

Exercicio 6.1

Atopa os dominios das seguintes funcións:

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Por tratarse dunha raíz cadrada, o radicando debe ser positivo ou 0:

$$4 - x^2 \geq 0 \rightarrow 4 \geq x^2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

b) $g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4x}$

Por tratarse dunha división, o denominador deberá ser distinto de 0:

$$x^2 - 4x \neq 0 \rightarrow x \cdot (x - 4) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4 \end{cases}$$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x - 4}}{x^2 - 4x}$

Por unha parte temos unha división, a mesma do anterior, logo $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$, e por

outra temos unha raíz de $x - 4$, logo $x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$

Resumindo, teremos que podemos realizar esas operacións soamente para números $x \geq 4$.

Exercicio 6.2

¿A que corresponden as constantes 0'2 e 20 que aparecen na fórmula? A fórmula da función é: $f(x) = 0'2x + 20$

- 0'2 é a pendente da recta; indica que a recta sube de 0'2 en 0'2, cada vez que a x aumenta unha unidade. Neste exemplo, que cada kw-h consumido produce un aumento de 0'2€.
- 20 é un número fixo: sempre se suma 20, sexa cal sexa o valor de x . Neste exemplo é unha tarifa fixa, por ter a conexión.

¿Cal será o importe se o consumo é de 240 kw-h?

- Soamente temos que substituír 240 na fórmula: $f(240) = 0'2 \cdot 240 + 20 = 68$ €

Se o importe do recibo foi de 50 €, ¿cal tiña sido o consumo?

Tamén substituiremos na fórmula, pero fixándonos que agora o que sabemos son os €, ou sexa, sabemos $f(x)$:

$$50 = 0'2 \cdot x + 20 \quad \text{Resolvendo a ecuación teremos } x = 150 \text{ kw-h}$$

Exercicio 6.3

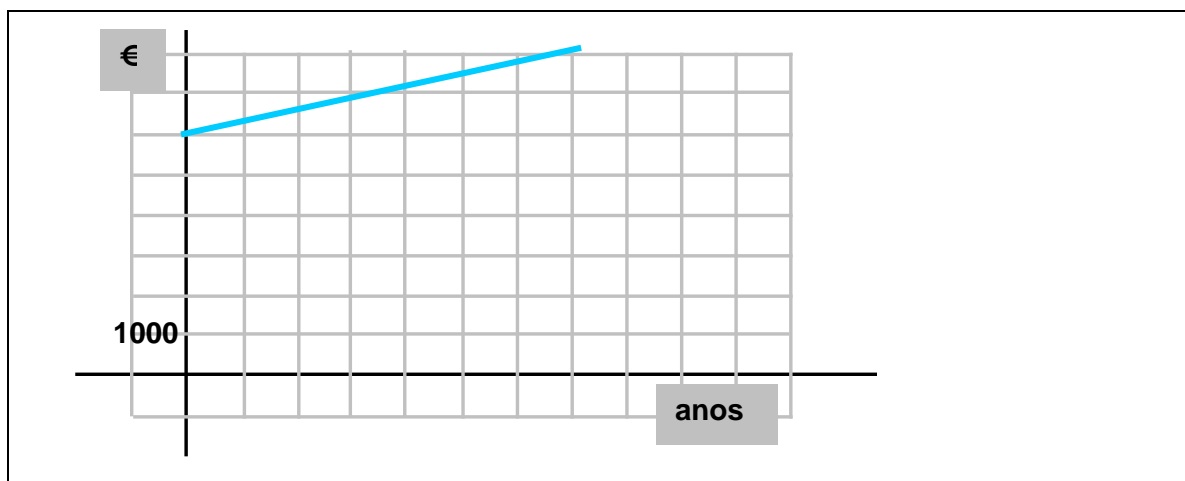
Colocamos un capital de 6000 € en letras do tesouro a un interese do 5% anual (interese simple).

Constrúe unha táboa co capital total (capital máis intereses) nos anos 0, 1, 2, 3 e 4. (0 indica o inicio).

Tempo (anos)	€
0	6000
1	6300
2	6600
3	6900
4	7200

é no momento de comezar
5 € de cada 100 serán 300€ máis
O interese simple ven a dicir que
Os novos intereses calcúlanse
sempre sobre o capital investido

Representa graficamente eses valores.

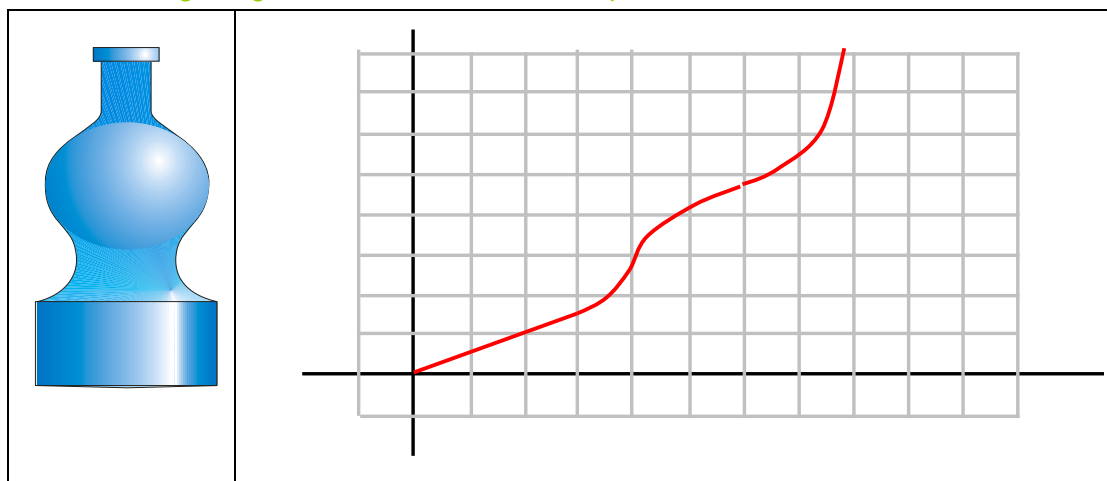


Atopa a fórmula que corresponde a esa función.

Como sube de 300 en 300 e parte dun valor fixo de 6000, será: $f(x) = 300x + 6000$

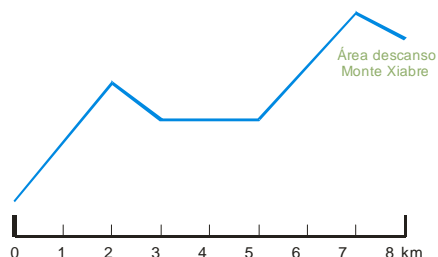
Exercicio 6.4

Imos vertendo na botella da figura vasos de auga. Debuxa a gráfica correspondente a altura da auga segundo o número de vasos que se teñan baleirado.



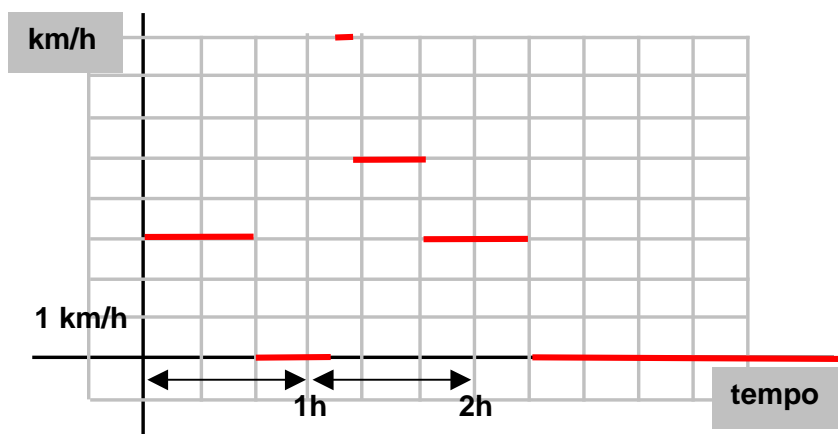
Exercicio 6.5

Desde o instituto de Carril, en Vilagarcía, os alumnos de 1º de bacharelato fixeron unha excursión ao monte Xiabre seguindo un percorrido co perfil topográfico da figura.

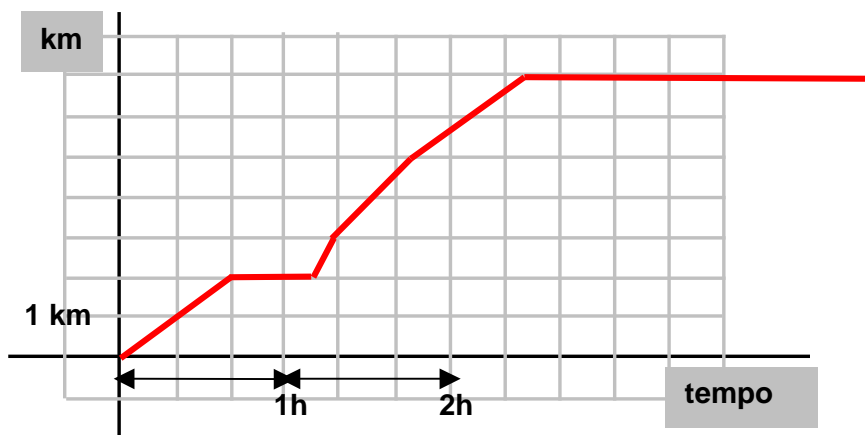


Nas subidas a súa velocidade foi 3 km/h, nas baixadas 8 km/h e 5 km/h nos chans. Descansaron $\frac{1}{2}$ hora no primeiro alto e 2 horas no alto do Xiabre e logo volveron polo mesmo camiño

- a) Debuxa a gráfica da velocidade segundo o tempo.



- b) Debuxa a gráfica da distancia percorrida segundo o tempo.



Exercicio 6.6

Estuda se as seguintes función son simétricas en relación á orixe e ao eixe Y.

a) $y = x^3 - 4x$ $\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x \\ f(-x) = -x^3 + 4x \end{cases}$ non ten simetría respecto ao eixe Y
 $-f(-x) = x^3 - 4x$ e si a ten á orixe orixe

b) $y = \frac{1}{x^2}$ $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} \\ f(-x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ si ten simetría respecto ao eixe Y
 $-f(-x) = -\frac{1}{x^2}$ e non a ten respecto á orixe.

c) $y = 2 - 2x^2$ $\begin{cases} f(x) = 2 - 2x^2 \\ f(-x) = 2 - 2x^2 \end{cases}$ si ten simetría respecto ao eixe Y
 $-f(-x) = -2 + 2x^2$ e non a ten respecto á orixe.

Exercicio 6.7

Estuda en que intervalos son crecentes e en cales son decrecentes as funcións seguintes:

a) $y = -2x + 4$

É unha recta de pendente -2, negativa, logo sempre decrece.

b) $y = 3x - 6$

É unha recta de pendente 3, positiva, logo sempre crece.

c) $y = -\frac{3}{2}x + 6$

É unha recta de pendente -3/2, negativa, logo sempre decrece.

d) $y = \frac{x}{2}$

É unha recta de pendente 1/2, positiva, logo sempre crece.

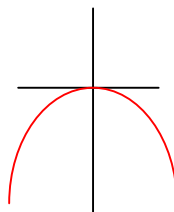
d) ¿Que determina se unha función de grao 1 é crecente? A pendente

Exercicio 6.8

Estuda en que intervalos son crecentes e en cales son decrecentes as funcións seguintes:

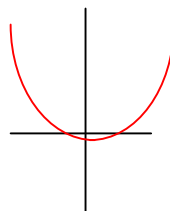
a) $y = -2x^2$

É unha parábola invertida, con vértice na orixe.
Crece nos negativos e decrece nos positivos



b) $y = x^2 - x$

É unha parábola con vértice no punto (0'5, -0'25).
Decrece nos negativos e ata o 0'5 e logo crece .

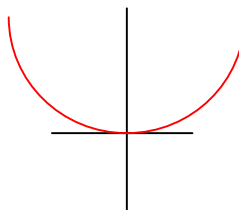


c) $y = -x^2 + 4x$

É unha parábola invertida, con vértice na punto (2, 4).
Crece nos negativos e ata o 2 e logo xa decrece sempre.

d) $y = \frac{x^2}{2}$

É unha parábola con vértice na orixe.
Decrece nos negativos e l crece nos positivos.



c) ¿En que intervalos é crecente unha función de grao 2?

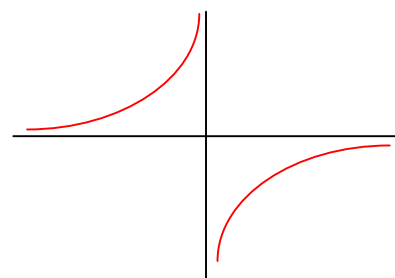
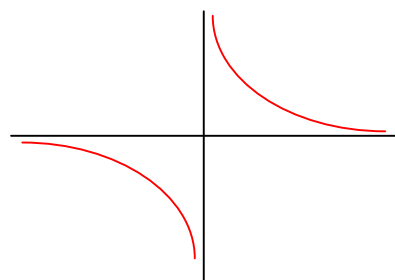
Se é cóncava cara arriba decrece ata o vértice e logo crece.
Se é cóncava cara abaixo crece ata o vértice e logo decrece.

Exercicio 6.9

A función $f(x) = \frac{k}{x}$ (k un número fixo) chámase de
proporcionalidade inversa, ¿é crecente?

Se k é positivo é decrecente, xa que a división faise
máis pequena ao aumentar o denominador (nos negativos débese ao signo).

Porén se k é negativo, o signo da división invértese
respecto do caso anterior.



Exercicio 6.10

- a) Estuda a taxa de variación media da función $y = 2x + 3$ (toma os tres intervalos do exemplo anterior).

$$\text{a. } TVM_{[0,2]} = \frac{(2 \cdot 2 + 3) - (2 \cdot 0 + 3)}{2 - 0} = 2$$

$$\text{b. } TVM_{[2,4]} = \frac{(2 \cdot 4 + 3) - (2 \cdot 2 + 3)}{2 - 0} = 2$$

$$\text{c. } TVM_{[4,6]} = \frac{(2 \cdot 6 + 3) - (2 \cdot 4 + 3)}{2 - 0} = 2$$

- b) ¿Sucederá o mesmo con todas as funcións de grao 1? Si, pois sempre varía igual (son rectas, e soben ou baixan a ritmo constante)

- c) ¿Pode pasar o mesmo con outro tipo de función? Non se ten curvas.

Exercicio 6.11

- a) Estuda a velocidade de variación de $y = x^2 - 4x + 1$ en intervalos consecutivos de amplitude 1.

$$\text{i. } TVM_{[0,1]} = \frac{(1^2 - 4 \cdot 1 + 1) - (0^2 - 4 \cdot 0 + 1)}{1 - 0} = -3$$

$$\text{ii. } TVM_{[1,2]} = \frac{(2^2 - 4 \cdot 2 + 1) - (1^2 - 4 \cdot 1 + 1)}{2 - 1} = -1$$

$$\text{iii. } TVM_{[2,3]} = \frac{(3^2 - 4 \cdot 3 + 1) - (2^2 - 4 \cdot 2 + 1)}{3 - 2} = +1$$

- b) ¿Teñen algunha característica especial esas taxas de variación medias?
A función baixa moi rápido (-3), logo baixa amodo (-1) e despois sube (+1).

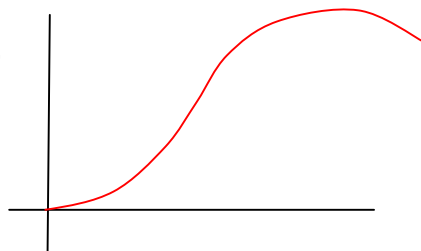
Exercicio 6.12

Lanzouse un foguete meteorolóxico e mediuse a súa altura cada 3 segundos, obténdose os datos da táboa:

Tempo (s)	0	3	6	9	12	15	18	21
Altura (m)	0	590	3420	6480	9360	11250	11340	8820

¿Que tipo de movemento ascendente leva o foguete?

No primeiro intervalo sube uns 600m, logo case 3000m, logo algo máis dos 3000m, despois case outros 3000m, logo cerca de 2000m, despois apenas uns 100m e logo baixa. É un movemento variado.



Exercicio 6.13

A poboación galega nos últimos anos foi:

Galicia, poboación total

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
2.731.900	2.732.926	2.737.370	2.751.094	2.750.985	2.762.198	2.767.524	2.772.533

(fonte Instituto Nacional de Estadística)

Fai un estudo comentado da súa evolución.

No 1º ano sube unhas 1000 persoas, logo cerca de 7000, despois baixa moi pouquiño, logo sube unhas 12000, despois perto de 5000 e outras tantas no último ano da táboa.

Fai unha previsión razoada de cal será a poboación no 2020.

Mantendo uns 5000 de media anual, chegaríase a 2837000, aproximadamente.

Exercicio 6.14

Describe como son as gráficas das funcións polinómicas de grao 2. ¿Teñen extremos relativos? ¿E absolutos?

Son parábolas. Teñen un extremo absoluto no vértice: un mínimo se é cóncava cara arriba e un máximo se o é cara abaixo.

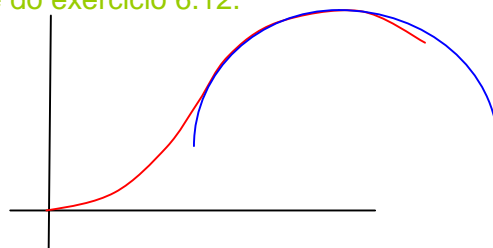
Problema 6.1

Estimar, razoadamente, a altura máxima do foguete do exercicio 6.12.

Sabemos que a acadou entre os segundos 15 e 18.

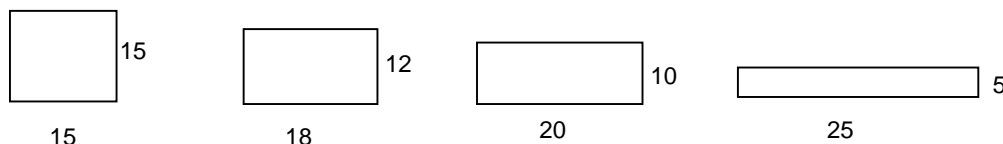
Despois do forte impulso inicial pode describir un arco de parábola.

O máximo estará próximo ao segundo 17.



Exercicio 6.15

Nunha folia cuadriculada debuxa catro rectángulos distintos cun perímetro de 60 cadríños e calcúlalle a súa área.



Considera a relación entre as áreas dos rectángulos e as bases

a) ¿É unha función? Si, definida entre 0 e 60 (0 e 60 non incluídos), pois para cada base hai un único rectángulo e, polo tanto, hai unha única área.

b) Describe a función mediante unha táboa, a gráfica e a fórmula correspondente.

Se a base é x , o lado superior é tamén x , logo quedan $60 - 2x$ para as dúas alturas, cada unha $(60 - 2x)/2$. Simplificando temos $30 - x$ de altura.

De área teremos: $x \cdot (30 - x) = 30x - x^2$

Base x	1	2	3	4	5	...			
Área $f(x)$	29	56	81	104	125	...			

Podemos escribir: $f(x) = -x^2 + 30x$

c) ¿Cal será o rectángulo de área máxima?

Trátase dunha parábola invertida, logo ten un máximo no vértice (15, 225).

Exercicio 6.16

Investiga como é a curvatura das funcións polinómicas de graos 1 e 2.

As de 1º grao non teñen curvatura: son rectas.

As de 2º grao son parábolas, convexas se o coeficiente de x^2 é +, e cóncavas no outro caso.

Exercicio 6.17

Investiga se a función $y = \frac{2x+1}{x-3}$ ten asíntotas verticais e horizontais.

Como o denominador anúlase en $x = 3$, e aí non se anula o numerador, teremos unha asíntota vertical:

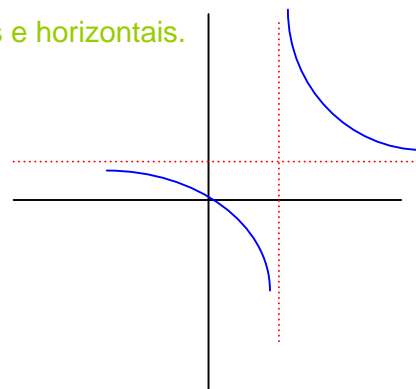
Se x é algo + ca 3, a división da un valor positivo

Se x é algo - ca 3, a división da un valor negativo

Se x é un número moi grande, ese 1 do numerador e ese -3 do denominador apenas afectan ao resultado, que será, daquela $2x/x$ ou sexa, aproximadamente 2.

O mesmo sucede se x é "grande" pero negativo.

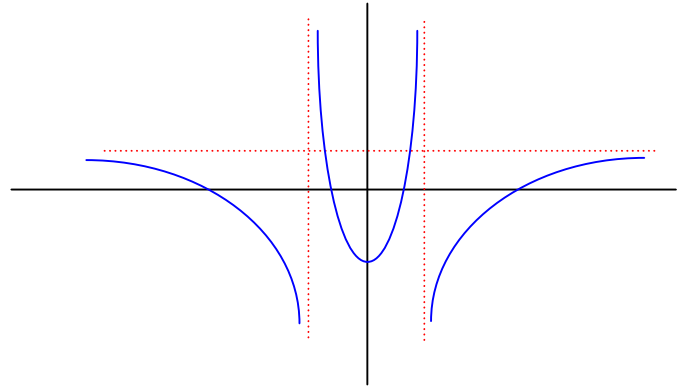
Logo teremos unha asíntota horizontal en $y = 2$.



Exercicio 6.19

Fai un debuxo aproximado de como pode ser a gráfica dunha función $f(x)$ da que coñecemos que:

- É simétrica respecto ao eixe Y: logo debuxamos soamente na parte positiva e logo “copiamos no espello”
- É crecente entre 0 e 2 e entre 2 e $+\infty$.
- En $x=0$ ten un mínimo.
- A recta $x=-2$ é unha asíntota: a gráfica terá que irse “pegando” a esa recta vertical.
- A recta $y=2$ é unha asíntota: a gráfica terá que irse “pegando” a esa recta horizontal.



Exercicio 6.20

Calcula os seguintes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+4}{x^2-4} = \frac{2 \cdot 2 + 4}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} \text{ indt.} \rightarrow \frac{2x+4}{x^2-4} = \frac{2 \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{2}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} = \pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{2}{1-\sqrt{2+1}} = \frac{2}{1-\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{3})}{1+3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$