

# Unidade 6: Funcións

1. Concepto de función
  - 1.1. Dominio.
  - 1.2. Xeitos de descripción.
2. Características.
  - 2.1. Continuidade.
  - 2.2. Crecemento e decrecemento. Extremos.
  - 2.3. Curvatura. Puntos de inflexión.
  - 2.4. Ramas asintóticas.
  - 2.5. Periodicidade.
3. Límite dunha función nun punto.
  - 3.1. Definición.
  - 3.2. Cálculo.

## Introdución

### *Matemáticas: na Ciencia e na Vida*

O gran matemático Sixto Rios definía as Matemáticas como unha colección de “modelos”, isto é: representación de obxectos ou situacións e das súas relacións. De feito, as distintas partes das Matemáticas tiveron un desenvolvemento separado e case independente:

- **Álgebra:** Ocúpase da fundamentación das Matemáticas. Xurde a partir da procura de métodos para resolver ecuacións.
- **Xeometría:** É unha das partes máis antigas. O seu obxectivo é a descrición do espacio e as súas figuras.
- **Análise:** A parte das Matemáticas con maior relación coa Física, de feito o seu nacemento foi o estudio de magnitudes que varían en relación ó tempo (a posición dun móbil, a velocidade, etcétera). O concepto básico do Análise é o de **función**.
- **Probabilidade:** Desenvólvese a partir dos traballos de Pascal e Fermat (s XVII) sobre xogos de cartas e dados. O seu obxectivo é describir fenómenos impredecibles nos que interveña o azar.
- **Estatística:** Xurde dun xeito eminentemente práctico ó estudar a esperanza de vida de poboacións.

## **Análise matemática**

Podemos establecer a súa orixe cando Descartes, despois de inventar os sistemas de coordenadas, establece que algunhas curvas e figuras corresponden a representación gráfica de ecuacións.

Ó traballar con ecuacións en lugar de curvas concretas, os matemáticos pasaron de estudar problemas particulares (cálculo da área dunha elipse, como trazar unha tanxente a unha parábola, ...) a problemas xerais (atopar un método para calcular a área dunha figura a partir da súa ecuación, atopar a ecuación da tanxente a unha curva dada pola súa ecuación, ...).

Pero o aspecto fundamental do Análise é que as ecuacións non só describen figuras xeométricas, tamén describen relacións entre magnitudes físicas. A ecuación  $y=4'9x^2$  corresponde a unha parábola no plano pero tamén representa o espacio percorrido por un móbil en caída libre.

Dese xeito, o estudio das ecuacións, proporcionou unha ferramenta imprescindible para a descrición da realidade e dos fenómenos físicos. Non é casualidade que Newton sexa un dos inventores da Análise moderna e tamén un dos maiores físicos de todos os tempos.

# Funcións

## Concepto de función

Cando estudamos, por exemplo, o efecto invernadoiro atopámonos que é necesario medir a concentración de CO<sub>2</sub> na atmosfera e ver como vai cambiando esa concentración co paso do tempo: Hai unha relación entre o tempo (a magnitude independente) e a cantidade de CO<sub>2</sub> (magnitude dependente<sup>1</sup>) de xeito que, a cada instante (valor de tempo) correspóndelle unha certa concentración de CO<sub>2</sub> na atmosfera.

A función é un modelo para estudar esas relacións entre magnitudes que podemos representar por números. Definimos:

**Función:** Relación entre dous conxuntos numéricos de xeito que a cada valor do conxunto inicial correspóndelle un e só un do final.

O conxunto inicial recibe o nome de **dominio**, e o final **imaxe** ou percorrido.

As funcións que imos estudar neste curso teñen por dominio e imaxe dous conxuntos de números reais. Son as **funcións reais de variable real** que chamaremos simplemente funcións.

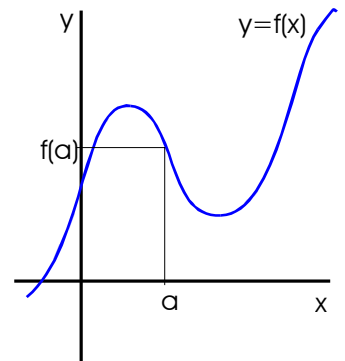
### Exemplo:

A Teoría da Relatividade di que a masa dun obxecto depende da súa velocidade segundo a fórmula

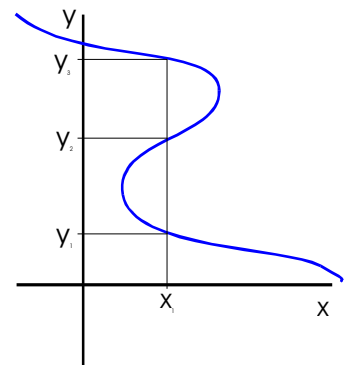
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{3 \cdot 10^8}\right)^2}}$$

A relación entre velocidade e masa é unha función pois a cada valor de  $v$  correspóndelle un único valor de  $m$ .

- $m$ , a masa do obxecto en Kg, é a variable dependente.
- $v$ , velocidade do obxecto en m/s, é a variable independente.
- Tanto  $m_0$ , masa do obxecto en repouso, como  $3 \cdot 10^8$ , velocidade da luz no baleiro, son números constantes.



Esta gráfica corresponde a unha función: A cada valor  $x$  correspóndelle un e só un  $f(x)$ .



Esta gráfica non pode ser dunha función: Ó valor  $x_1$  correspóndenlle varios valores de  $y$  ( $y_1, y_2, y_3$ )

<sup>1</sup> A designación de “magnitudes independentes e dependentes” non é a máis axeitada. Entre as magnitudes pode non existir ningunha relación causa-efecto. Simplemente **eliximos** como magnitude dependente a que nos interese describir a partir dos valores da outra. No exemplo proposto, describir o tempo a partir da cantidade de CO<sub>2</sub> non semella moi interesante, pero describir a cantidade de CO<sub>2</sub> a partir dos anos para, por exemplo, estudar a súa evolución si o é.

O **dominio** pode non estar defenido explicitamente e ser necesario investigar cal é, comprobando que valores podemos substituír na expresión da función.

Non podemos substituír  $v$  por  $3 \cdot 10^8$ , xa que nos levaría a ter que dividir entre 0, o cal non é posible:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 1^2}} = \frac{m_0}{0} \notin \mathbb{R}$$

Nin por valores maiores de  $3 \cdot 10^8$ , xa que nos levaría a ter que facer a raíz cadrada de números negativos, e non existe:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{6 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 2^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{-3}} \notin \mathbb{R}$$

O dominio da función serán os valores menores de  $3 \cdot 10^8$ .

Unha consecuencia física da función anterior é que un corpo con masa non pode alcanzar a velocidade da luz.

### Exercicio 6.1

Atopa os dominios das seguintes funcións:

a)

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{b) } g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4x} \quad \text{c) } h(x) = \frac{\sqrt{x - 4}}{x^2 - 4x}$$

## Descrición dunha función

Podemos describir unha función de moitos xeitos, en especial mediante:

**Táboas**, nas que aparecen algúns dos valores que relaciona a función.

As táboas son doadas de manexar pero só aparecen algúns dos valores, e ás veces é difícil decatarse de cal é a relación subxacente entre as magnitudes.

### Exemplo:

Consumo en kw·h	Importe en €
156	51'2
349	89'8
231	66'2
70	34

O consumo de electricidade dunha familia en varios meses e o importe correspondente a cada un, figuran na táboa:

Desde un punto de vista matemático, estamos diante dunha relación entre dous conxuntos de números reais de xeito que a cada valor do primeiro (o consumo) asóciase un e só un do segundo (o importe correspondente).

**Gráficas**, doadas de manexar e interpretar pero pouco exactas para calcular valores concretos da función. Utilízase sempre o eixe X para os valores da magnitude inicial (variable independente) e o Y para os da final (variable dependente).

Os puntos da gráfica son da forma  $(x, f(x))$  pois a segunda coordenada é o valor que a función lle asocia a primeira. A gráfica, e as veces tamén a función, noméanse coa expresión  $y=f(x)$ .

### Exemplo:

A gráfica que representa o importe, en €, segundo o consumo, en Kw.h, dos recibos eléctricos da táboa anterior é a da figura. É doado ver que relación hai entre consumo e importe (os € *suben* proporcionalmente aos Kw.h), pero non é posible apreciar con exactitude valores concretos. Podemos ver que incluso cun consumo 0 temos que pagar (é a cuota fixa, por dispoñer do servizo eléctrico), pero resulta difícil saber exactamente canto.

**Fórmulas:** a función exprésase mediante símbolos. Son moi precisas e a partir delas é doado construír táboas e gráficas.

As funcións que veñen descritas por unha soa fórmula simple reciben o nome de **funcións elementais**.

En moitas ocasións non existe ningunha fórmula axeitada para describir unha relación entre magnitudes.

### Exemplo:

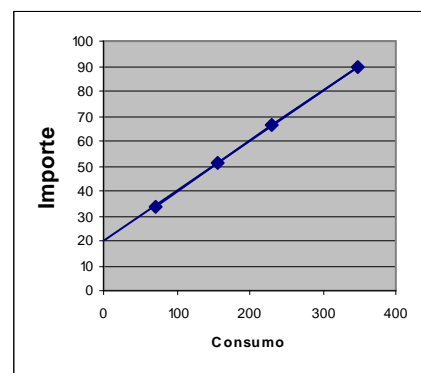
Podemos buscar a fórmula da función que describe o importe dos recibos da electricidade segundo o consumo.

Dado que a gráfica é unha recta, a función ten que ser polinómica de grao 1:  $f(x)=ax+b$

Para atopar os valores de a e b substituímos na fórmula xeral dous dos valores da táboa:

$$\left. \begin{array}{l} f(156) = a \cdot 156 + b = 51'2 \\ f(349) = a \cdot 349 + b = 89'8 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 156a + b = 51'2 \\ 349a + b = 89'8 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0'2 \\ b = 20 \end{array} \right.$$

A fórmula da función é:  **$f(x)=0'2x+20$**



### Exercicio 6.2

¿A que corresponden as constantes 0'2 e 20 que aparecen na fórmula?

¿Cal sera o importe se o consumo é de 240 kw-h?

Se o importe do recibo foi de 50 €, ¿cal tiña sido o consumo?

### Exercicio 6.3

Colocamos un capital de 6000 € en letras do tesouro a un interese do 5% anual (interese simple).

- Constrúe unha táboa co capital total (capital máis intereses) nos anos 0, 1, 2, 3 e 4. (0 indica o inicio).
- Representa graficamente eses valores.
- Atopa a fórmula que corresponde a esa función.



### Exercicio 6.4

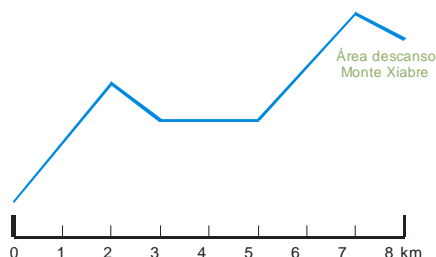
Imos vertendo na botella da figura vasos de auga.. Debuxa a gráfica correspondente a altura da auga segundo o número de vasos que se teñan baleirado.

### Exercicio 6.5

Desde o instituto de Carril, en Vilagarcía, os alumnos de 1º de bacharelato fixeron unha excursión ao monte Xiabre seguindo un percorrido co perfil topográfico da figura.

Nas subidas a súa velocidade foi 3 km/h, nas baixadas 8 km/h e 5 km/h nos chans. Descansaron ½ hora no primeiro alto e 2 horas no alto do Xiabre e logo volveron polo mesmo camiño

- Debuxa a gráfica da velocidade segundo o tempo.
- Debuxa a gráfica da distancia percorrida segundo o tempo.

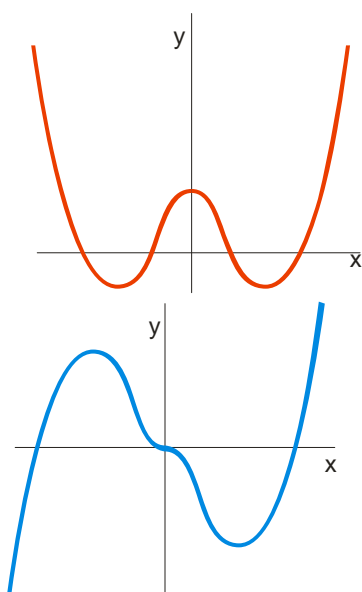


## Características: simetría

En moitas ocasións, a gráfica e os valores dunha función presentan algún tipo de simetría, o que facilita o seu estudo.

En particular, estudaremos dous tipos de simetrías:

- Simetría en relación ao eixe Y:** dobrando a gráfica polo eixe Y, as dúas metades coinciden. O resultado da función en valores de x con signo contrario é igual:
  - Simétrica respecto ao eixe Y  $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$
- Simetría en relación á orixe de coordenadas:** as dúas metades coinciden, pero unha ao revés da outra. O resultado da función en valores de x con signo contrario é tamén de signo contrario:
  - Simétrica respecto á orixe  $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$



### Exercicio 6.6

Estuda se as seguintes función son simétricas en relación á orixe e ao eixe Y.

a)  $y = x^3 - 4x$

b)  $y = \frac{1}{x^2}$

c)  $y = 2 - 2x^2$

## Características: Crecemento

O gráfico azul da figura rexistra as temperaturas medias anuais na estación de Lourizán (Pontevedra),

Para facilitar a interpretación suavizáronse os valores engadindo, en vermello, a liña de tendencia de medias móviles de 4 anos (sustitúese cada valor pola media dos catro anos anteriores).

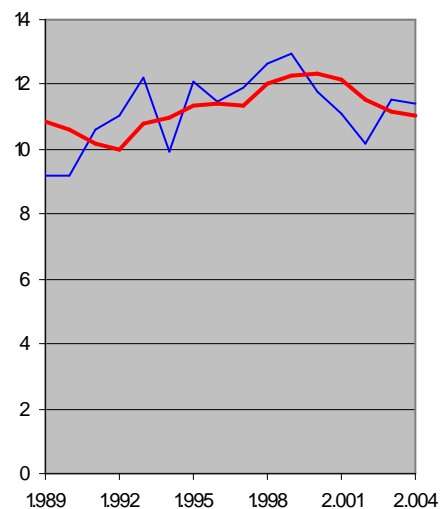
Na liña de medias móviles podemos apreciar que no período 1989-1992 as temperaturas baixaron, subiron no período 1992-2000 e volveron baixar entre 2000-2004.

A variación dunha función é unha das súas características máis importantes:

- Unha función é **crecente** se ao aumentar o valor da variable independente,  $x$ , tamén aumenta o valor da función ou, cando menos, non decrece.

É **estritamente crecente** cando ó aumentar  $x$  tamén aumente o valor da función.

- Unha función é **decrecente** se, ao aumentar o valor da  $x$ , non aumenta o valor da función e estrictamente decrecente cando diminúe o valor da función.



### Exercicio 6.7

Estudia en que intervalos son crecentes e en cales son decrecentes as funcións seguintes:

a)  $y = -2x + 4$    b)  $y = 3x - 6$    c)  $y = -\frac{3}{2}x + 6$    d)  $y = \frac{x}{2}$

d) ¿Que determina se unha función de grao 1 é crecente?

### Exercicio 6.8

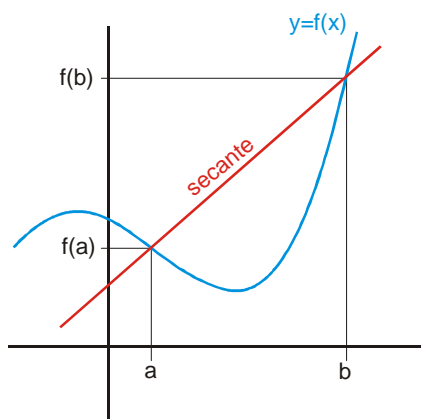
Estuda en que intervalos son crecentes e en cales son decrecentes as funcións seguintes:

a)  $y = -2x^2$    b)  $y = x^2 - x$    c)  $y = -x^2 + 4x$    d)  $y = \frac{x^2}{2}$

d) ¿En que intervalos é crecente unha función de grao 2?

## Exercicio 6.9

A función  $f(x) = \frac{k}{x}$  ( $k$  un número fixo) chámase de proporcionalidade inversa, ¿é crecente?



## Taxa de variación media

Para medir a variación dunha función empregaremos a relación, taxa, entre o que varia a  $x$  e o que varia a  $y=f(x)$ .

Dada unha función  $f(x)$  e un intervalo  $[a, b]$ , definimos a *taxa de variación media* de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  como o cociente do que varia  $f(x)$  no intervalo entre o que varia  $x$ :

$$TVM_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Graficamente correspóndese coa pendente da recta secante da función nese intervalo.

### Exemplo:

Ao deixar caer un obxecto, o espazo que percorre, en metros, en relación ao tempo, en segundos, ven dado por:

$$s = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \xrightarrow{g=9'8} s = 4'9 \cdot t^2$$

Estudemos a súa variación en intervalos consecutivos de 2 s.

$$\begin{aligned} \circ \quad TVM_{[0,2]} &= \frac{4'9 \cdot 2^2 - 4'9 \cdot 0^2}{2 - 0} = 9'8 \\ \circ \quad TVM_{[2,4]} &= \frac{4'9 \cdot 4^2 - 4'9 \cdot 2^2}{4 - 2} = 29'4 \\ \circ \quad TVM_{[4,6]} &= \frac{4'9 \cdot 6^2 - 4'9 \cdot 4^2}{6 - 4} = 49 \end{aligned}$$

Vexamos que significado físico teñen esas taxas de variación:

- O numerador da fracción é o espazo percorrido no intervalo e o denominador o tempo transcurrido. Polo tanto estamos calculando as velocidades medias nos intervalos correspondentes.
- As unidades serán, neste caso, metros/segundo.

## Exercicio 6.10

- Estuda a taxa de variación media da función  $y = 2x + 3$  (toma os tres intervalos do exemplo anterior).
- ¿Sucederá o mesmo con todas as funcións de grao 1?
- ¿Pode pasar o mesmo con outro tipo de función?



### Exercicio 6.11

- a) Estuda a velocidade de variación de  $y = x^2 - 4x + 1$  en intervalos consecutivos de amplitude 1.
- b) ¿Teñen algunha característica especial esas taxas de variación medias?

### Exercicio 6.12

Lanzouse un foguete meteorolóxico e mediuse a súa altura cada 3 segundos, obténdose os datos da táboa:

Tempo (s)	0	3	6	9	12	15	18	21
Altura (m)	0	590	3420	6480	9360	11250	11340	8820

¿Que tipo de movemento ascendente leva o foguete? <sup>2</sup>

### Exercicio 6.13

A poboación galega nos últimos anos foi:

#### Galicia, poboación total

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2.731.900	2.732.926	2.737.370	2.751.094	2.750.985	2.762.198	2.767.524	2.772.533

(fonte Instituto Nacional de Estadística)

- a) Fai un estudo comentado da súa evolución.
- b) Fai unha previsión razoada de cal será a poboación no 2020.

## Características: Extremos

**Extremos relativos:** Un valor da variable independente,  $x$ , é un **máximo relativo** se a función é maior que nos puntos que o rodean.

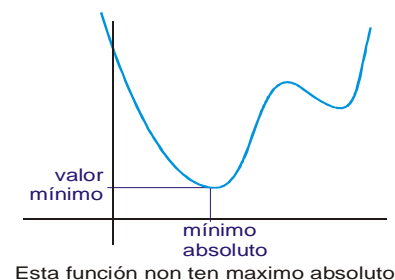
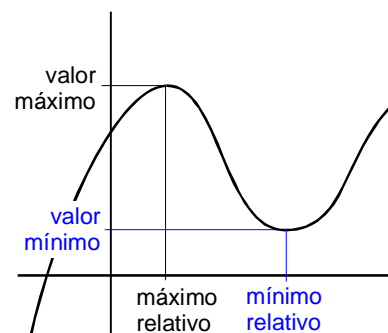
Se a función é menor que nos puntos que o rodean é un **mínimo relativo**.

Nos extremos relativos prodúcese un cambio no crecemento da función: Nos máximos pasa de crecente a decrecente e nos mínimos de decrecente a crecente.

**Extremos absolutos:** Son os valores da  $x$  nos que a función toma o valor máis alto (máximo) ou máis baixo (mínimo).

### Exercicio 6.14

Describe como son as gráficas das funcións polinómicas de grao 2. ¿Teñen extremos relativos? ¿E absolutos?



Esta función non ten maximo absoluto

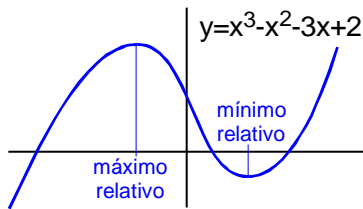
<sup>2</sup> Lembra que en Física distinguimos movementos uniformes (velocidade constante) e variados e, dentro destes últimos, uniformemente variados (cando a velocidade varía uniformemente, aceleración constante).

### Problema 6.1

Estimar, razoadamente, a altura máxima do foguete do exercicio 6.12. Sabemos que a acadou entre os segundos 15 e 18.

### Exemplo

As funcións polinómicas de grao 3 poden ter dous extremos relativos, un máximo e un mínimo, pero non poden ter extremos absolutos.

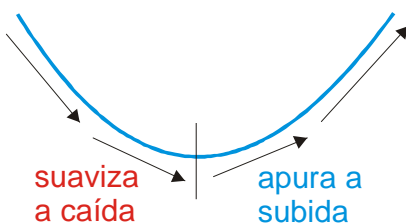
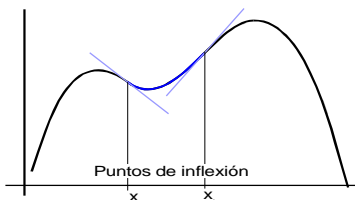
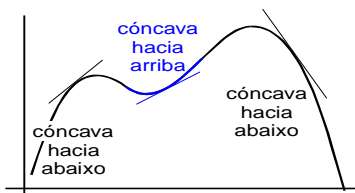


### Exercicio 6.15

Nunha folla cuadrículada debuxa catro rectángulos distintos cun perímetro de 60 cadríños e calcúlalle a súa área.

Considera a relación entre as áreas dos rectángulos e as bases

- ¿É unha función?
- Describe a función mediante unha táboa, a gráfica e a fórmula correspondente.
- ¿Cal será o rectángulo de área máxima?



## Características: Curvatura

Unha función é **cóncava hacia arriba**, ou convexa, nun punto cando a gráfica está por encima da tanxente nese punto.

É **cóncava hacia abajo**, ou simplemente cóncava, cando a gráfica está por debaixo da tanxente no punto.

Nos puntos onde cambia a curvatura a tanxente corta a gráfica. Eses puntos reciben o nome de **puntos de inflexión**.

Fíxate que unha función é cóncava hacia arriba cando decrece cada vez máis amodo ou, o que é o mesmo, cando crece cada vez máis rápido. Podemos velo observando a inclinación da recta tanxente, que é cada vez máis "positiva".

É cóncava hacia abajo cando crece cada vez máis amodo ou cando decrece cada vez máis rápido.

Nos máximos relativos a función é cóncava hacia abajo e nos mínimos relativos é cóncava hacia arriba.

### Exercicio 6.16

Investiga como é a curvatura das funcións polinómicas de graos 1 e 2.

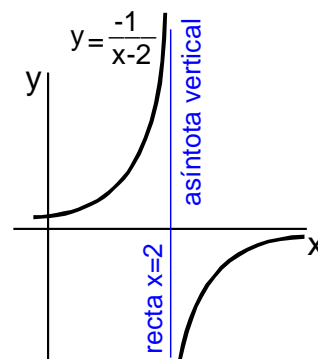
## Características: Asíntotas

Cando a gráfica dunha función se aproxima a unha recta, diremos que esa recta é unha asíntota da función e que a función ten unha rama asíntótica.

Existen varios tipos de asíntotas:

**Asíntotas verticais:** A ecuación dunha recta vertical é da forma  $x=a$  ( $a$  un número). Para que a gráfica se aproxime a unha recta dese tipo, os valores da función cando o valor de  $x$  se aproxima ó  $a$  teñen que ser cada vez maiores (ou menores se son negativos).

Se a función é elemental (definida por unha fórmula simple) o valor  $a$  non pertence ó dominio da función.



### Exemplo:

A recta  $x=2$  é unha asíntota vertical da función  $f(x) = \frac{-1}{x-2}$

Vexamos que sucede ó darlle a  $x$  valores que se aproximen a 2 pola esquerda (máis pequenos) e pola dereita (maiores).

	$x \rightarrow 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
$x$	1'5	1'9	1'99	2	2'001	2'01	2'2
$f(x)$	2	10	100		-1000	-10	-5

Ó achegarse a 2 o valor de  $x$ , a función toma valores cada vez maiores, positivos pola esquerda e negativos pola dereita.

Fíxate que o 2 non podemos sustituílo na función, non é do dominio desa función.

**Asíntotas horizontais:** A gráfica aproxímase a unha recta horizontal,  $y=b$  ( $b$  un número). Para que eso suceda, os valores da función aproxímanse a  $b$  cando o valor de  $x$  se fai moi grande ou moi pequeno.

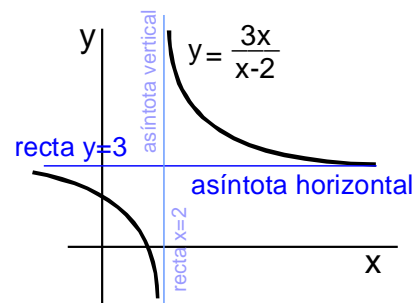
### Exemplo:

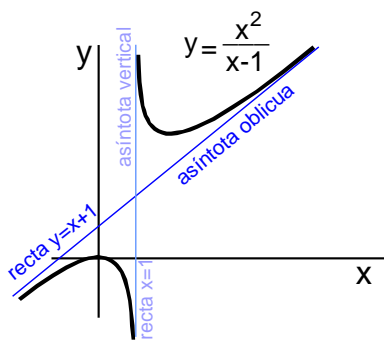
A recta  $y=3$  é unha asíntota horizontal da función  $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

Ó darlle valores moi grandes positivos e negativos a  $x$ , os valores da función acércanse a 3:

	$-\infty \leftarrow x$				$x \rightarrow +\infty$		
$x$	-100	-50	-10		5	20	100
$f(x)$	2'94	2'88	2.5		5	3'33	3'06

A función tamén ten unha asíntota vertical na recta  $x=2$





**Asíntotas oblicuas:** Rectas da forma  $y=ax+b$ . A gráfica aproxímase a unha recta oblicua.

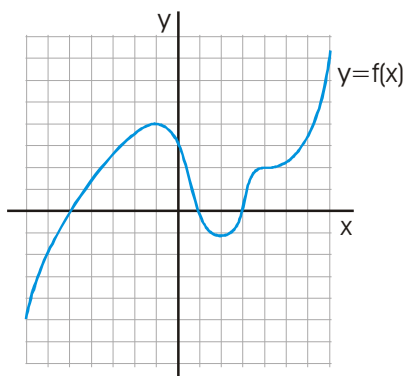
As asíntotas xogan un papel determinante das funcións racionais (cocientes de polinomios) e tamén nas exponenciais e logarítmicas.

### Exercicio 6.17

Investiga se a función  $y = \frac{2x+1}{x-3}$  ten asíntotas verticais e horizontais.

### Exercicio 6.18

Na figura aparece a gráfica dunha función.



- ¿En que intervalos de valores de  $x$  é crecente e en cales é decrecente?
- ¿Para que valores de  $x$  ten máximos e en cales ten mínimos?
- ¿En que intervalos de valores de  $x$  é cóncava e en cales é convexa?
- ¿Onde hai puntos de inflexión?

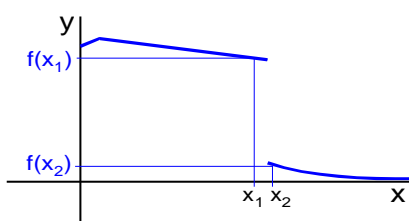
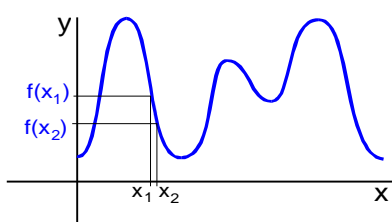
## Características: Continuidade.

A maioría dos fenómenos físicos do noso entorno amosan unha gran regularidade no seu comportamento: o nivel do mar varía co tempo pero faino dun xeito regular e previsible; o crecemento dun bebé; a temperatura da aula cando se pon a calefacción,...

En termos de funcións, podemos traducir a regularidade no comportamento en que a valores moi próximos de  $x$  correspóndenlle valores moi próximos da función.

Ese tipo de regularidade nunha función recibe o nome de continuidade.

Se unha función é continua e o seu dominio é un intervalo, entón a súa gráfica pode facerse dun só trazo.



### Exemplo:

A función que describe o nivel do mar no porto de Carril un certo día do ano ten por gráfica a da figura de arriba.

É unha función continua pois a valores próximos de  $x$  correspóndenlle valores próximos da función e se acercamos os valores de  $x$  tamén se acercan os valores da función.

### Exemplo:

O densidade da auga segundo a temperatura presenta unha discontinuidade a 100°C debida ó cambio de estado.

As densidades a temperaturas próximas (99'9°C e 100'1°C) son moi diferentes (0'9 e 0'007, respectivamente) e ao acercase as temperaturas, as densidades manteñen esa diferenza.

### Exercicio 6.19

Fai un debuxo aproximado de como pode ser a gráfica dunha función  $f(x)$  da que coñecemos que:

- É simétrica respecto ao eixe Y
- É crecente entre 0 e 2 e entre 2 e  $+\infty$ .
- En  $x=0$  ten un mínimo.
- A recta  $x=-2$  é unha asíntota.
- A recta  $y=2$  é unha asíntota.

## Límite dunha función nun punto

Para estudar a existencia dunha asíntota vertical en  $x=a$  debemos darlle a  $x$  valores que se acerquen a  $a$  e comprobar que os valores da función son cada vez maiores.

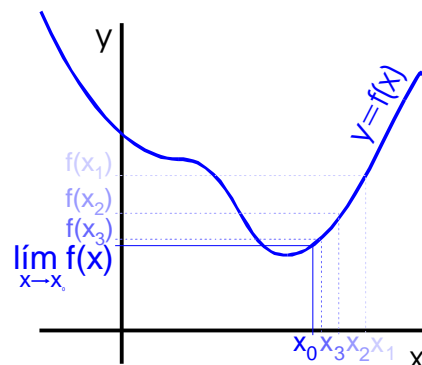
Por outra parte, para comprobar se unha función é continua en  $x=a$  debemos comprobar que, o darlle valores a  $x$  que se acerquen a ese valor, os valores da función acérzanse a  $f(a)$ .

Nas dúas situacións é necesario dar valores a  $x$  que se acerquen a un valor dado e observar que sucede cos valores da función. Ese proceso é o fundamento dunha nova operación: O cálculo de límites.

Chamarémoslle límite dunha función  $f(x)$  cando  $x$  tende a un valor  $x_0$  ó número, se existe, ó que se acerca o valor da función cando  $x$  se acerca a  $x_0$ .

Representarémolo cos símbolos:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

O límite dunha función nun punto é unha operación que consiste en estudar o comportamento dos valores da función cando lle damos a  $x$  valores que se aproximen ó punto.



O límite é unha das operacións máis potentes das matemáticas. En moitas ocasións non é posible calcular algo directamente pero si é posible obter aproximacións cada vez mellores: o valor buscado é o límite desas aproximacións.

### Exemplo:

Calcula o límite de  $f(x) = 2x^2 - 4$  cando  $x$  tende a 3

Dámoslle valores a  $x$  que se acerquen a 3:

Os límites laterais da función que describe a densidade da auga cando a temperatura tende a 100°C son diferentes (a menos de 100° a auga está en estado líquido e a súa densidade é lixeiramente menor de 1g/cm<sup>3</sup> pero a máis de 100° a auga é gasosa e a densidade é menor de 0'007g/cm<sup>3</sup>).

x	3'1	2'9	3'001	2'99	3'00005	...
f(x)	15'22	12'82	14'012	13'88	14'0006	...

Vemos que os valores da función achéganse a 14. Diremos que o límite de f(x) cando x tende a 3 é 14:  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4) = 14$

É máis doado de interpretar estudando por separado os valores que se aproximan a 3 pola dereita (maiores que 3) e pola esquerda (menores que 3). Son os límites laterais.

Límite pola dereita (valores de x superiores a 3):

$$3^- \leftarrow x$$

x	...	3'00005	3'001	3'1
f(x)	...	14'0006	14'012	15'22

Expresarémolo:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (2x^2 - 4) = 14$

Límite pola esquerda (valores de x inferiores a 3):

$$x \rightarrow 3^+$$

x	2'9	2'99	2'9999	...
f(x)	12'82	13'88	13'9988	...

Expresarémolo:  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (2x^2 - 4) = 14$

Os límites laterais non sempre coinciden e, neses casos, diríamos que non hai límite da función no punto.

## Calculo alxébrico de límites

A pesar de que, teoricamente, para calcular o límite dunha función nun punto deberíamos substituír na función infinitos valores que se aproximasen a ese punto, na práctica é suficiente cuns cantos valores para ter unha idea aproximada. Aínda así resulta un procedemento bastante laborioso.

Para calcular exactamente o valor dun límite utilizaremos as propiedades alxébricas dos mesmos:

- O límite dunha suma é a suma dos límites.
- O límite dun produto é o produto dos límites.
- O límite dun cociente, cando o denominador non tende a 0, é o cociente dos límites. Cando o denominador tende a 0 debemos recorrer a técnicas especiais.
- O límite dunha potencia é o límite da base elevado ó mesmo expoñente.

Aplicando esas propiedades resulta doado calcular a maioría dos límites.

### Exemplo:

Calcula o límite de  $f(x) = 2x^2 - 4$  cando  $x$  tende a 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2) - \lim_{x \rightarrow 3} (4) = \lim_{x \rightarrow 3} (2) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x^2) - \lim_{x \rightarrow 3} (4) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2) \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow 3} (x) \right]^2 - \lim_{x \rightarrow 3} (4) = 2 \cdot 3^2 - 4 = 14$$

**O límite dunha función elemental nun punto do seu dominio coincide co valor da función nese punto.**

### Exemplo:

Calcula o límite de  $f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$  cando  $x$  tende a 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (4) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x) - \lim_{x \rightarrow 1} (4)}{\left[ \lim_{x \rightarrow 1} (x) \right]^2 - \lim_{x \rightarrow 1} (1)} = \frac{4 \cdot 1 - 4}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Obtemos unha operación que non se pode realizar (non é posible dividir por 0) e que pode tomar calquera valor. Para calcular o límite é necesario simplificar a fórmula da función:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x) + \lim_{x \rightarrow 1} (1)} = \frac{4}{1 + 1} = 2$$

Tendo o proceso controlado:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x + 1} = \frac{4}{1 + 1} = 2$$

### Exemplo:

Calcula o límite de  $f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$  cando  $x$  tende a -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (4) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} (x) - \lim_{x \rightarrow -1} (4)}{\left[ \lim_{x \rightarrow -1} (x) \right]^2 - \lim_{x \rightarrow -1} (1)} = \frac{4 \cdot (-1) - 4}{(-1)^2 - 1} = \frac{-8}{0}$$

Obtemos unha expresión que non ten senso pero, a diferenza da anterior, non hai ningún valor que poda ser resultado desa expresión.

Neste caso **NON EXISTE** o límite de  $f(x)$  cando  $x$  tende a -1.

A función ten unha asíntota vertical en  $x = -1$ , o que se traduce en que, ó darlle valores que se aproximen a -1, toma valores cada vez máis grandes sen acadar ningún límite. Cando suceda isto cunha función diremos que tende a infinito ( $\pm\infty$ ): Non hai límite, os valores crecen sen limitación.

Vemos que o límite de

$f(x) = 2x^2 - 4$  cando  $x$  tende a 3 coincide con  $f(3)$ , o resultado de substituír o 3 na fórmula da función.

Eso mesmo acontece con tódalas

Sustituíndo directamente:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4) = 2 \cdot 3^2 - 4 = 14$$

O límite de  $f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$  cando  $x$  tende a 1 é 2:

$x$	0'99	1'001	...
$f(x)$	2'01	1'999	...

O límite de  $f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 1}$

cando  $x$  tende a -1 non existe. O valor da función crece sen parar pola dereita:

$x$	-0'99	-0'999	...
$f(x)$	400	4000	...

Pola esquerda o comporta-mento é semellante, pero con valores negativos:

$x$	-1'01	-1'001	...
$f(x)$	-400	-4000	...



## Límites indeterminados e infinitos

Ao calcular algúns límites, tal como sucede nos exemplos anteriores, atopámonos con expresións que non teñen sentido.

Distinguiremos dous casos:

**Expresións infinitas:** Como sucede no exemplo anterior, ó calcular algúns límites, os valores da función non se aproximan a ningún valor en concreto senón que obtemos valores cada vez maiores (ou menores se son negativos) sen acadar ningún tope. Nestes casos a función non ten límite nese punto pero, para caracterizar ese comportamento, diremos que tende a infinito.

Expresarémolo:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

Son expresións de tipo infinito:

$$\frac{a}{0} \quad (a \neq 0) \quad (\pm\infty) + a \quad (\pm\infty) \cdot a \quad \infty + \infty \quad a^{(\pm\infty)} \quad (a > 1)$$

**Expresións indeterminadas:** Cando obtemos operacións que non se poden realizar porque teñen moitos resultados posibles. Son expresións indeterminadas:

$$\frac{0}{0} \quad \pm\infty \cdot 0 \quad \infty - \infty \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad 1^\infty$$

Estes límites poden tomar calquera valor. Para calculalos debemos empregar técnicas especiais para cada caso.

### Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}, \text{ e vimos que era } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) = 2$$

### Exercicio 6.20

Calcula os seguintes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 4}{x^2 - 4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{1 - \sqrt{x + 1}}$



# Ampliación

## Continuo e discreto

O elemento clave do concepto de función de variable real é a **continuidade** dos números reais: A variable  $x$  toma valores nun conxunto continuo de xeito que, entre dous valores dados por moi preto que estean, sempre hai entre eles infinitos valores.

Esa idea de continuidade permítenos, por exemplo, calcular límites aproximando *infinitamente*.

Sen embargo, cos últimos avances da Física, cada vez está máis claro que o noso universo non é continuo no sentido anterior: Entre dous valores non hai infinitos ou, o que é o mesmo, non é posible dividir infinitamente unha magnitude.

A magnitude da que se ten medido fraccións máis pequenas é o tempo, pero os científicos coidan que non é posible medir tempos máis pequenos que o tempo de Plank ( $1,67 \cdot 10^{-45}$  segundos). O universo é discreto, vai a saltos (saltíños ínfimos, pero saltos ao cabo).

## Modelos dinámicos

Moitos sistemas físicos poden describirse a partir do coñecemento dun *estado inicial* dese sistema e das *leis que describen como pasa dun estado a outro*.

Na maioría das ocasións utilizamos modelos continuos para os que dispoñemos de ferramentas potentísimas pero que, na maioría dos casos, só poden aplicarse a casos sinxelos. Cando o modelo é moi complicado, como a predicción meteorolóxica, faise que o tempo avance a saltos discretos.

Un sistema descrito mediante un modelo dinámico é un sistema completamente **determinista**: Coñecendo exactamente as condicións iniciais, podemos precisar exactamente cal vai ser o seu estado en calquera intre futuro.

Un exemplo paradigmático é o Sistema Solar: Coñecemos a posición e a velocidade dos astros nun intre dado e tamén as leis que gobernan o seu movemento, o que nos permite predicir con case total exactitude a súa posición en calquera intre do futuro.

Pero a realidade non é tan simple: Non podemos determinar con total exactitude as condicións iniciais e nalgúns casos, pequenas variacións nas condicións iniciais poden conducir a resultados finais totalmente dispares.

É o **caos determinístico**, un dos conceptos máis revolucionarios dos últimos anos que deu orixe a unhas matemáticas totalmente novas: os **fractais**.

Un exemplo axudará a aclaralo: Supoñamos que temos un billar sen rozamento (a bóla non daría parado), unha diferenza do orden de  $10^{-20}$  no ángulo co que se golpea a bóla fai que o cabo de uns minutos, despois de moitos rebotes, a traxectoria da bóla sexa totalmente diferente.

## **A Predicción meteorolóxica**

En Galicia, para predecir o tempo empréganse modelos dinámicos discretos que son executados en potentes ordenadores pois necesitan *billóns* de operacións:

- Mídense as condicións meteorolóxicas en diferentes estacións e envíanse os datos ao Centro de Supercomputación en Santiago.
- Como se necesitan moitos máis datos, estímase a partir dos datos das estacións máis próximas (son datos aproximados).
- Divídese a atmósfera sobre a nosa zona en billóns de prismas de base cadrada e supónse que o comportamento do ar en cada un deses prismas está nas mesmas condicións de presión, temperatura, humidade, etc. (son como átomos moi grandes).
- As leis que rixen o modelo determinan como van variando as condicións do ar en cada prisma.
- Finalmente un programa vai coloreando os prismas segundo as condicións e crea unhas imaxes que permiten aos científicos interpretar os resultados.

Na actualidade, estes modelos predicen con bastante exactitude o tempo con tres días de antelación. Se quixeramos aumentar ese prazo, necesitaríamos máis medicións e datos iniciais e, sobre todo, empregar prismas máis pequenos o que implicaría cálculos máis alá das posibilidades dos ordenadores actuais.