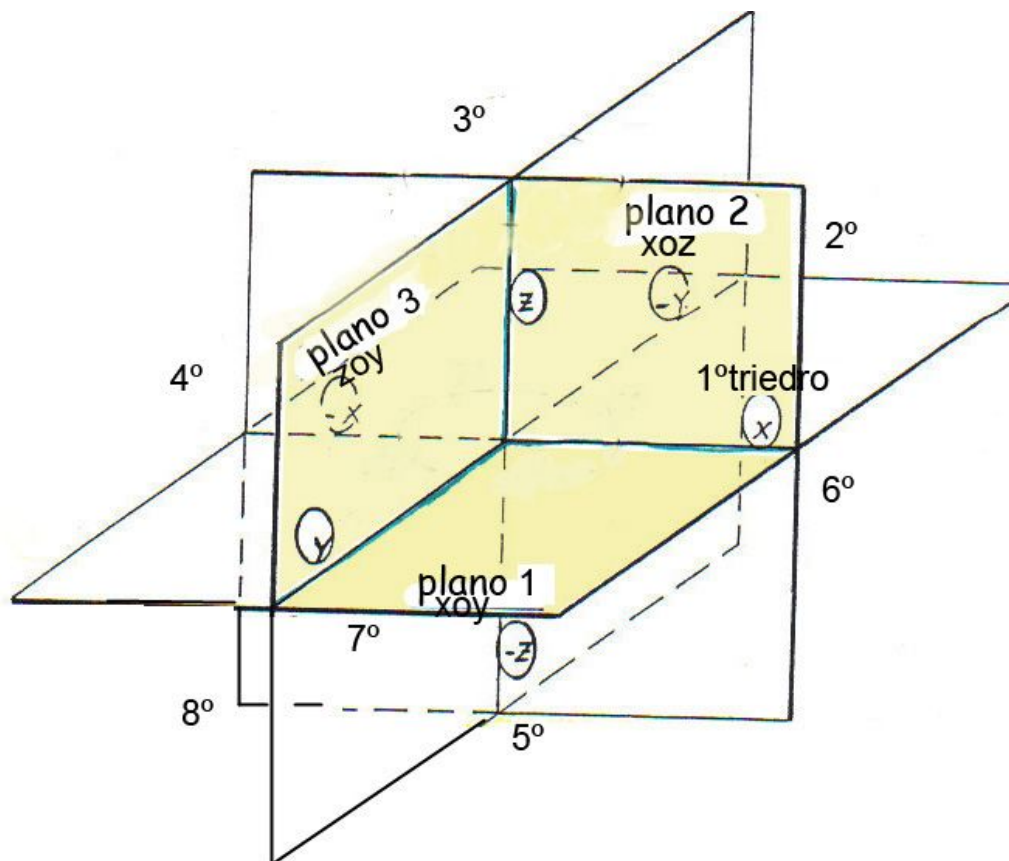


## UNIDADE 10: SISTEMA AXONOMÉTRICO ORTOGONAL E OBLICUO

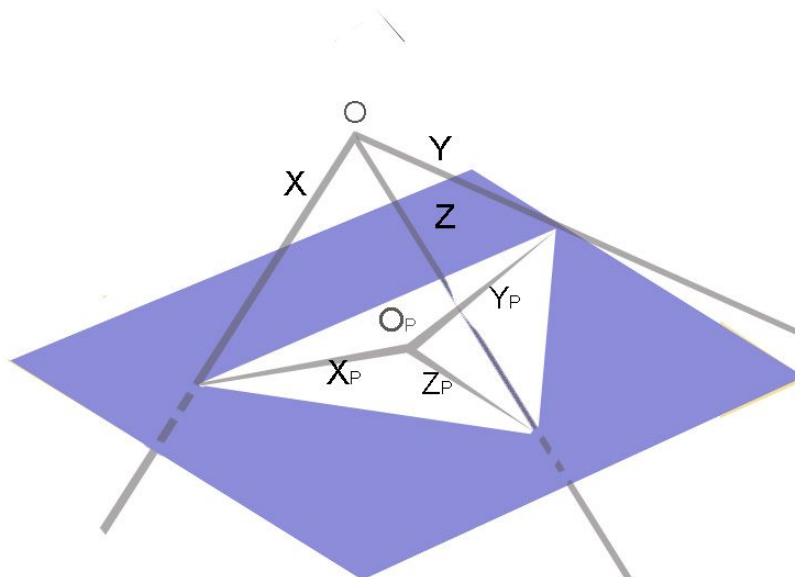
1. Introducción
2. Sistema axonométrico ortogonal
  - Proxeccións do punto
  - Proxeccións da recta
  - Posicións particulares da recta
  - Proxeccións e definición dun plano
  - Posicións particulares do plano
  - Eixos
  - Coeficientes
  - Triángulo de trazas
  - Ángulos
  - Escalas gráficas
  - Interseccións
  - Traza ordinaria dun plano
  - Traza ordinaria dunha recta
3. Sistema axonométrico oblicuo

### 1. INTRODUCCIÓN

No sistema axonométrico un triedro ortogonal, e dicir, tres planos a  $90^\circ$  ao cortarse xeneran oito zonas ou triedros, e en cada triedro xenéranse, tamén, tres eixos ortogonais  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que corresponden as tres dimensións espaciais, largo, ancho e alto. Nesta unidade traballaremos unicamente no primeiro triedro. As rectas, figuras ou partes de figuras que se atopen no resto de octantes representaránse con liña discontinua. Polo tanto, soamente considéranse como vistas as partes das figuras contidas no primeiro triedro.



No sistema axonométrico ortogonal un plano oblicuo (plano do cadro ou plano de referencia) que corte ao triedro según tres trazas formará un triángulo coñecido como triángulo de trazas.



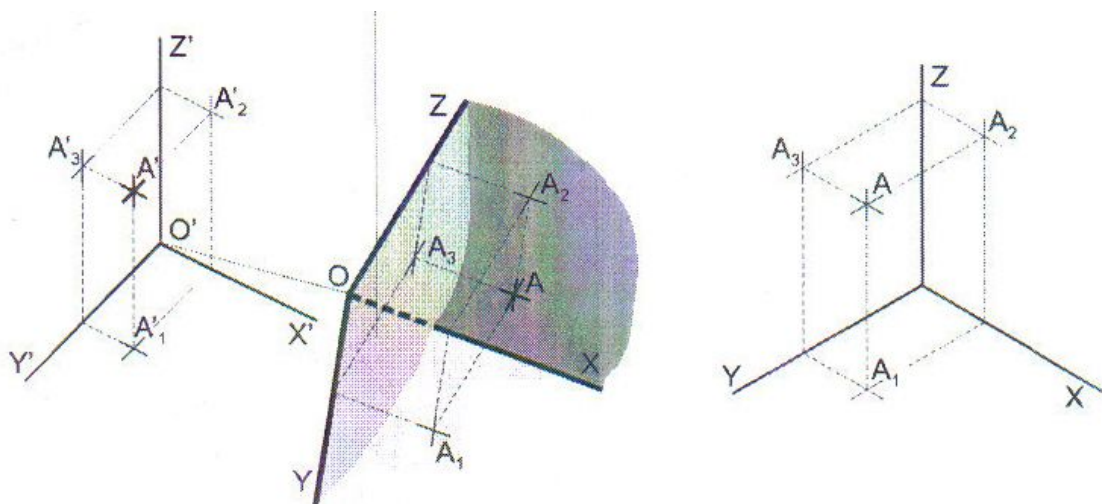
No sistema axonométrico ortogonal os eixes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , proxéctanse ortogonalmente sobre o plano de referencia.

No sistema axonométrico oblicuo prodúcese, sen embargo, unha proxección oblicua dos raios proxectantes.

## 2. SISTEMA AXONOMÉTRICO ORTOGONAL

### • Proxeccións do punto

Un punto no espazo, neste sistema, proxéctase ortogonalmente en cada un dos planos do triedro e tamén ortogonalmente no plano de referencia. Polo tanto, o punto ten neste sistema catro proxeccións:  $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$  (proxeccións secundarias) e  $A$  (proxección directa ou principal sobre o plano de referencia).  $A'$ ,  $A''$  e  $A'''$  proxéctanse, a súa vez, ortogonalmente sobre o plano de referencia.



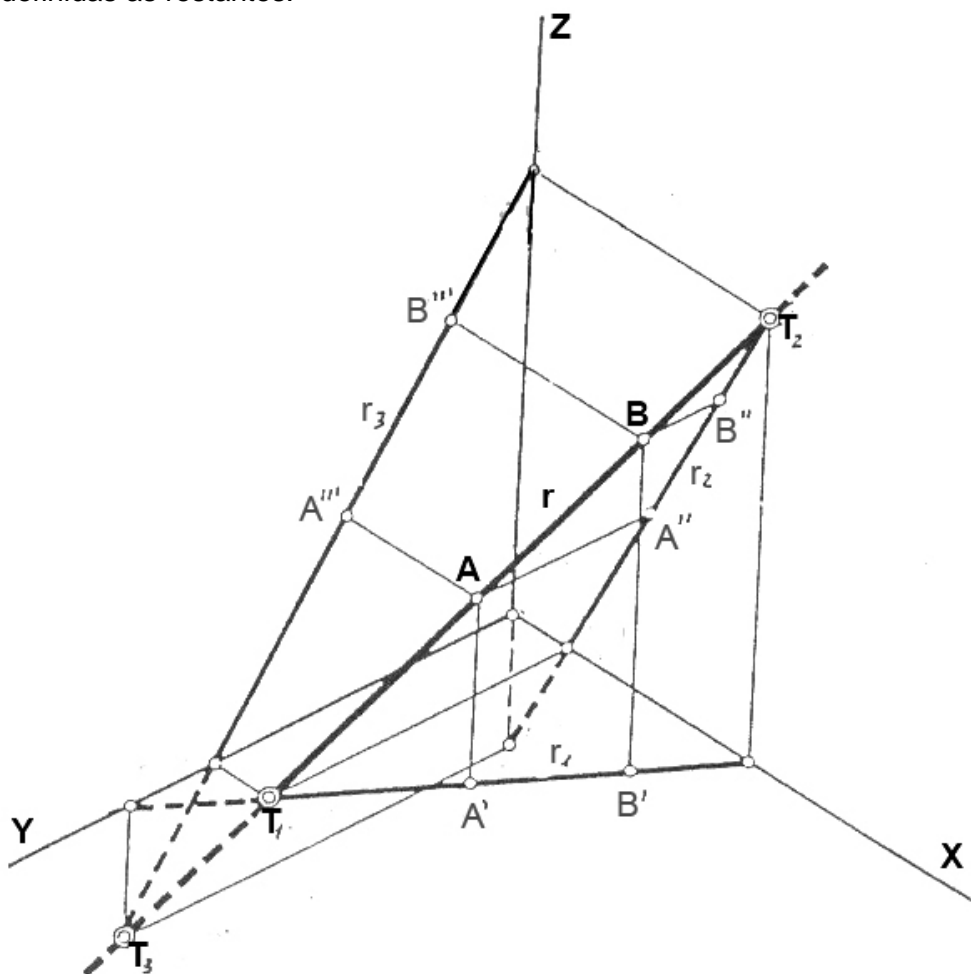
- **Proxeccións da recta**

Para proxectar unha recta neste sistema, teremos que proxectar dous puntos da mesma.

As trazas dunha recta cos planos de proxección son catro, pois catro son os planos que interveñen na axonometría, os tres do triedro e o plano do cadro. Cada traza, como punto que é, proxéctase ortogonalmente en cada un dos planos do triedro e todos eles tamén ortogonalmente no plano do cadro ou plano de referencia.

A recta ten unha traza ordinaria,  $T_0$ , co plano do cadro. Salvo a traza ordinaria, que é unha proxección directa sobre o plano do cadro, as secundarias  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  son proxeccións de proxeccións.

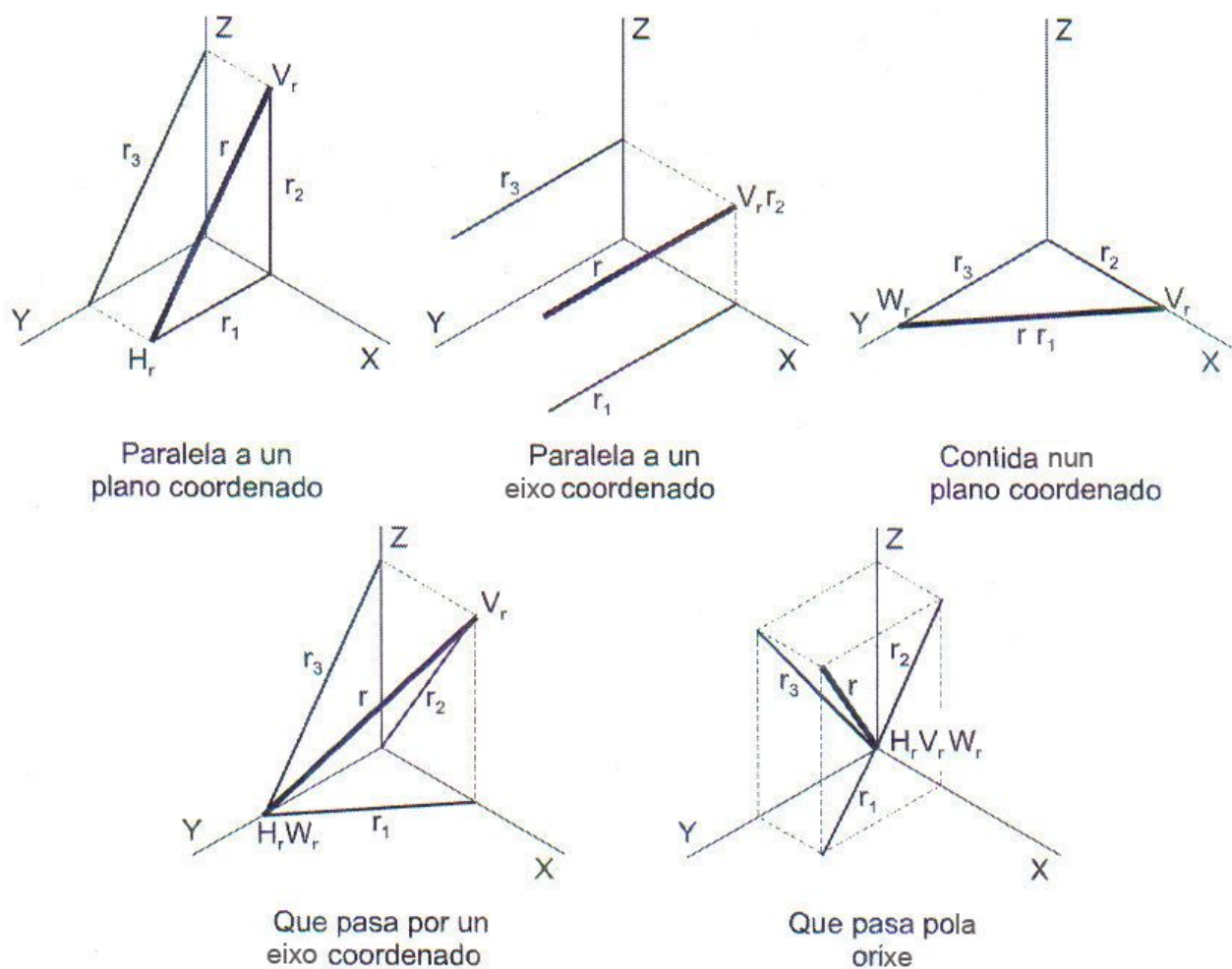
A recta queda definida por dous puntos.  $AB$  definen a recta  $r$  na súa proxección directa u ordinaria.  $A'B'$ ,  $A''B''$ ,  $A'''B'''$ , definen a  $r'$ ,  $r''$ ,  $r'''$ , como proxeccións secundarias (proxección horizontal, vertical e de perfil, 1ª, 2ª e 3ª proxeccións sobre os planos  $XoY$ ,  $XoZ$  e  $ZoY$  do triedro). As trazas da recta son os puntos de corte da recta cos planos que interveñen no sistema e *sempre están aliñadas*. Con dúas proxeccións quedan definidas as restantes.



(Sabemos obter as trazas secundarias. A traza ordinaria obteráse cando estudemos interseccións).

- **Posicións particulares da recta**

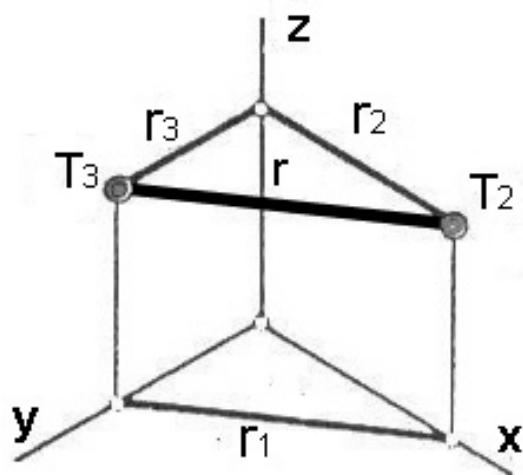
- a) Rectas paralelas a un plano do triedro
- b) Rectas perpendiculares a un plano do triedro
- c) Rectas contidas nun plano do triedro
- d) Rectas que cortan a un eixo
- e) Rectas que pasan pola orixe



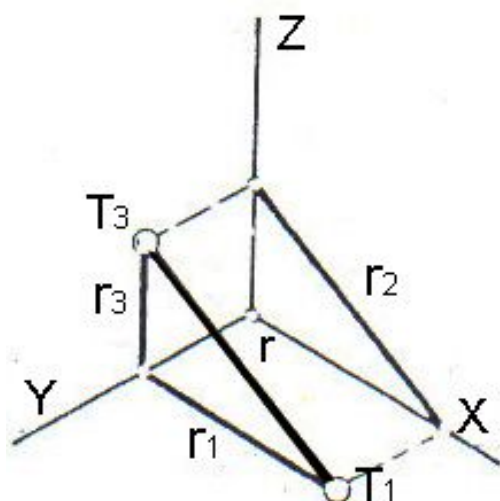
a) Paralelas a un plano do triedro

Estas rectas soamente teñen tres trazas: dúas secundarias e a ordinaria. Posto que son paralelas a un plano do triedro, polo tanto, non se cortan co plano ao que son paralelas.

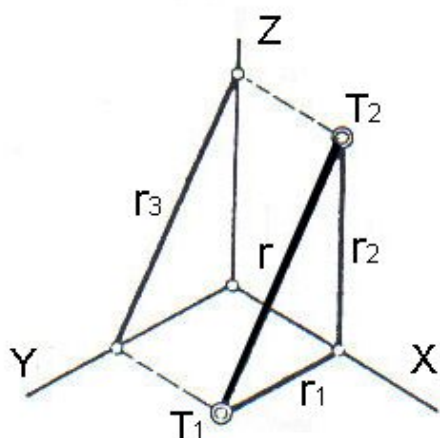
- Recta paralela ao plano  $xoy$



- Recta paralela ao plano xoz



- Recta paralela ao plano yoz



## b) Perpendiculares a un plano do triedro

- Recta perpendicular ao plano xoy

Nesta recta a proxección  $r_1$  é un punto por perpendicularidade a **xoy**.

Como o eixo **z** é tamén perpendicular ao plano xoy, a recta **r** e o eixo **z** son paralelos e **r**, **r2** e **r3** e **z** proxéctanse paralelas.

- Recta perpendicular ao plano xoz

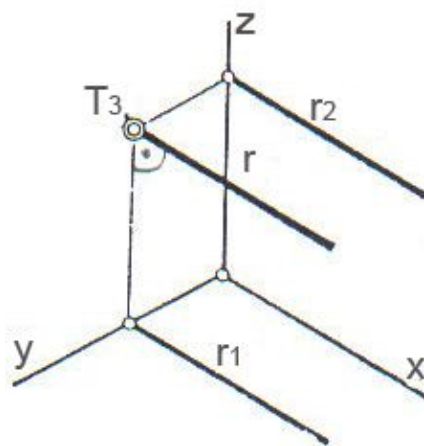
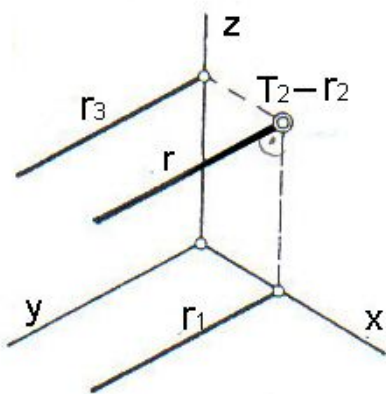
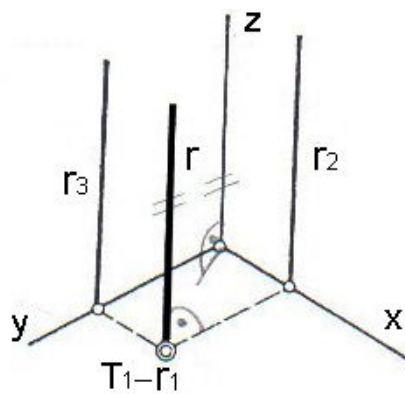
Nesta recta a proxección  $r_2$  é un punto por perpendicularidade a **xoz**.

Como o eixo **y** é tamén perpendicular ao plano xoy, a recta **r** e o eixo **y** son paralelos e **r**,  $r_1$  e  $r_3$  e **y** proxéctanse paralelas.

- Recta perpendicular ao plano yoz

Nesta recta a proxección  $r_3$  é un punto por perpendicularidade a **yoz**.

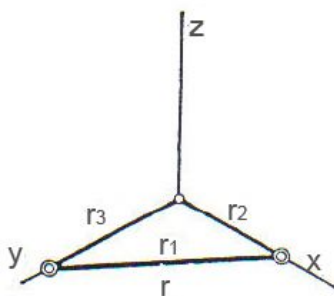
Como o eixo **x** é tamén perpendicular ao plano yoz, a recta **r** e o eixo **x** son paralelos e **r**,  $r_1$  e  $r_2$  e **x** proxéctanse paralelas.



c) Contidas nun plano do triedro

Por pertenza da recta ao plano do triedro, a proxección directa coincide coa secundaria correspondente. Se a recta está contida no plano xoy,  $r$  coincide con  $r_1$ ; se a recta está contida no plano xoz,  $s$  coincide con  $S_2$ ; e cando a recta está contida no plano yoz,  $t$  coincide con  $t_3$ .

- Recta contida no plano xoy

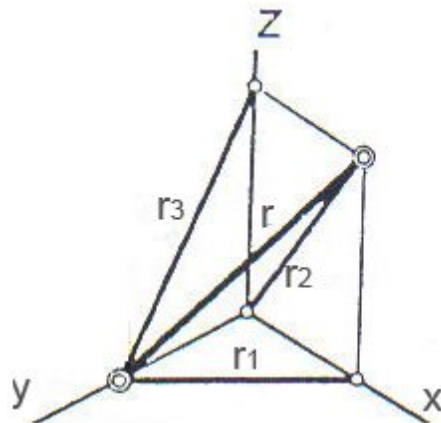
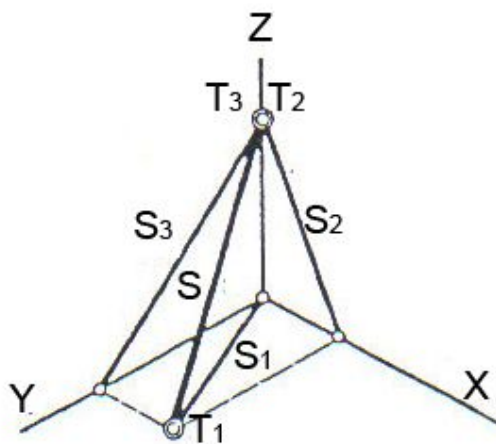
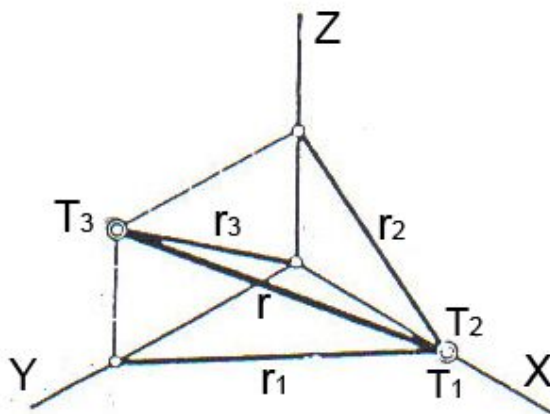


- Recta contida no plano xoz
- Recta contida no plano yoz

d) Rectas que cortan aos eixos

Estas rectas teñen unha traza dobre no lugar de corte co eixo, porque cada eixo é común a dous planos.

- Recta que corta ao eixo x
- Recta que corta ao eixo z
- Recta que corta ao eixo y

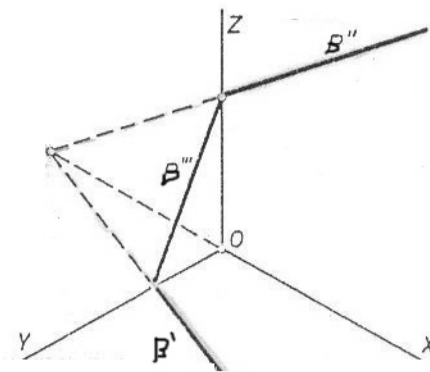
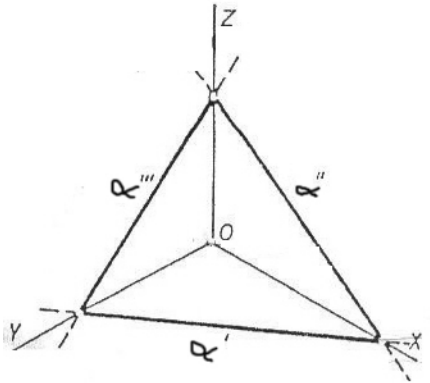


e) Rectas que pasan pola orixe

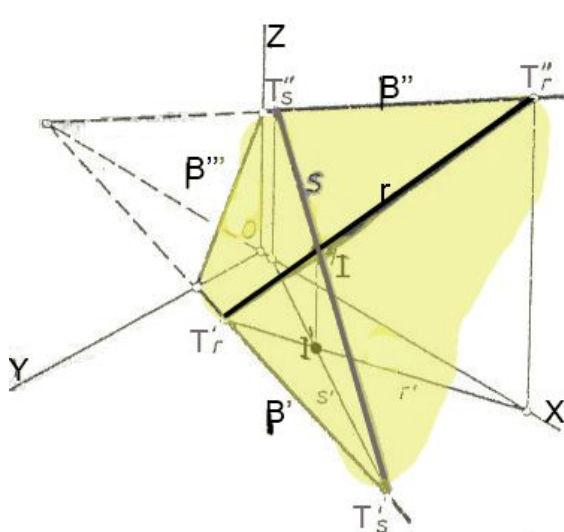
As súas trazas atópanse na orixe do triedro. Para definilas é necesario coñecer, al menos, un punto delas.

- **Proxeccións e definición dun plano**

O plano queda definido por medio das súas trazas coas caras do triedro, e dicir, polas rectas de intersección do plano cos planos do triedro. Estas trazas son rectas contidas nos planos do triedro.



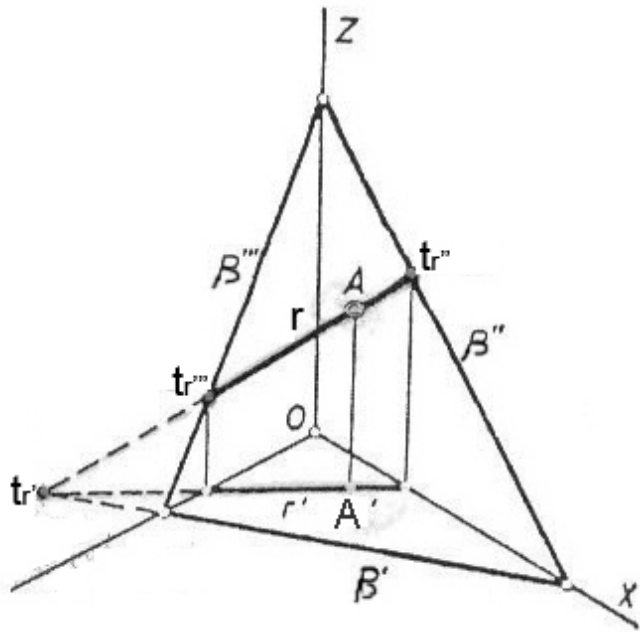
*Dúas rectas ao cortarse definen un plano* e toda recta contida nun plano ten as súa traza horizontal contida na traza horizontal do plano e a traza vertical na traza vertical do plano. Ao unir entre si as trazas homónimas das rectas obtemos as trazas do plano.





*Unha recta estará contida nun plano cando as súas trazas coincidan coas trazas homónimas do plano.*

*Un punto estará contido nun plano se está contido nunha recta do plano.*



- **Posicións particulares do plano**

- Planos paralelos a un eixo
- Planos paralelos a un triedro
- Plano que pasa por un eixo

- Paralelos a un eixo

Estes planos ao ser paralelos a un eixo son perpendiculares a un plano do triedro.

- Plano paralelo ao eixo x

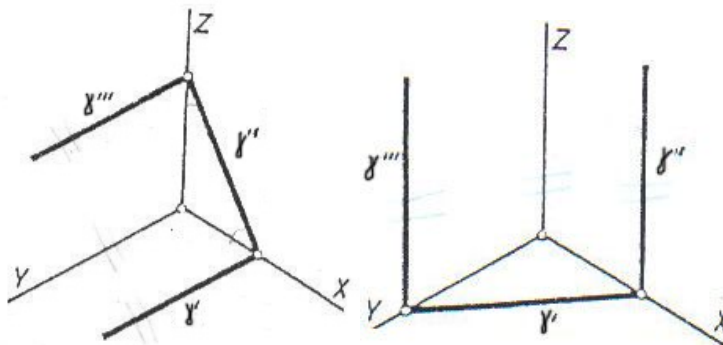
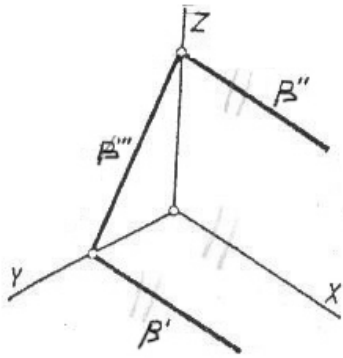
$\beta_1$  e  $\beta_2$  son paralelos ao eixo x. O plano é perpendicular a yoz.

- Plano paralelo ao eixo y. O plano é perpendicular a xoz.

$\gamma_1$  e  $\gamma_3$  son paralelos ao eixo y.

- Plano paralelo ao eixo z

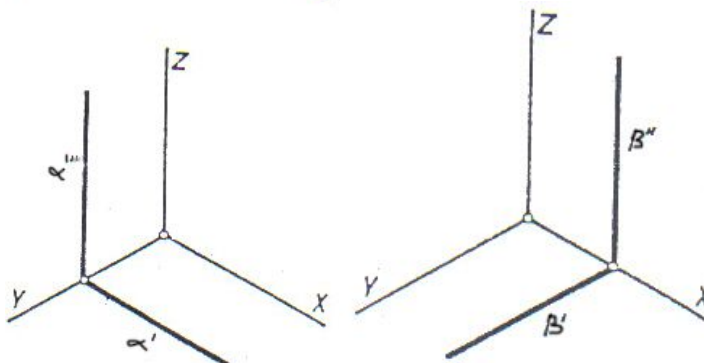
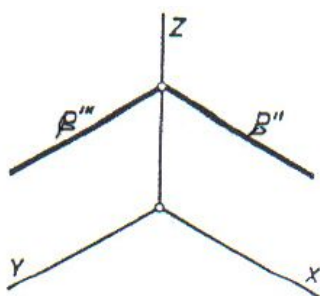
$\gamma_3$  e  $\gamma_2$  son paralelos ao eixo z. O plano é perpendicular a xoy.



b) Paralelos a un plano do triedro

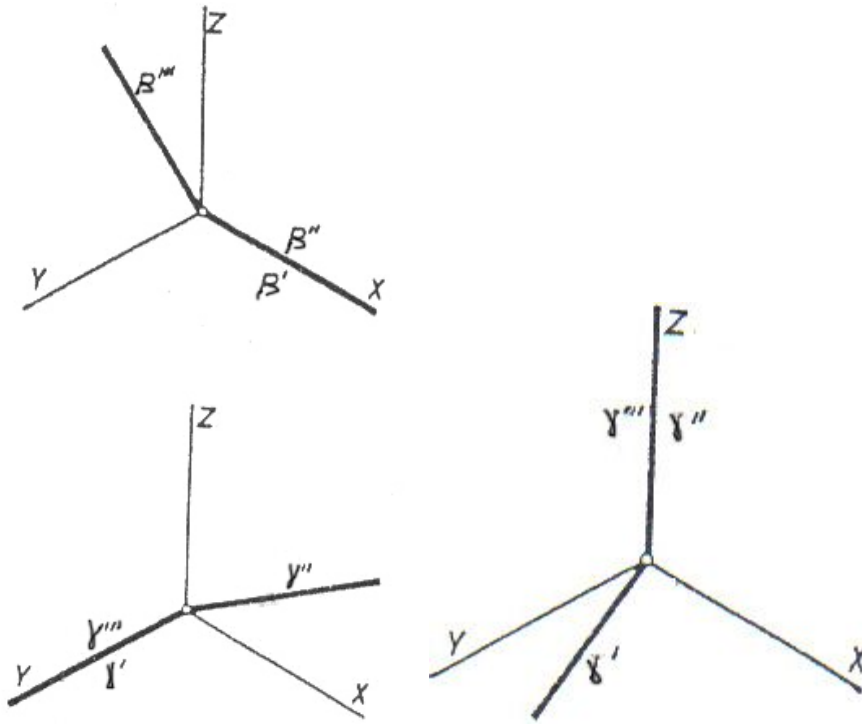
Estes planos, evidentemente, non teñen traza co plano ao que son paralelos.

- Plano paralelo a xoy
- Plano paralelo a xoz
- Plano paralelo a yoz



c) Planos que pasan por un eixo

Cando un plano pasa por un eixo, dúas das súas trazas quedan confundidas co propio eixo.



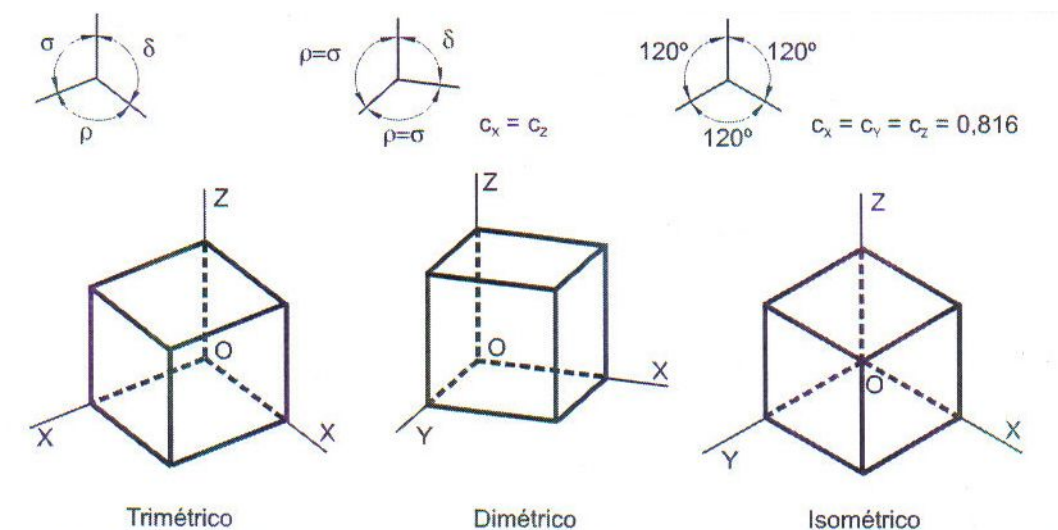
- **Eixos**

No sistema axonométrico ortogonal xurden tres eixos: **x**, **y** e **z**, que son proxeccións ortogonais sobre un plano de referencia coincidente coa superficie do debuxo, de tres líneas espaciais ortogonais (semellante as aristas da esquina dunha habitación ou aos tres eixos dun sistema espacial: ancho, largo e alto).

Os eixos proxéctanse reducidos, polo tanto as medidas reais proxéctanse reducidas.

Os eixos proxectados sobre o plano de referencia forman entre sí tres ángulos, a suma destes ángulos é de  $360^\circ$ , e o seu valor dependerá da inclinación do triedro respecto o plano de referencia. Así temos tres sistemas axonométricos ortogonais:

- Isométrico: os tres ángulos son iguais (de  $120^\circ$  e suman  $360^\circ$ ).
- Dimétrico: dous ángulos iguais e o terceiro distinto, (suman  $360^\circ$ ).
- Trimétrico: os tres ángulos son diferentes, (suman  $360^\circ$ ).



- **Coeficientes**

As medidas reais das rectas, figuras e sólidos, proxéctanse, no sistema axonométrico, reducidas e, polo tanto, os eixos proxéctanse tamén máis pequenos. A razón entre medidas proxectadas e medidas reais denomínase *coeficiente de redución*, *K*. Onde:

$$K_x = X_p / X_e$$

$$K_y = Y_p / Y_e$$

$$K_z = Z_p / Z_e$$

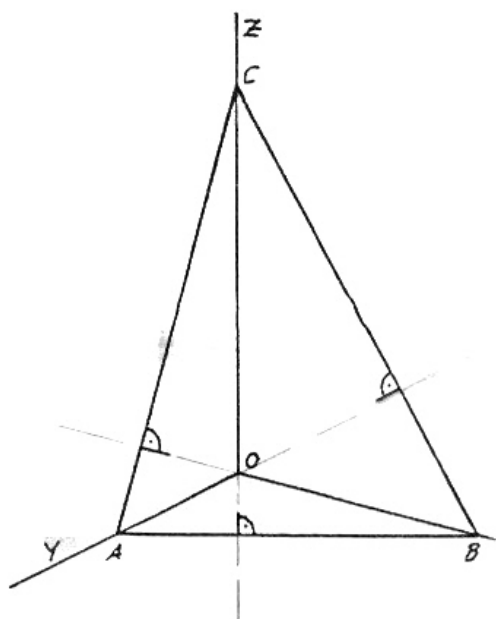
As medidas reais en **X<sub>e</sub>**, **Y<sub>e</sub>** e **Z<sub>e</sub>** denomínanse escalas naturais **E<sub>n</sub>**, e as medidas proxectadas en **X<sub>p</sub>**, **Y<sub>p</sub>** e **Z<sub>p</sub>**, escalas reducidas: **E<sub>x</sub>**, **E<sub>y</sub>**, **E<sub>z</sub>**.

- **Triángulo de trazas**

Os planos ortogonais que forman o triedro, cortan ao plano de referencia en tres trazas que forman o triángulo de trazas, cuos lados son perpendiculares, un a un, aos eixos proxectados.

A situación do triángulo de trazas depende da posición do plano de referencia.

Coñecendo o triángulo de trazas dunha terna de eixos, podemos atopar os eixos, trazando as alturas do triángulo de trazas (perpendicular trazada desde un vértice do triángulo ao lado oposto), estas alturas coinciden cos eixos.



### • Ángulos

Os eixos do triedro forman un determinado ángulo co plano de referencia, este ángulo está definido por os eixos e as súas proxeccións:

**Xp** e **Xe** forman un ángulo  $\alpha$

**Yp** e **Ye** forman un ángulo  $\beta$

**Zp** e **Ze** forman un ángulo  $\gamma$

Como o triedro é trirrectángulo, os eixos forman  $90^\circ$  entre sí e, ademáis, cada eixo forma  $90^\circ$  co plano oposto, creándose triángulos rectángulos que teñen por catetos un eixo do espazo e unha recta pertencente ao lado oposto. Abatendo este triángulo rectángulo sobre o plano de proxección podemos coñecer o ángulo que forma o eixo no espazo co eixo proxectado, tomando como charnela a hipotenusa, abatimos o plano que contén o eixo no espazo sobre o plano de referencia ou plano do cadro. En proxección para atopar o ángulo  $\gamma$  que forman Zp e Ze:

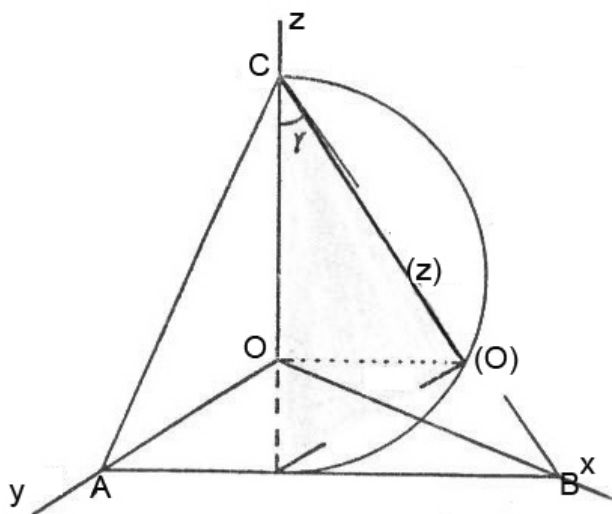
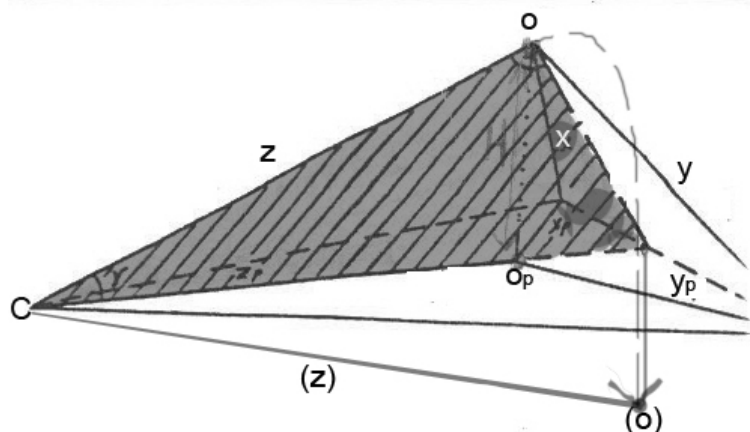
1º) Atopar o pé da altura do lado AB.

2º) Trazar media circunferencia que vai de C ao pé da altura trazada desde o vértice C do triángulo de trazas.

3º) Polo centro de corte dos eixos, O, trazar unha perpendicular ao eixo z ata cortar á semicircunferencia no punto O abatido, (O).

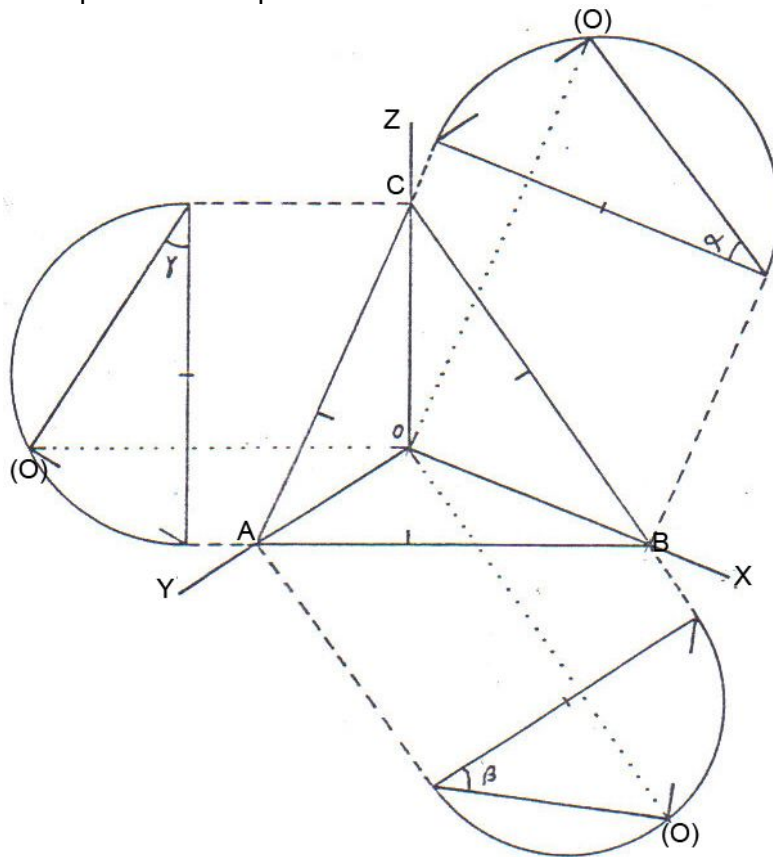
4º) Unindo (O) co vértice C, obtemos o eixo z abatido, (z).

5º) Obtemos así o ángulo  $\gamma$ , que forman o eixo z no espazo co eixo z proxectado.

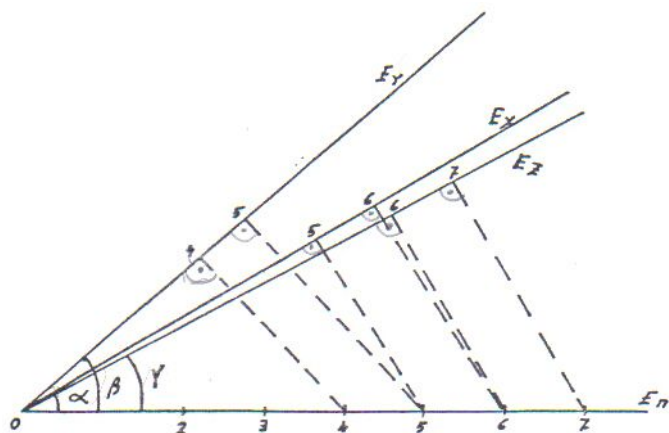


- **Escalas gráficas**

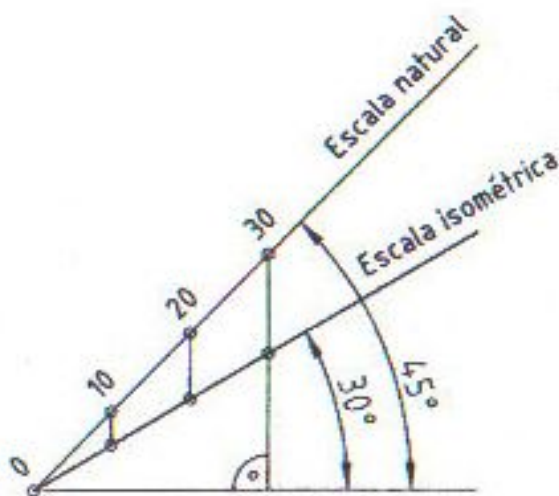
Ao obter os ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  observamos que nos abatements temos tanto os eixos no espazo como as súas proxeccións. Os eixos no espazo son a escala natural, **En**, e as proxeccións as escalas reducidas e proporcionais, **Ex**, **Ey** e **Ez**. Polo tanto, a unidade é representada por unha magnitude proporcional que corresponde a proxección. Así, sobre os eixos abatidos debuxamos a escala natural, **En**. As escalas, **Ex**, **Ey** e **Ez**, medidas proxectadas, as obtemos trazando liñas perpendiculares aos eixos proxectados qe serviron de charnela.



A seguinte construción, en aparencia distinta, consiste en debuxar a **En** dunha vez. A partires dela lévanse os ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , previamente obtidos.



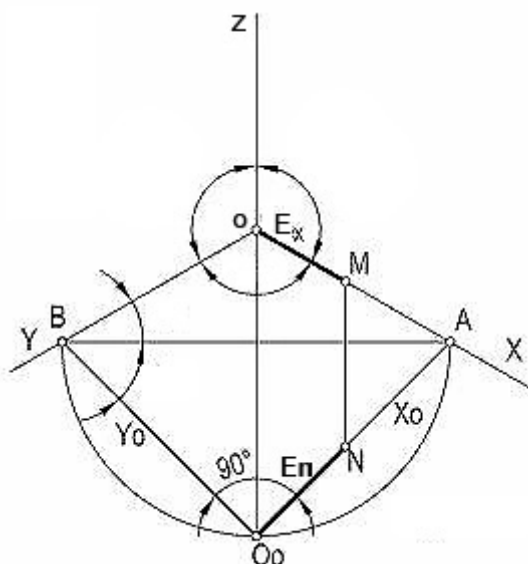
No sistema axonométrico isométrico o coeficiente de redución para os tres eixos é **0,816**. Para aplicalo aforraremos traballo empregando a seguinte construción gráfica:



- **Abatemento dos planos do triedro**

Os planos do triedro ( $xoy$ ,  $xoz$ ,  $yoz$ ) poden ser abatidos sobre o plano de proxección de referencia. Para realizar esta operación teremos que trazar o triángulo de trazas da terna de eixos (os triángulos de trazas, dunha mesma terna de eixos, son semellantes). Os lados do triángulo de trazas servirán de charnela para o abatemento dos tres planos do triedro.

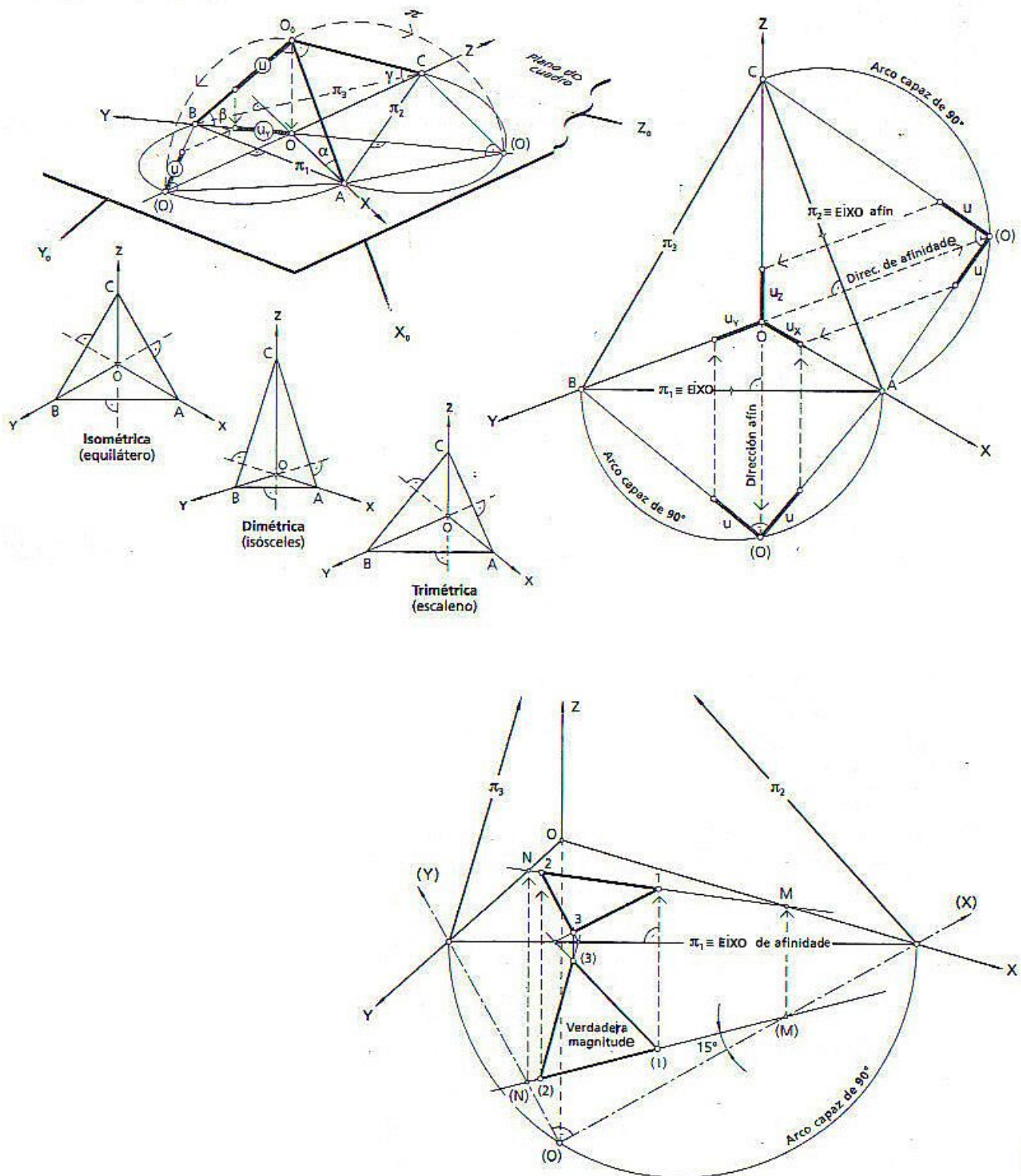
O abatemento dos planos do triedro permítenos apreciar a verdadeira magnitude de figuras planas contidas nos planos do triedro. Por outra banda, abatendo o planos do triedro temos os eixos abatidos e polo tanto a Escala natural,  **$E_n$** , e nos eixos proxectados a escala reducida ou proxectada,  **$E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$** .



*Para abater o plano  **$xoy$** :*

- 1º) Trazamos unha liña perpendicular ao eixo  **$z$**  (lado  **$AB$**  do triángulo de trazas).
- 2º) Trazamos o arco capaz de  $90^\circ$  do lado  **$AB$**  do triángulo de trazas.
- 3º) Desde  **$O$**  trazamos unha perpendicular ao lado  **$AB$**  do triángulo de trazas.
- 4º) A perpendicular trazada desde  **$O$**  cortará ao arco capaz en  **$O_0$** .
- 4º) Unindo  **$A$**  e  **$B$**  con  **$O_0$**  obteremos o eixo  **$y$**  e o eixo  **$x$**  abatidos,  **$y_0$**  e  **$x_0$** .





Entre as unidades da Escala natural e as unidades da escala reduzida ou projectada, prodúcese unha relación de afinidade onde:

- O lado do triángulo de trazas é o eixo de afinidade.
- Trazando liñas perpendiculares ao lado do triángulo de trazas (á charnela) desde as unidades da  $En$ , obteremos as unidades projectadas sobre os eixos projectados.

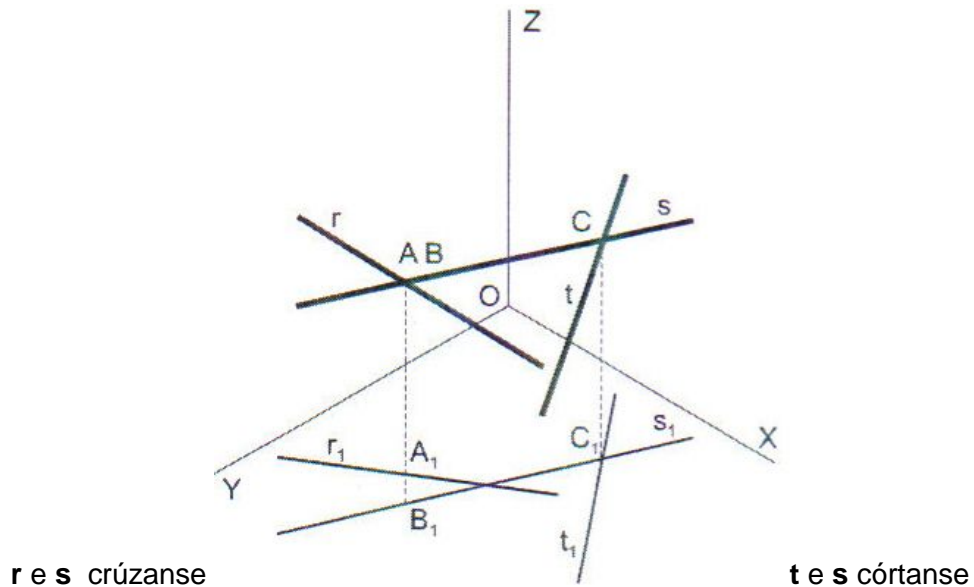


Para abater unha figura contida nun plano do triedro, abateremos este plano do triedro sobre o plano de proxección de referencia e, a continuación, abateremos a figura facendo uso da relación de afinidade existente.

- **Interseccións**

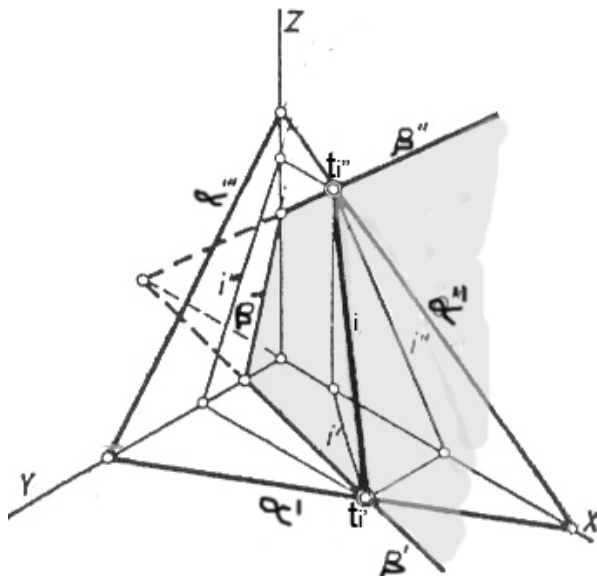
- a) Intersección de rectas

Para que dúas rectas se corten terán que ter un punto en común (punto de corte das dúas rectas).



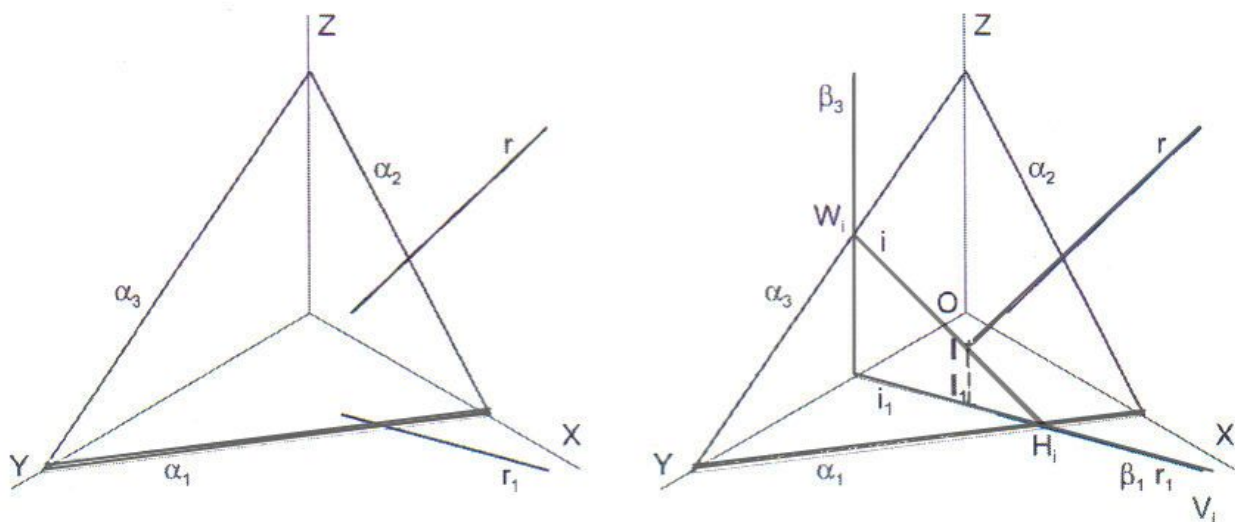
- b) Intersección de planos

A intersección de dous planos ven definida pola recta que une os puntos de intersección das súas trazas homónimas.



c) Intersección de recta con plano

Para atopar a intersección dunha recta e un plano, teremos que conter a recta nun plano e atopar a intersección dos dous planos; a intersección da recta intersección dos dous planos coa recta dada é un punto, que é o punto de intersección da recta e o plano.



d) Intersección dos planos do triedro co plano de referencia ou plano do cadro

Segundo o teorema das tres perpendiculares: “Dúas rectas, perpendiculares no espazo, proxéctanse perpendiculares sobre o plano de proxección cando unha delas é paralela a dito plano de proxección”.

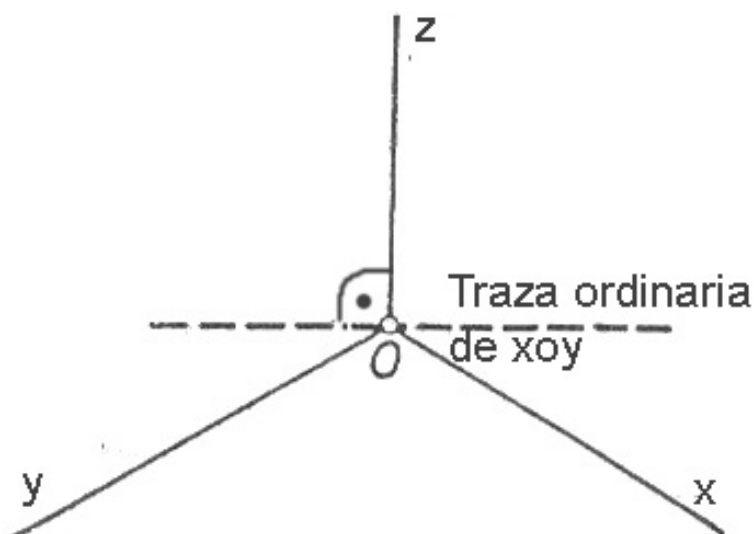
O eixo **z** é perpendicular ao plano **xoy**.

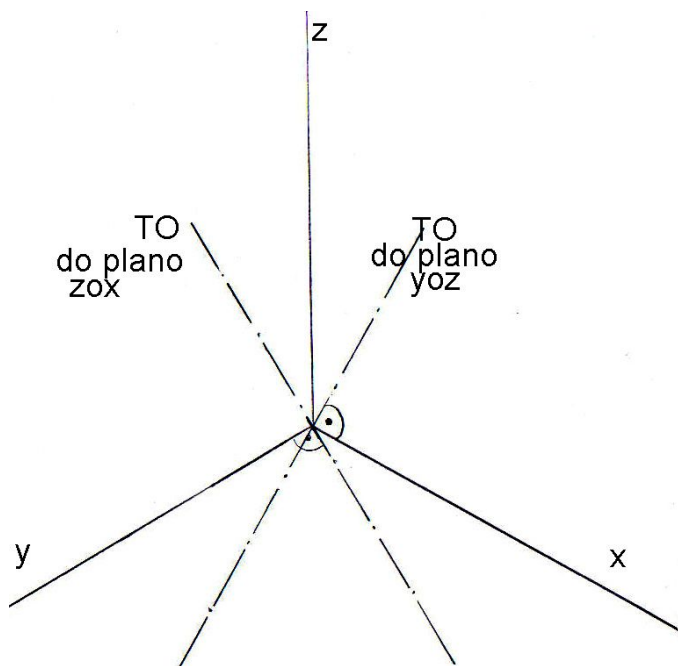
O eixo **x** é perpendicular ao plano **zoy**.

O eixo **y** é perpendicular ao plano **zox**.

A traza ordinaria do plano xoy, do triedro, atópase no plano de referencia e polo tanto é paralela a él no caso extremo de coincidencia. Polo tanto, unha recta perpendicular ao plano xoy proxectarase perpendicular a súa traza ordinaria. De ahí que sabendo que o eixo z é perpendicular ao plano xoy do triedro, a traza ordinaria de xoy co plano de referencia será perpendicular ao eixo z proxectado.

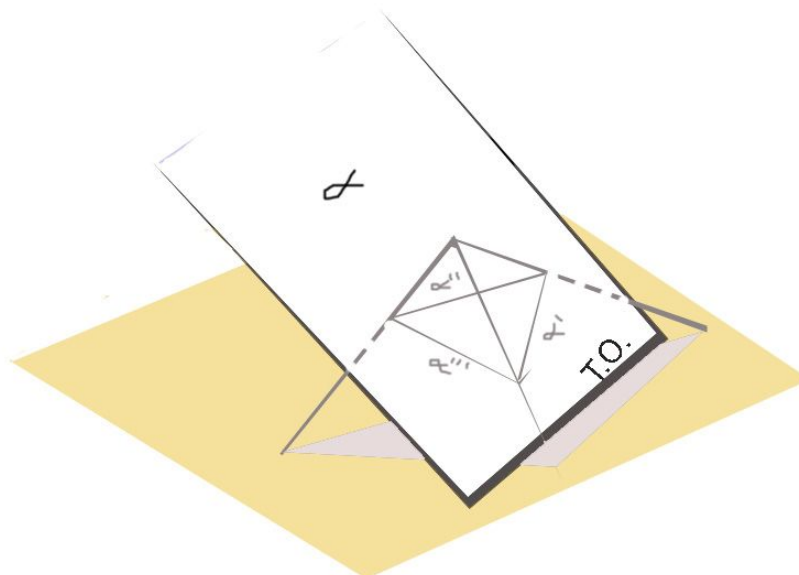
Supoñendo que o plano de referencia ou plano do cadro pasa polo vértice do triedro:





- **Traza ordinaria dun plano**

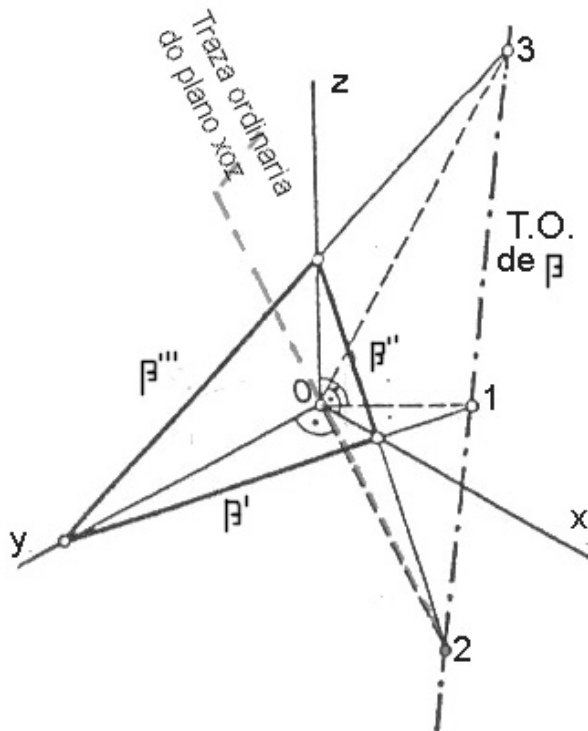
Nun plano oblicuo prodúcese tres trazas  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  e  $\alpha'''$  sobre os planos do triedro. Ademais, existe un cuarta traza, a ordinaria, **TO**, co plano de referencia ou plano do cadro. *Esta traza ordinaria dun plano é moi importante para o trazado de abatementos cando precisemos abatir un plano onde estea contida unha figura, para ver a figura na súa verdadeira magnitude, posto que, a traza ordinaria dun plano servirá de charnela para o abatemento do plano e de todas as figuras contidas nel.*



Trataremos de determinar a traza ordinaria do plano  $\beta$  dado polas súas trazas cos planos do triedro  $\beta'$ ,  $\beta''$  e  $\beta'''$ . Teremos que determinar os puntos 1, 2 e 3 nos que as trazas dadas cortan ao plano de proxección de referencia:

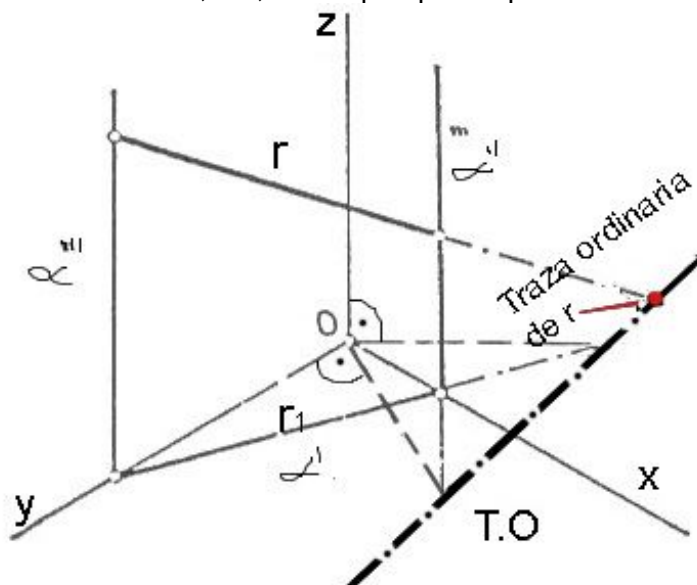
1º) As trazas  $\beta'$ ,  $\beta''$  e  $\beta'''$  son rectas contidas nas caras do triedro ( $\beta'$  en xoy,  $\beta''$  en xoz e  $\beta'''$  en yoz), polo tanto, na súas prolongacións cortarán ao plano de referencia:  $\beta'$  corta ao plano de referencia no punto 1,  $\beta''$  corta ao plano de referencia no punto 2 e  $\beta'''$  corta ao plano de referencia no punto 3. Ao unir os puntos 1, 2 e 3 obteremos a traza ordinaria, **TO**, do plano  $\beta$ .

- 2º) Obtemos o punto **1** trazando por O unha recta perpendicular ao eixo **z** (traza ordinaria do plano xoy), a continuación, prolongamos  $\beta'$  e onde se cortan as dúas rectas está o punto **1**.
- 3º) Obtemos o punto **2** trazando por O unha recta perpendicular ao eixo **y** (traza ordinaria do plano xoz), a continuación, prolongamos  $\beta''$  e onde se cortan as dúas rectas está o punto **2**.
- 4º) Obtemos o punto **3** trazando por O unha recta perpendicular ao eixo **x** (traza ordinaria do plano yoz), a continuación, prolongamos  $\beta'''$  e onde se cortan as dúas rectas está o punto **3**.
- 5º) Unimos os puntos **1**, **2** e **3** e trazamos así a traza ordinaria do plano  $\beta$  co plano de referencia.



- **Traza ordinaria dunha recta**

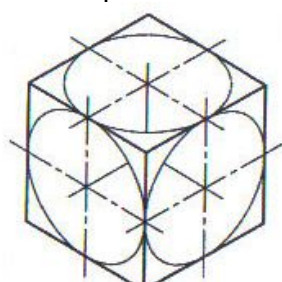
A traza ordinaria dunha recta é un punto, intersección da proxección directa da recta e a traza ordinaria, TO, de calquer plano que a conteña.



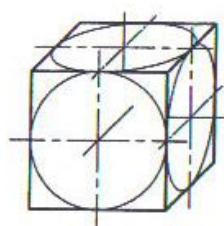
### 3. SISTEMA AXONOMÉTRICO OBLICUO

No sistema axonométrico oblicuo prodúcese unha proxección oblicua. Os raios proxectantes forman co plano de proxección de referencia un ángulo distinto dun recto. O procedemento é similar ao efecto producido polos raios do sol ao incidir, oblicuamente, sobre un plano. A sombra dos obxectos situados sobre o plano sería a proxección oblicua dos mesmos.

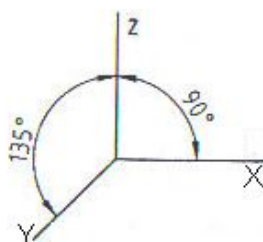
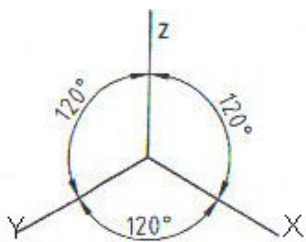
Na perspectiva cabaleira unha cara do triedro está contida no plano de referencia ou é paralela ao mesmo, polo tanto, nesta cara os planos da figura, paralelos a esta cara ou contidos nela, proxéctanse en verdadeira magnitude, non sufrindo deformación as partes curvas e os ángulos dos elementos. A cara do triedro paralela ou contida no plano de referencia é a cara **xoz**. Os eixos **z** e **x** forman  $90^\circ$  entre sí, tanto no espacio como en proxección, porque proxéctanse en verdadeira magnitude. O eixo **y** pode adoptar diferentes ángulos respecto ao eixo **x**, sendo os máis comúns os de  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  e  $150^\circ$ . Escollidos pola súa facilidade de trazado e por ser os máis adecuados desde o punto de vista de caras visibles e ocultas.



Debuxo isométrico



Perspectiva cabaleira



O feito de que todas as caras do obxecto que se sitúen paralelas ao plano de referencia, e dicir, na cara **xoz** ou paralelos a ésta cara, estean en verdadeira magnitude é unha ventaxa respecto á axonometría ortogonal; polo tanto, *debemos tratar de situar os sólidos coas súas caras de formas irregulares ou circulares e posición paralela ou contida no plano **xoz**, para facilitar o trazado da peza.*

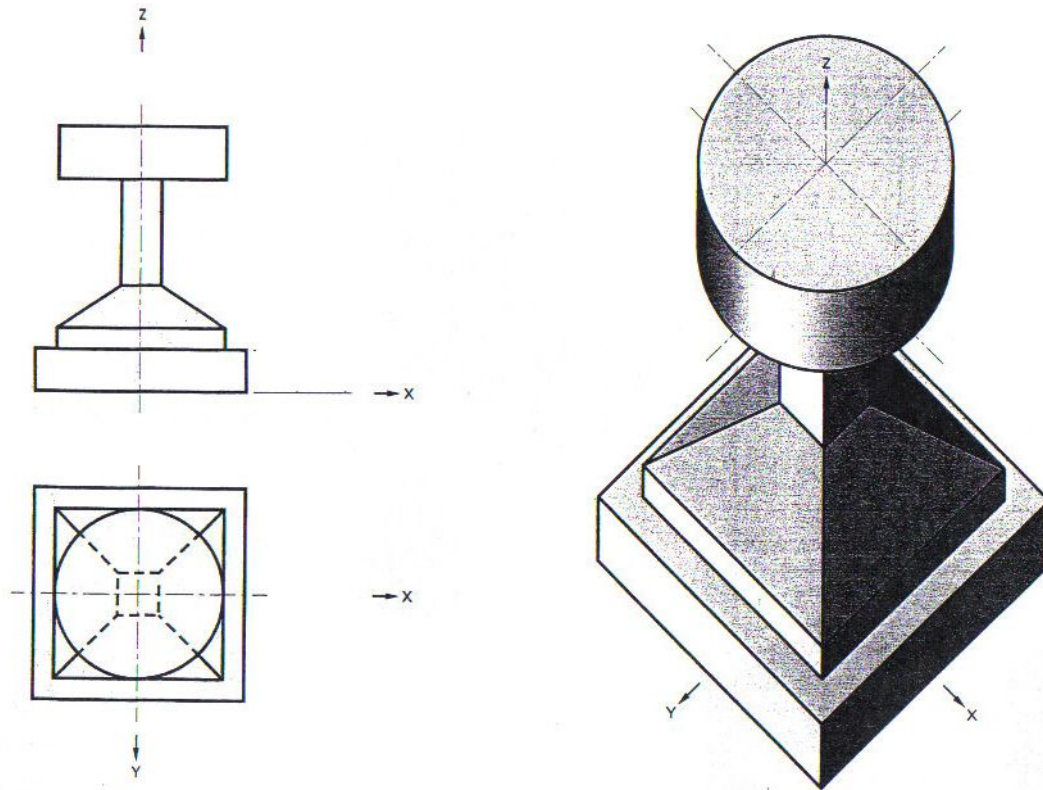
#### Coeficientes de redución na perspectiva cabaleira

Os coeficientes de redución soamente aplicanse ao eixo **y**, por ser o único eixo que non se proxecta en verdadeira magnitude. O coeficiente de redución no eixo **y** varía o 0 ao 1. Os de maior uso son: **0,5**, **0,6** e **0,7**.

Os datos necesarios para o trazado da perspectiva serán: ángulo que forman os eixos **x** e **y** proxectados; e o coeficiente de redución en **y**.

Na **perspectiva militar** a cara do triedro contida no plano de referencia ou paralela ao mesmo é a cara **xoy**, polo tanto, nesta cara os planos da figura, paralelos a esta cara ou contidos nela, proxéctanse en verdadeira magnitude, non sufrindo deformación as partes curvas e os ángulos dos elementos.

Os eixos **x** e **y** forman  $90^\circ$ . O ángulo que forma o eixo **x** co **z** varía entre  $120^\circ$  e  $150^\circ$ . O coeficiente de redución aplícase ao eixo **z** e varía entre 1 e  $1/2$ .



A perspectiva militar posúe a ventaxa de que a planta da peza ou sólido proxéctase en verdadeira magnitude, polo tanto, resulta idónea para representar plantas de vivendas, volumes de edificios, etc, conseguindo a impresión de vista aérea.