cada 5° , a segunda sube unha décima cada grado:



c) Atopa a expresión desa función.

Vemos que hai dúas partes:

i) Unha recta de pendente $-0'1/5$, que pasa polo punto $(-10, 20)$

$$y - 20 = -\frac{0'1}{5}(x + 10) \rightarrow y = -\frac{0'1}{5}x + \frac{10'1}{5} \rightarrow y = -0'02x + 20'2$$

ii) Unha recta de pendente $+0'1/1$, que pasa polo punto (2, 18)

$$y - 18 = \frac{0'1}{1}(x - 2) \rightarrow y = 0'1x + 17'8$$

Finalmente:

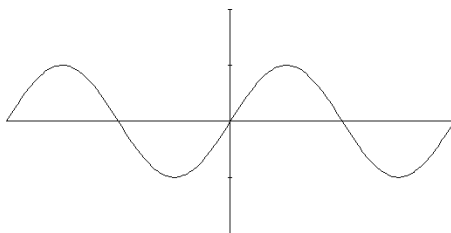
$$f(x) = \begin{cases} -0'02x + 20'2 & \text{se } x \leq 0 \\ 0'1x + 17'8 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Exercicio 8.24: considera a función formada pola composición da función sin coa función valor absoluto, ¿como será a súa gráfica?

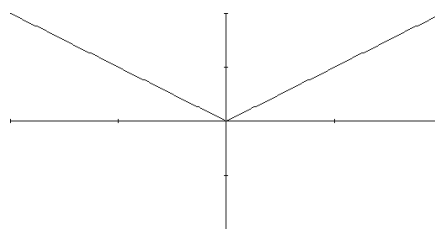
Solución:

i) Representamos cada unha por separado, para facenos unha primeira idea:

$\sin x$

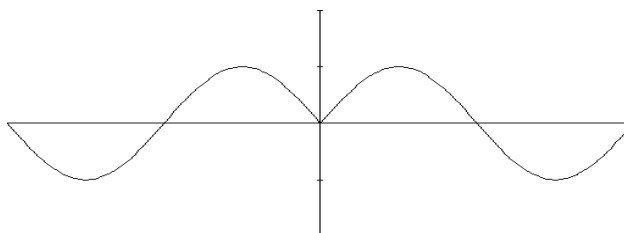


$f(x) = |x|$



ii) Agora facemos a composición. Damos de nome $g(x) = \sin x$

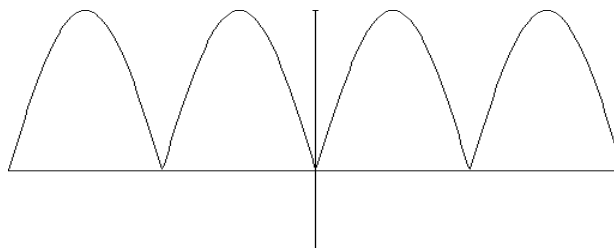
- f composto con g será: $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sin|x|$



A parte positiva coincide, pois conserva o signo; porén, a parte negativa invértese, ao ser o signo o contrario.

- g composto con f será:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = |\sin x|$$



Exercicio 8.25: resolve as ecuacións:

a) $|x - 2 \cdot (x - 2)| = 3$ b) $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| = 0$ c) $|x^2 - 6x + 8| = 3$

a) Primeiro facemos as operacións:

$$|x - 2 \cdot (x - 2)| = 3 \rightarrow |x - 2x + 4| = 3 \rightarrow |-x + 4| = 3$$

$$|-x + 4| = 3 \Rightarrow \begin{cases} -x + 4 = 3 \\ ou \\ -x + 4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = -1 \\ ou \\ -x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 7 \end{cases}$$

b) A división é 0 cando sexa 0 o numerador (e non o sexa o

denominador): $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c)

$$|x^2 - 6x + 8| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 3 \\ ou \\ x^2 - 6x + 8 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

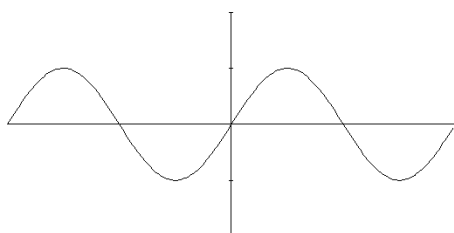
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow 5 \text{ ou } 1 \\ ou \\ x^2 - 6x + 11 = 0 \rightarrow \text{non ten solución} \end{cases}$$

Exercicio 8.26: considera a función formada pola composición da función sin coa función parte enteira, ¿como será a súa gráfica?

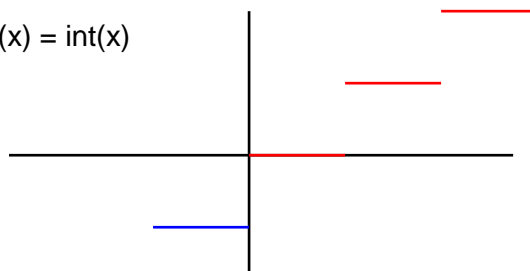
Solución:

i) Representamos cada unha por separado, para facenos unha primeira idea:

sin x



$f(x) = \text{int}(x)$



ii) Agora facemos a composición. Damos de nome $g(x)=\sin x$

- f composto con g será: $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sin(\text{int}(x))$
- g composto con f será:

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = \text{int}(\sin x)$$

Solucións aos exercicios propostos:

Exercicio 8.26: resolve a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$

Debemos asignar 1 como coeficiente de x^2

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Exercicio 8.27: resolve a ecuación $x^2 - 4 = 2x - 1$

Iguálamos a 0: $x^2 - 4 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

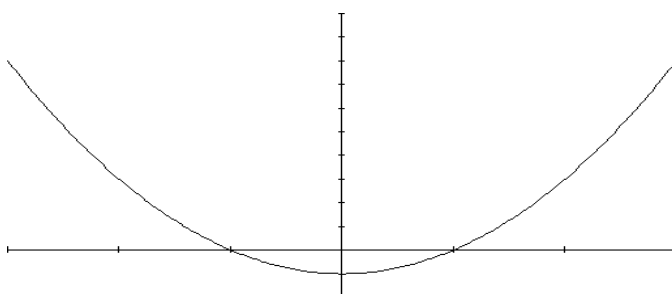
Debemos asignar 1 como coeficiente de x^2

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Exercicio 8.28: resolve a ecuación $x^2 - \cos(x) = 0$

Con un programa de gráficas representamos a función

$$f(x) = x^2 - \cos(x)$$



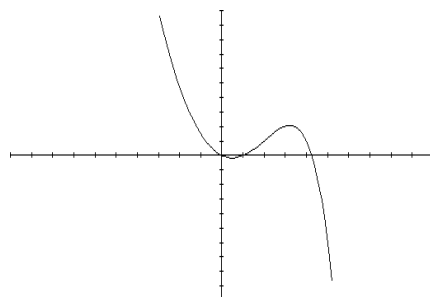
Vemos que o valor 0 acádao moi cerca dos puntos -1 e 1. Podemos comprobar coa calculadora:

$$f(1) = 1^2 - \cos 1 = 1 - 0.999847695 = 0.00015$$

Exercicio 8.29: resolve a ecuación $x^2 + 1 = 2^x$

Con un programa de gráficas representamos as dúas funcións. Os puntos de corte serán as solucións:

Ou ben igualamos a 0: $x^2 + 1 - 2^x = 0$ e representamos esta nova función: $f(x) = x^2 + 1 - 2^x$



O valor 0 acádase cerca do 0, do 1 e do 4'25.

Vemos xa que, efectivamente $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$

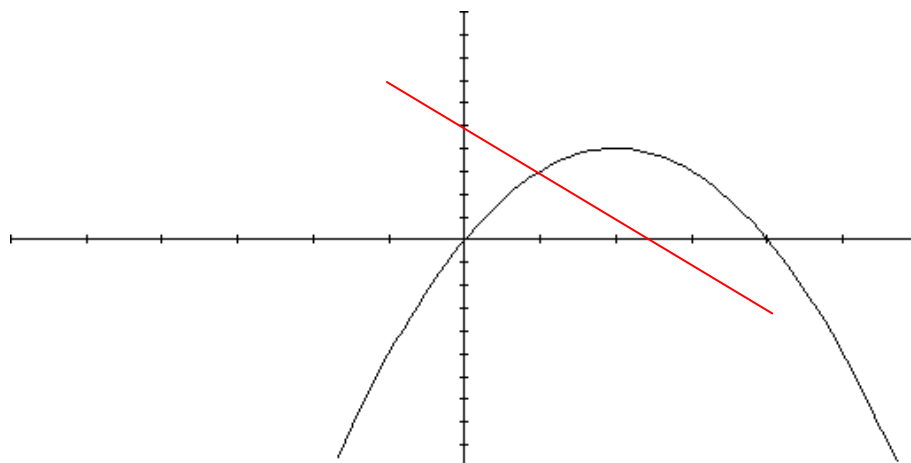
Coa calculadora: $f(4'25) = 0'035$.

Exercicio 8.30: resolve graficamente o sistema ecuacións:

$$\begin{cases} x^2 + y = 4x \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Con un programa de gráficas representamos as dúas funcións:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = -2x + 5 \end{cases} \text{ Os puntos de corte serán as solucións:}$$

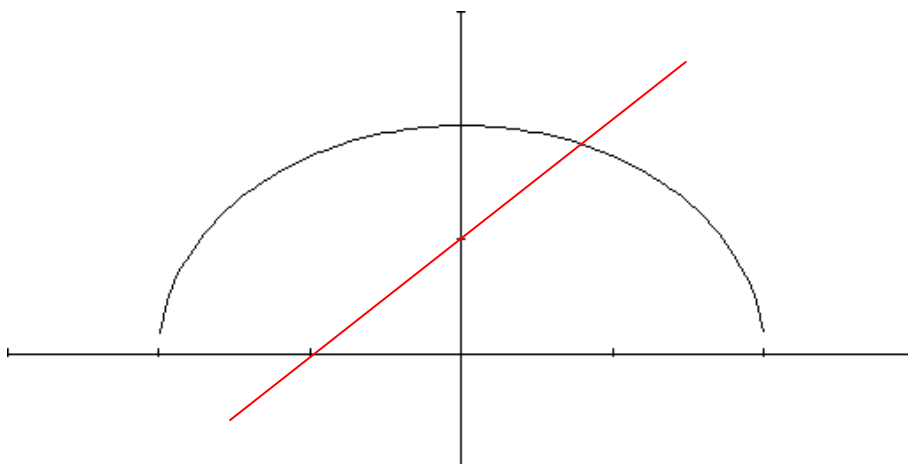


Córtanse para $x = 1$

Exercicio 8.31: resolve graficamente o sistema ecuacións:

$$\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = x + 1 \end{cases}$$

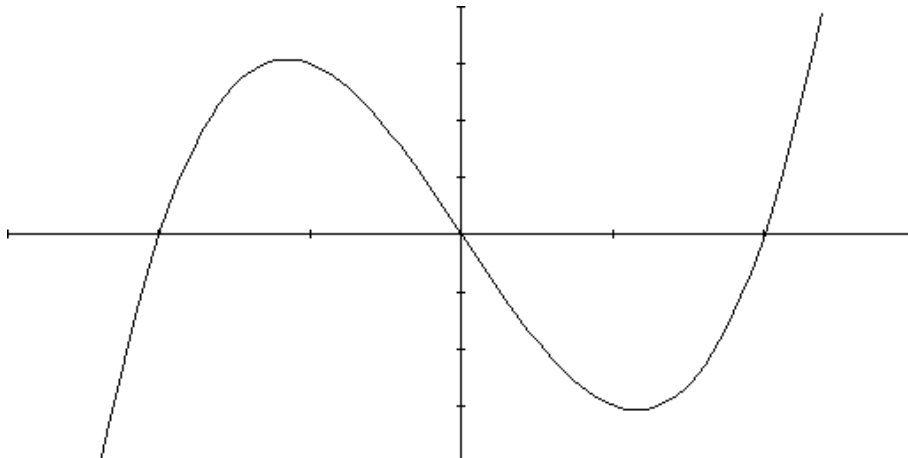
Con un programa de gráficas representamos as dúas funcións. Os puntos de corte serán as solucións:



Percorremos a gráfica para ver con máis detalle: o máis próximo que dá este programa na curva é para $x=0'80$, $y=1'83$, mentres na recta será $1'80$.

Exercicio 8.32: resolve graficamente a inecuación: $x^3 - 4x > 0$

Resolver a inecuación é o mesmo que atopar os valores de x nos que a función $f(x) = x^3 - 4x$ toma valores positivos (a gráfica está por derriba do eixe X):



É positiva no intervalo $(-2, 0)$ e no $(2, +\infty)$

Exercicio 8.33: Despexa y na seguinte inecuación: $10x - 5y \leq 20$
e debuxa o semiplano solución.

Solución:

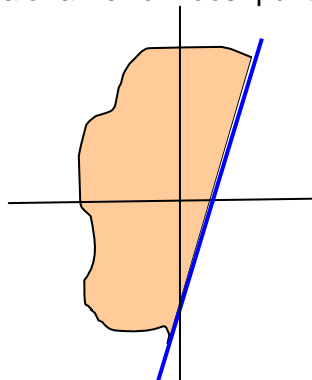
$$10x - 5y \leq 20 \rightarrow -5y \leq 20 - 10x \rightarrow y \geq \frac{20 - 10x}{-5} \rightarrow y \geq 2x - 4$$

(recordar que cando cambie un n° negativo multiplicando ou dividindo, cambia o signo da desigualdade)

Agora pintamos a recta $y = 2x - 4$ e fixámonos que nós temos os puntos en que "y", ou sexa a altura, é maior ou igual: os que están por riba da recta e os da propia recta:

Represento a recta e sinalo a rexión dos puntos do plano que constitúen a solución.

x	y
0	-4
2	0

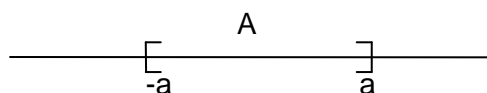


Unha forma de comprobación sería coller un punto calquera, por exemplo o (0, 0) e ver se verifica a desigualdade: $0 \geq 2 \cdot 0 - 4 = -4$. Si cumpre a desigualdade, debe estar na rexión sinalada e, efectivamente, está.

Exercicio 8.34: resolve a desigualdade: $|x - 1| \leq 3$

Solución: Se $|A| \leq a$ significa que A está comprendido entre $-a$ e a

$$|A| \leq a \Leftrightarrow -a \leq A \leq a$$



$$\text{Polo tanto: } |x - 1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \quad (\text{sumando } 1)$$

$$-3 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 3 + 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$$

Exercicio 8.35: resolve a inecuación $|2x - 3| < 1$

$$|2x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 3 < 1 \quad \text{Tratamos de deixar despegada a } x$$

Para eso primeiro sumamos 3 a cada parte da desigualdade e logo dividimos por 2, que como é un número positivo non cambia o sentido da desigualdade $|2x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 3 < 1$

$$-1 + 3 < 2x - 3 + 3 < 1 + 3 \Rightarrow 2 < 2x < 4 \Rightarrow \frac{2}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{4}{2} \Rightarrow 1 < x < 2$$

Para que $|2x - 3| < 1$, x puede tomar cualquiera valor comprendido entre 1 e 2, a solución é polo tanto o intervalo (1,2).

Exercicio 8.36: resolve a inecuación $\left| \frac{2-3x}{2} \right| \leq 4$

$$\left| \frac{2-3x}{2} \right| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \frac{2-3x}{2} \leq 4$$

Tratamos de despexar x.

- Multiplicamos por dos cada parte de la desigualdad:

$$-4 \cdot 2 \leq 2 \cdot \frac{2-3x}{2} \leq 4 \cdot 2 \rightarrow -8 \leq 2-3x \leq 8$$

- Restamos 2: $-8-2 \leq 2-3x-2 \leq 8-2 \rightarrow -10 \leq x \leq 6$
- Dividimos por (-3) recordando que ao ser negativo cambia o

sentido da desigualdad: $\frac{-10}{-3} \geq \frac{-3x}{-3} \geq \frac{6}{-3} \rightarrow \frac{10}{3} \geq x \geq -2$

x debe ser maior que -2 e menor que 10/3 ,é dicir a solución da inecuación é o intervalo (-2,10/3)