

Unidade 5: Xeometría métrica

1. Produto escalar de dous vectores.
 - 1.1. Modulo dun vector. Distancia entre dous puntos
 - 1.2. Ángulo de dous vectores. Ángulo de dúas rectas.
2. Lugares xeométricos. Mediatriz dun segmento.
3. Cónicas: Circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.

Introdución

Xeometría e Álgebra.

Despois de descubrir que non tódolos números eran racionais, os matemáticos e pensadores da Grecia Clásica dedicaron os seus esforzos á Xeometría.

Naquela época, non tiñan inventado a notación que utilizamos na actualidade. Unha ecuación expresábase como unha relación entre segmentos e, no caso de que aparecesen cadrados, entre áreas.

Por exemplo, a ecuación $x^2 - 4x = 6$ interprétase como a procura dun segmento, x , de xeito que a área do cadrado de lado x menos a área do rectángulo de base x e altura 4 sexa 6.

$$x^2 - 4x = 6$$

As cónicas

Problemas clásicos da matemática grega foron a *duplicación do cubo* (atopar un cubo de volume dobre que outro dado) e a *cuadratura do círculo* (dado un círculo, atopar un cadrado coa mesma área).

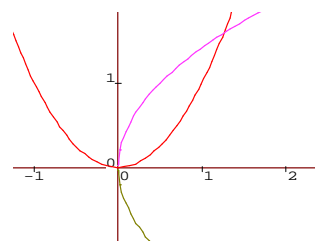
Coa notación alxébrica moderna, a resolución deses problemas é doada:

1. Duplicación do cubo de aresta a :

$$x^3 = 2 \cdot a^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2 \cdot a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

2. Cuadratura do círculo de radio r :

$$x^2 = \pi \cdot r^2 \rightarrow x = \sqrt{\pi \cdot r^2} = r\sqrt{\pi}$$

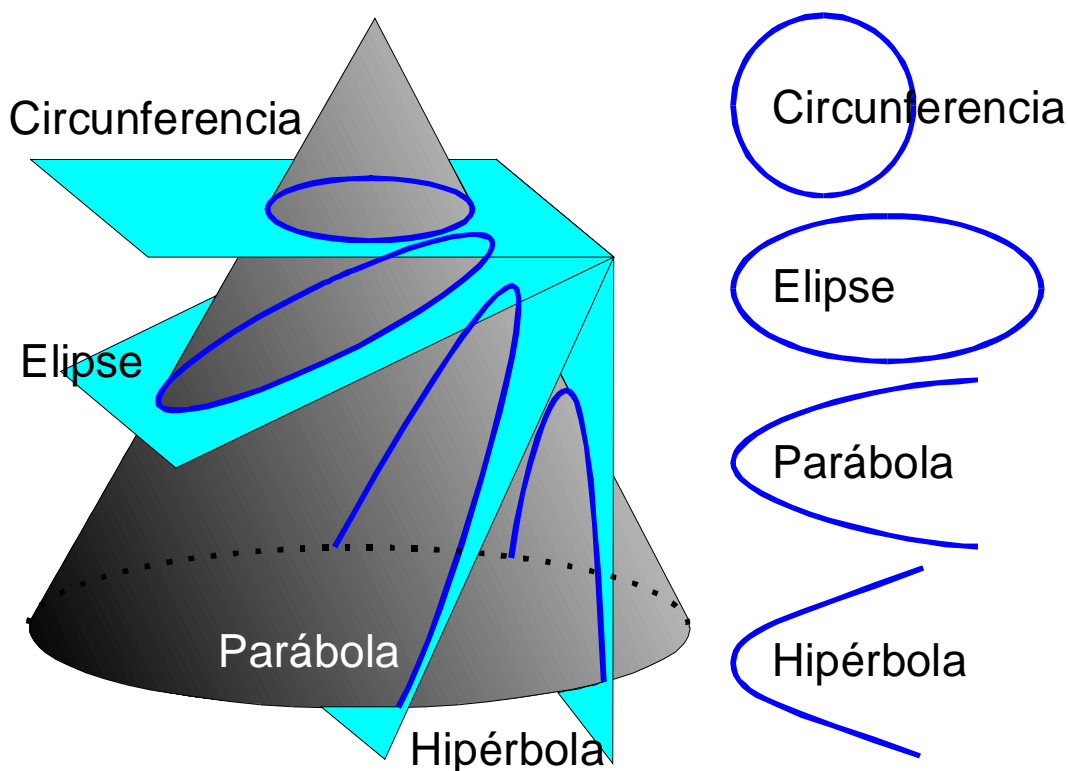


Ningún deses problemas pode resolverse só con regra e compás, polo que a súa resolución estaba máis alá das posibilidades dos métodos da Xeometría Grega. A pesar das dificultades, Menecmo (375 a.p., 325 a.p.), discípulo de Eudoxo e Platón, conseguiu resolver a duplicación dun cubo de aresta a mediante a intersección das parábolas $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$.

Os gregos descoñecían a linguaxe alxébrica. Menecmo describía as parábolas como a

intersección dun cono cun plano paralelo a unha xeratriz.

As curvas que se obteñen ao cortar un cono cun plano chámanse **seccións cónicas**¹:



Circunferencia, cando o plano é perpendicular á altura do cono

Elipse, se o plano corta á xeratriz e á altura.

Parábola, plano paralelo á unha xeratriz.

Hipérbola, se o plano é paralelo á altura.

Dinostrato, irmán de Menecmo, resolve o problema da cuadratura do círculo utilizando a trisectriz de Hippias (unha curva utilizada para dividir un ángulo en tres partes) pero esta solución, igual que a de Menecmo para a duplicación do cubo, non se atén as regras de utilizar só regra e compás polo que durante séculos seguiu buscando infructuosamente outras solucións só con regra e compás ata que se demostrou a súa imposibilidade, ... pero esa é outra historia.

Problema 5.1: Comproba que a abscisa do punto de corte das parábolas $x^2=ay$ e $y^2=2ax$ soluciona efectivamente o problema da duplicación dun cubo de aresta a .

¹ O máis detallado estudo sobre as cónicas débese a Apolonio (262 a.p a 190 a.p.), un dos grandes matemáticos da Época Helenística, xunto con Euclides e Arquímedes. Ese estudo foi traducido ao Latín en 1706 por Halley, astrónomo amigo e defensor de Newton, a partir dunha tradución árabe anterior.

Xeometría métrica

Xeometría métrica

Chámase Xeometría Métrica á que se ocupa de problemas nos que aparecen medidas de distancias e ángulos.

Debemos, polo tanto, definir o xeito de medir distancias e ángulos no plano. Para elo imos apoiarnos novamente nos vectores e nunha nova operación: *produto escalar*.

Producto escalar de dous vectores

Dados dous vectores \vec{v} e \vec{w} , o produto escalar deses vectores é o número que se obtén multiplicando os módulos polo coseno do ángulo que forman: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(A)$

Fíxate que na expresión anterior aparecen dous produtos diferentes: No primeiro membro o produto escalar de vectores que estamos a definir e no segundo produtos de números.

O produto escalar cumpre as propiedades:

- **Conmutativa:** $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
- **Multilinearidade** (linearidade respecto ós dous factores):

1. En relación á suma de vectores:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

(Nas expresións anteriores aparecen dúas sumas diferentes: suma de vectores e suma de números).

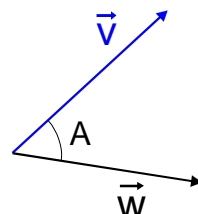
2. En relación ao produto por escalares:

$$\vec{v} \cdot (a \cdot \vec{w}) = a \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad (a \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = a \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$$

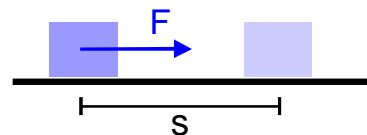
(Nesas expresións aparecen tres produtos: produto escalar de dous vectores, produto dun vector por un escalar e produto de dous números).

Expresión analítica do produto escalar

Utilizando unha base ortonormal $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (vectores perpendiculares e de módulo 1) para o sistema de



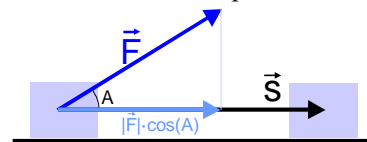
Sobre a situación do debuxo:



Definimos o traballo realizado por unha forza F que produce un desprazamento s por:

$$T = F \cdot s$$

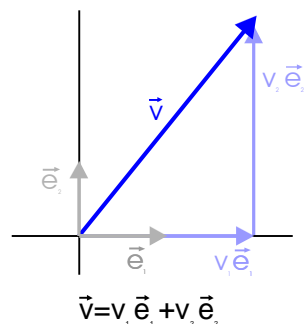
Cando a dirección da forza non coincide coa do desprazamento:



O traballo será o realizado pola “forza efectiva”: $|\vec{F}| \cos(A)$

$$T = |\vec{F}| \cdot \cos(A) \cdot s$$

A expresión resultante é o produto escalar do vector que describe a forza polo que corresponde ao desprazamento



coordenadas, podemos calcular o produto escalar de dous vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ mediante a expresión:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1, v_2) \cdot (w_1, w_2) = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

Demostración: Utilizando as propiedades do produto escalar obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) \cdot (w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2) = \\ &= v_1 w_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + v_2 w_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + v_1 w_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + v_2 w_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) \end{aligned}$$

Dado que a base é ortonormal, entón:

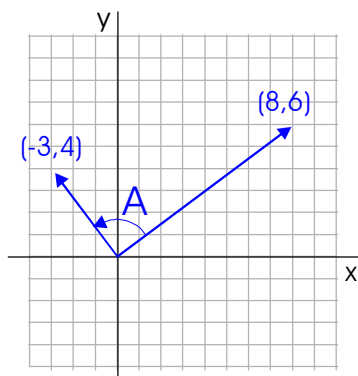
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_1| \cdot \cos(0) = 1$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos(90) = 0$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_2| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \cos(0) = 1$$

Polo tanto, $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$

Podemos incluso definir o produto escalar mediante a súa expresión analítica e deducir a partir dela a anterior definición, pois ambas dúas definicións son equivalentes. O produto escalar proporciona un método sinxelo e “elegante” para medir distancias e ángulos sen apoiarse noutros conceptos.



Exercicio 5.1

Calcula o produto escalar dos vectores $(-3,4)$ e $(8,6)$ e interpreta o resultado.

Consecuencias e propiedades

Utilizando a definición de produto escalar e a expresión analítica do mesmo podemos deducir algunhas propiedades:

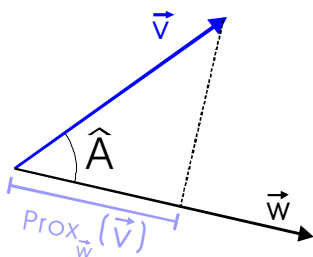
Interpretación gráfica: O valor absoluto do produto escalar de dous vectores é o produto do módulo dun dos vectores pola proxección do outro vector sobre el:

$$\cos(A) = \frac{\text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \Rightarrow |\vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{w}| \cdot \text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v})$$

Proxección dun vector sobre outro: Tendo en conta o anterior, podemos calcular facilmente a proxección dun vector sobre outro:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{w}| \cdot \text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v}) \Rightarrow \text{prox}_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{w}|}$$

Vectores perpendiculares: Debido a que $\cos(90^\circ)=0$ e $\cos(270^\circ)=0$, o produto escalar de dous vectores perpendiculares é 0: $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$



Vector perpendicular a outro dado: Dado un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$,
o vector $\vec{w}(-v_2, v_1)$ é perpendicular a el:

$$(v_1, v_2) \cdot (-v_2, v_1) = -v_1 v_2 + v_2 v_1 = 0$$

Vectores coa mesma dirección: Tendo en conta que o coseno de 0° é 1 e o de 180° é -1 , o valor absoluto do produto escalar de vectores coa mesma dirección é igual ao produto dos seus módulos:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$$

Exercicio 5.2

Atopa un vector perpendicular ao vector $(6,2)$

Exercicio 5.3

Comproba que os puntos A(-1,3), B(5,5), C(-2,6) e D(4,8) forman os vértices dun rectángulo.

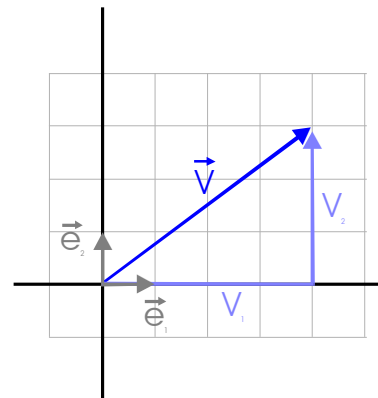
Módulo dun vector

Calcularemos o módulo dun vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a partir do produto escalar do vector por si mesmo:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(0) = |\vec{v}|^2$$

$$\text{Polo tanto: } |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Graficamente, sen máis que aplicar o Teorema de Pitágoras, vemos que a expresión anterior proporciona efectivamente a medida da lonxitude do vector.



Exercicio 5.4:

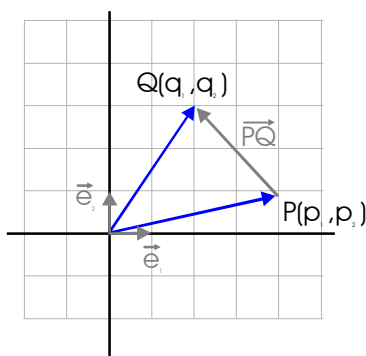
Calcula o módulo do vector $(8,6)$

Exercicio 5.5:

Calcula a área do triángulo de vértices A(4,6), B(5,-1) e C(-1,1)

Exercicio 5.6

Calcula a área do paralelogramo determinado polo vectores $(7,1)$ e $(-2,5)$ e inventa un procedemento para calcular a área dun paralelogramo calquera coñecendo os vectores que forman os seus lados.



Distancia entre dous puntos:

Calculamos a distancia entre dous puntos a partir do módulo do vector que vai dun punto ao outro:

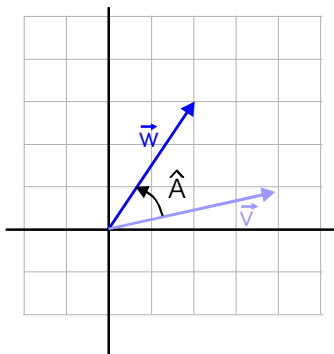
$$\left. \begin{array}{l} P(p_1, p_2) \\ Q(q_1, q_2) \end{array} \right\} d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

Exercicio 5.7

Calcula a distancia entre os puntos $P(1,-5)$ e $Q(4,2)$

Exercicio 5.8

Comproba que o cuadrilátero de vértices $A(0,1)$, $B(8,7)$, $C(-6,9)$ e $D(2,15)$ é un cadrado e calcula a súa área.



Ángulo de dous vectores

Apoiándonos no produto escalar, podemos calcular facilmente o coseno do ángulo que forman dous vectores:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \\ \vec{w} = (w_1, w_2) \end{array} \right\} \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{w})$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2}}$$

Exercicio 5.9

Determina canto mide o ángulo que forman $(2,3)$ e $(4,1)$

Exercicio 5.10

Atopa un vector de módulo 1 que forme co vector $(6,-2)$ un ángulo de 90°

Ecuación normal da recta

Dado $P(p_1, p_2)$ un punto dunha recta e $\vec{n}(n_1, n_2)$ un vector perpendicular á recta entón, utilizando o produto escalar, podemos atopar unha nova expresión para ecuación da recta:

$$[(x, y) - (p_1, p_2)] \cdot (n_1, n_2) = 0$$

Demostración:

Debemos comprobar que calquera punto da recta cumpre esa ecuación e que só a cumpren os puntos da recta.

Se $X(x, y)$ é un punto da recta, entón o vector \overrightarrow{PX} ten a mesma dirección ca recta e é perpendicular a $\vec{n}(n_1, n_2)$, polo tanto o seu produto escalar será 0: $\overrightarrow{PX} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$

Por compoñentes: $[(x, y) - (p_1, p_2)] \cdot (n_1, n_2) = 0$

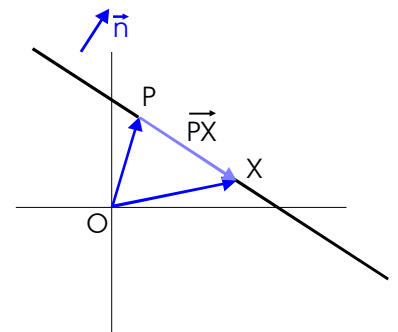
Esa expresión recibe o nome de *ecuación normal da recta* e o vector $\vec{n}(n_1, n_2)$ *vector de normal ou característico*.

Desenvolvendo a expresión anterior obtemos a ecuación xeral:

$$n_1x + n_2y - (n_1p_1 + n_2p_2) = 0 \xrightarrow[n_2=B]{n_1=A} Ax + By + C = 0$$

$$-(n_1p_1 + n_2p_2) = C$$

Fíxate que os coeficientes A e B determinan un vector perpendicular á recta.



Fíxate que se X non estivese na recta, o vector \overrightarrow{PX} non tería a mesma dirección ca recta.

Exercicio 5.11

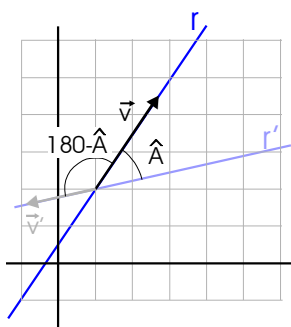
Atopa a ecuación xeral da recta que pasa por A(2,-1) e B(5,4)

Ángulo de dúas rectas

Dúas rectas córtanse formando catro ángulos iguais dous a dous. Definimos o ángulo de dúas rectas como o menor deses ángulos. Fíxate que ese ángulo está sempre entre 0° e 90° .

O coseno dese ángulo coincide co valor absoluto do coseno do ángulo que forman os vectores de dirección da recta e tamén co dos vectores característicos da recta:

$$\cos(r, r') = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}'|} \right|$$



As rectas da figura córtanse formando un ángulo A , pero os seus vectores de dirección forman un ángulo $180-A$. Ademais:
 $\cos(A) = -\cos(180-A)$

Necesítase o valor absoluto pois o ángulo que forman os vectores pode ser o que definimos como ángulo entre as rectas ou o seu suplementario e, nese caso, o valor do coseno sería o mesmo pero con signo negativo.

Exercicio 5.12

Calcula o ángulo formado polas rectas $-2x+3y=4$ e $5x+y=2$

Distancia dun punto a unha recta

Definimos a distancia dun punto P a unha recta r como a menor das distancias do punto ós puntos da recta.

O punto da recta máis próximo a P obtense trazando unha perpendicular a r pasando por P .

A distancia entre eses dous puntos será a distancia de P a r .

Podemos calcular facilmente esa distancia tendo en conta que é a proxección do vector que vai de P a $X(x,y)$, un punto calquera da recta, sobre un vector normal da recta:

$$d(P,r) = \text{prox}_{\vec{n}}(\vec{PX}) = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{PX}}{|\vec{n}|} \right|$$

Se a recta está en forma xeral:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ \vec{n} = (A, B) \end{array} \right\} d(P,r) = \left| \frac{(A, B) \cdot [(p_1, p_2) - (x, y)]}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

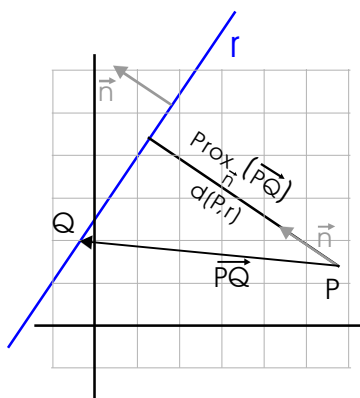
$$d(P,r) = \left| \frac{Ap_1 + Bp_2 - Ax - By}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Dado que X é un punto da recta $C = -Ax - By$, polo tanto:

$$d(P,r) = \left| \frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Exercicio 5.13

Calcula a distancia do punto $(3,-5)$ á recta $-2x+3y=4$



Lugares xeométricos.

Chámase lugar xeométrico ao conxunto de puntos que verifican unha certa condición.

Un lugar xeométrico pode, polo tanto, ser calquera conxunto de puntos inclusive o conxunto baleiro (cando ningún dos puntos do plano verifica a condición que define ao lugar xeométrico).

Estudamos algúns lugares xeométricos definidos por condicións métricas e comprobaremos que as solucións dalgunhas ecuacións con dúas incógnitas correspóndense con figuras xeométricas.

Mediatriz dun segmento

Observando un punto calquera da mediatriz dun segmento (perpendicular no punto medio), podemos decatarnos de que equidista dos extremos do segmento e de que son os únicos puntos que verifican esa condición.

Podemos pois definir a mediatriz dun segmento dado como o lugar xeométrico dos puntos que equidistan dos seus extremos.

Para obter a súa ecuación, escollemos un punto xenérico X e escribimos a condición que deben verificar as súas coordenadas.

Se P e Q son os extremos do segmento, entón:

$$d(P, X) = d(Q, X) \Leftrightarrow \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2} = \sqrt{(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2}$$

Facendo transformacións e simplificando:

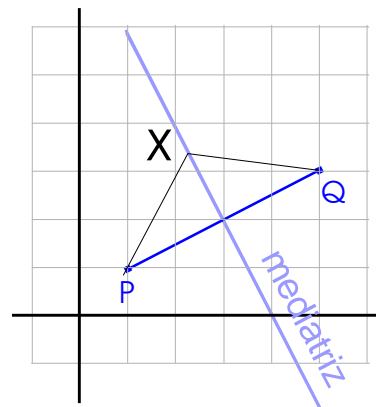
$$\begin{aligned} -2p_1x + p_1^2 - 2p_2y + p_2^2 &= -2q_1x + q_1^2 - 2q_2y + q_2^2 \\ (q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)y + \frac{p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2}{2} &= 0 \end{aligned}$$

É a ecuación dunha recta pois é do tipo $Ax + By + C = 0$.

O vector característico (vector normal á recta) é:

$$(q_1 - p_1, q_2 - p_2) = \overrightarrow{PQ}$$

Esa recta é a **mediatriz** do segmento PQ



Exercicio 5.14

Atopa a ecuación da mediatriz do segmento de extremos (2,5) e (5,1)

- a) Empregando a definición de mediatriz como perpendicular no punto medio.
- b) Como lugar xeométrico.

Bisectriz dun ángulo

Observamos que os puntos das bisectrices (hai dúas) equidistan das rectas que forman o ángulo e, ademais, son os únicos puntos que o fan. Podemos por tanto definir as bisectrices como o lugar xeométrico dos puntos que equidistan das dúas rectas.

Sexan r e s as rectas. Un punto X está nese lugar xeométrico se verifica: $d(X,r)=d(X,s)$

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ s \equiv A'x + B'y + C' = 0 \end{array} \right\} \quad \left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \right|$$

$$\left| \frac{Ax}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{A'x}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} + \frac{B'y}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} + \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \right|$$

A expresión anterior non é tan complicada como parece:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \dots \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Son números, chamándolles a, b, c, a', b' e c' resulta:

$$|ax + by + c| = |a'x + b'y + c'|$$

Para evitar os valores absolutos debemos xogar coas posibilidades de que as expresións que conteñen teñan signos iguais ou contrarios:

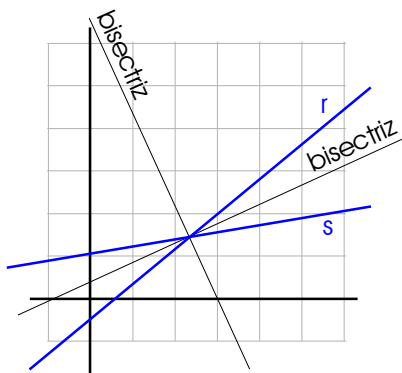
$$ax + by + c = a'x + b'y + c' \rightarrow (a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$$

$$ax + by + c = -(a'x + b'y + c') \rightarrow (a + a')x + (b + b')y + c + c' = 0$$

Obtemos as ecuacións de dúas novas rectas, as **bisectrices** dos ángulos que forman as rectas iniciais.

Exercicio 5.15

Atopa as ecuacións das bisectrices do ángulo formado polas rectas: $3x-4y+3=0$ e $8x+6y-5=0$



Fíxate que os vectores (A,B) e (a,b) son vectores de dirección da recta r pois teñen a mesma dirección e só se diferencian en que o vector (a,b) ten módulo 1. O mesmo sucede cos vectores (A',B') e (a',b')

Circunferencia:

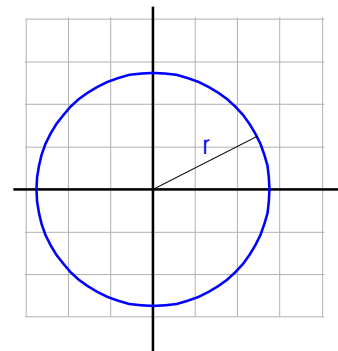
Os puntos da circunferencia verifican que a súa distancia ao centro é o radio da circunferencia.

Definimos a circunferencia como o lugar xeométrico dos puntos que están a unha distancia r do centro $C(c_1, c_2)$:

$$d(X, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r$$

No particular, se o centro é a orixe de coordenadas:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$



Exercicio 5.16

Atopa a ecuación da circunferencia de centro no punto $(4,0)$ e tanxente á recta $-4x+3y+9=0$.

Exercicio 5.17

¿A ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ corresponde a unha circunferencia? ¿A cal?

Elipse

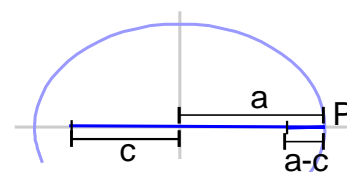
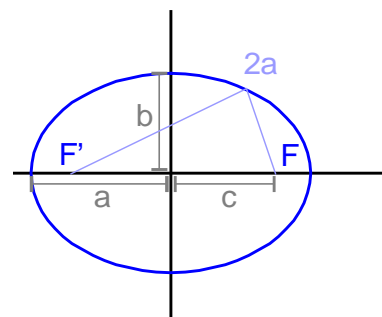
O método máis doado de construír unha elipse é o chamado do “xardineiro”. Consiste en chantar dous paus no chan, amarrar os extremos dunha corda a cada un deles e ir debuxando no chan mantendo sempre tensa a corda.

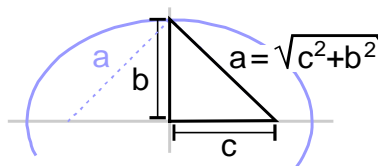
Os puntos da elipse que se vai formando verifican que a suma das súas distancias aos dous puntos fixos (que chamamos focos) é a lonxitude da corda. Podemos por tanto definir a elipse como o lugar xeométrico dos puntos que, a suma das súas distancias aos focos, ten un valor fixo.

Unha elipse queda caracterizada polos **focos, F e F'**, e un valor fixo que coincide, a suma das distancias aos focos.

Nunha elipse distinguiremos ademais os seguintes elementos:

- **Distancia focal, c:** Distancia dos focos ao centro.
- **Dous eixes de simetría:** os eixes maior e menor (como diámetros) e os correspondentes semieixes (radios).
 - **Semieixe maior, a:** Metade do eixe maior (é a metade da distancia fixa que define a elipse).





Kepler comprobou que as órbitas dos planetas, incluída a Terra, son elípticas. Unha consecuencia da LGU, Lei da Gravitación Universal de Newton, é que os astros teñen necesariamente que seguir órbitas cónicas. Calquera obxecto que se mova nun campo gravitatorio ten que ter unha órbita circular, elíptica, hipérbolica ou parabólica.

o Semieixe menor, b: Metade do eixe menor.

Se consideramos os puntos da elipse situados ós extremos dos semieixes é doado comprobar que:

- A suma das distancias ós focos é $2a$ (a medida do eixe maior): $d(P,F) + d(P,F') = (a - c) + (a + c) = 2a$
- Relación entre semieixes e distancia focal: $a^2 = b^2 + c^2$

Vemos, como exemplo, o caso de elipses de eixe horizontal e centro na orixe de coordenadas, o que implica que os focos teñen coordenadas $(c,0)$ e $(-c,0)$.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Para facer desaparecer as raíces illámolas nun membro da ecuación e elevamos ao cadrado (dúas veces):

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2a &= -\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 &= (x+c)^2 + y^2 \\ -a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= cx - a^2 \rightarrow a^2[(x-c)^2 + y^2] = c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \xrightarrow{\frac{a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)}{a^2 - c^2 = b^2}} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{aligned}$$

Dividindo por a^2b^2 obtemos a ecuación reducida dunha elipse de centro na orixe de coordenadas: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parábola

Lugar xeométrico dos puntos que equidistan dun punto fixo (foco) e dunha recta fixa (directriz).

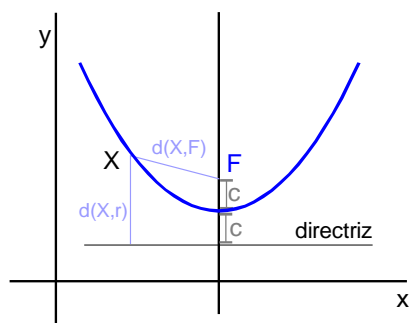
Parábolas de eixe vertical: A directriz é unha recta horizontal (a súa ecuación será do tipo $By+C=0$) e o foco $F(a,b)$ un punto calquera:

$$\sqrt{(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2} = \left| \frac{By+C}{B} \right|$$

Elevando ao cadrado e facendo transformacións obtemos unha ecuación do tipo: $y = ax^2 + bx + c$.

Dito doutro xeito, a ecuación dunha parábola de eixe vertical corresponde a unha función polinómica de segundo grao.

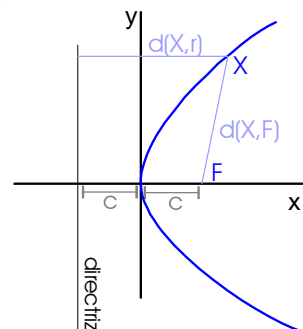
Pódese comprobar que o recíproco tamén é certo: a gráfica de calquera función polinómica de segundo grao é unha parábola.



As parábolas teñen unha curiosa propiedade: calquer raio de luz (ou onda electromagnética en xeral) paralela ao seu eixe que se reflicta na superficie da parábola, pasará polo foco. Nesa propiedade baseanse as antenas "parabólicas", faros, linternas, ...

Parábolas de eixe horizontal: A directriz é unha recta vertical. Só trataremos as centradas na orixe, o foco será $F(c,0)$ e a directriz a recta $x=-c$.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = x+c \rightarrow y^2 = 4cx$$



Hipérbola

Lugar xeométrico dos puntos que a diferenza das súas distancias ós focos é $2a$.

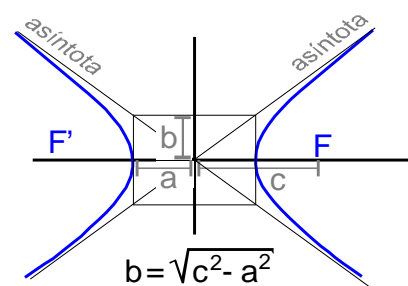
De xeito semellante á elipse, a ecuación reducida dunha hipérbola de centro na orixe de coordenadas e focos situados no eixe X é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Nunha hipérbola verifícase que $c^2 = a^2 + b^2$ sendo c a distancia focal e a e b os semieixes.

A medida que nos alunxamos do xcentro, as hipérbolas vanse aproximando cada vez máis ás rectas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.

Diremos que esas rectas son **asíntotas** da hipérbola.



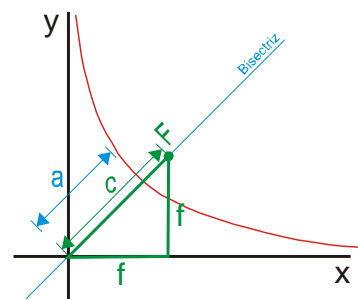
Problema 5.2

Chámanse hipérbolas equiláteras ás que teñen os semieixes a e b iguais. Atopa a ecuación dunha hipérbola equilátera de centro na orixe de coordenadas e cos focos na bisectriz do 1º e 3º cuadrantes.

Ten en conta que as coordenadas dos focos serán:

- Ao ser da bisectriz $y=x$, teñen que ser da forma (f,f) e $(-f,-f)$.
- Formase un triángulo rectángulo de catetos f e hipotenusa c . Por Pitágoras: $c^2 = f^2 + f^2 \rightarrow c^2 = 2f^2$
- Nas hipérbolas equiláteras, $c^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{b=a} c^2 = 2a^2$

Necesariamente f ten que ser igual a a , o semieixe da hipérbola e as coordenadas dos focos serán (a,a) e $(-a,-a)$.



Ampliación

O universo

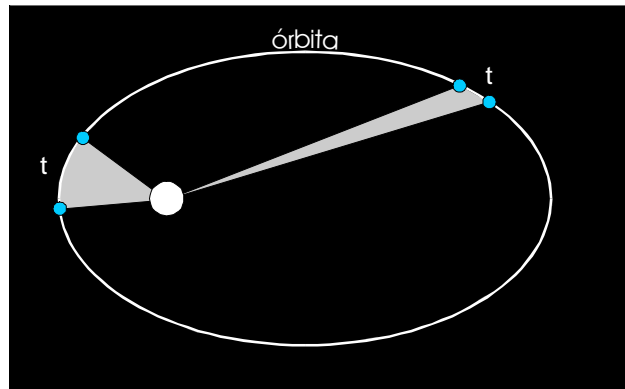
As primeiras teorías sobre o Universo das que temos noticia datan do 2000 a.C. Nesta época víase a Terra como un gran disco plano envolto por varias esferas concéntricas nas que estaban fixos os demais astros (Lúa, Sol, planetas, estrelas).

En 1609 Johannes Kepler (1571-1630) deduciu as leis que describen o movemento dos planetas do Sistema Solar:

I.- Os planetas describen órbitas elípticas co Sol nun dos focos.

II.- As áreas cubertas polos radios vectores en tempos iguais, son iguais.

Uns anos despois, Isaac Newton (1624-1727) formula a Lei da Gravitación Universal que permite entender e describi-lo movemento de calquera obxecto nun campo gravitatorio.



O principio básico da Gravitación universal é moi simple: “dous corpos atraéndose cunha forza proporcional ao produto das súas masas e inversamente proporcional ao cadrado das súas distancias: $|\vec{F}| = k \frac{m \cdot m'}{d^2}$ ”

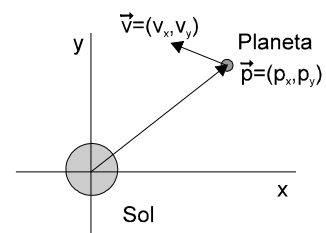
Un modelo de simulación

Utilizando os nosos coñecementos de Xeometría e de vectores imos intentar construír como é o movemento dun planeta nun sistema solar.

Nun modelo de simulación intentamos mediante un procedemento numérico reproducir un fenómeno físico, para elo pártese das leis que supoñemos describen ese fenómeno e simúlase cun experimento teórico. Se os resultados obtidos aseméllanse á realidade podemos supoñer que as leis de partida son correctas (normalmente é un proceso complicado e laborioso pero, coa axuda de calculadoras ou ordenadores é moito máis doado. De feito, na actualidade, os modelos de simulación xogan un papel fundamental en tódalas ramas da ciencia e da tecnoloxía).

No noso caso, imos construír un modelo de simulación para o movemento dun planeta cerca dunha estrela utilizando a Lei da Gravitación Universal (LGU).

- Situremos a estrela (un obxecto cunha gran masa M) nun punto do plano e suporemos que está inmóbil.
- Noutro punto calquera do plano situaremos un obxecto de masa m , moito menor, cunha velocidade arbitraria. Este



A forza de atracción é a que determina a LGU. Esa forza produce unha aceleración sobre o planeta.

obxecto ten que moverse pois, de non facelo, caería cara a estrela.

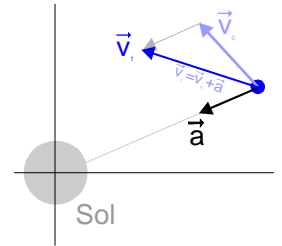
- A forza de atracción é a que determina a LGU:

$$|\vec{F}| = G \frac{M \cdot m}{d^2}$$

- Esa forza produce unha aceleración sobre o obxecto menos masivo(2) dada pola expresión:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{F}| &= G \frac{M \cdot m}{d^2} \\ \vec{F} &= m \cdot \vec{a} \end{aligned} \right\} |\vec{a}| = \frac{G \frac{M \cdot m}{d^2}}{m} = G \frac{M}{d^2} = \frac{K}{d^2} \quad (3)$$

A aceleración é un vector con dirección a liña que une os centros dos obxectos, sentido cara a estrela e módulo inversamente proporcional ao cadrado da distancia.

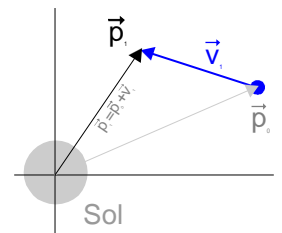


- Descompoñemos o movemento do astro en fraccións pequenas de tempo nas que supoñemos que o movemento é uniforme (para simplificar, a duración desas fraccións de tempo tómase como unidade).
- A velocidade nun dese intre calcúlase sumándolle á velocidade no intre anterior a aceleración para o que necesitamos darlle a K un valor axeitado ao tamaño do noso debuxo (fíxate que K depende das unidades, polo que pode tomar calquera valor sen máis que utilizar as unidades axeitadas):

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t, \text{ se } t=1 \text{ temos } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}$$

- A nova posición calcúlase a partir da posición anterior sumándolle a velocidade que acabamos de calcular:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{v} \cdot t, \text{ para } t=1 \text{ resulta } \vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{v}$$

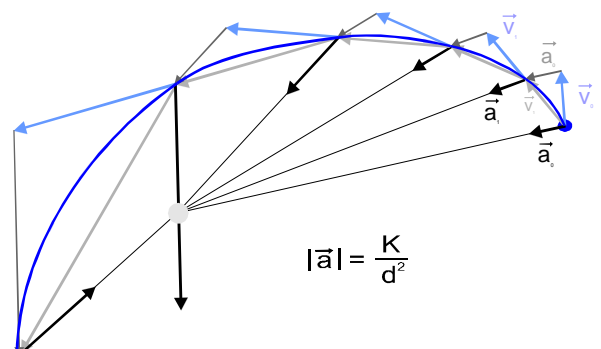


- A simulación da órbita obtense aplicando sucesivamente os pasos anteriores.

Tódalas operacións efectúanse graficamente, agás o cálculo do módulo da aceleración para o que se emprega a fórmula obtida a partir da Lei da Gravitación Universal.

A principal diferenza entre a simulación e o proceso real é que na simulación o movemento efectúase a saltos discretos do tempo en tanto que na realidade é un proceso continuo. Canto menores sexan eses saltos, mellor será a aproximación.

Deste xeito podemos predecir o movementos dos astros que forman o Sistema Solar con



2 Tamén produce unha aceleración sobre o outro, pero ao ser a súa masa moito maior esa aceleración é moi pequena polo que prescindiremos dela.

3 O produto de $G \cdot M$ é constante pois son dous números concretos.

millóns de anos de antelación e descubrir, por exemplo, que é posible que Venus escape do Sistema Solar pois a súa órbita está sometida a moitas interaccións que a poden desestabilizar.

Os modelos dinámicos como o anterior desempeñan un papel fundamental nas Matemáticas e na Física actuais. Con eles é posible describir fenómenos moi complexos: a predicción meteorolóxica, a evolución do clima, o desenvolvemento do burato de ozono, a contaminación atmosférica, os esforzos a que están sometidas as estruturas de pontes e edificios, a formación dos planetas, o comportamento dunha coche ao chocar, ..., son algúns dos fenómenos que se estudian mediante modelos dinámicos e simulacións utilizando grandes ordenadores para realizar as inxentes cantidades de operacións que precisan.