

UNIDADE 8: SISTEMA DIÉDRICO I. PARALELISMO, PERPENDICULARIDADE, DISTANCIAS E ABATEMENTOS

1. INTRODUCCIÓN

Para abordar esta unidade é preciso ter moi claros os fundamentos do sistema diédrico así coma as proxeccións do punto, recta e plano, pertenza e interseccións. Veremos as distintas operacións e relacións espaciais que poden darse entre os elementos xeométricos, así como a posibilidade de obter e traballar con verdadeiras magnitudes, moi importante para a unidade seguinte de sólidos e superficies.

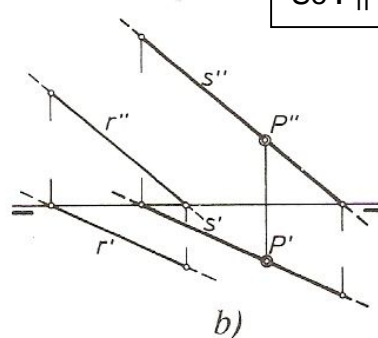
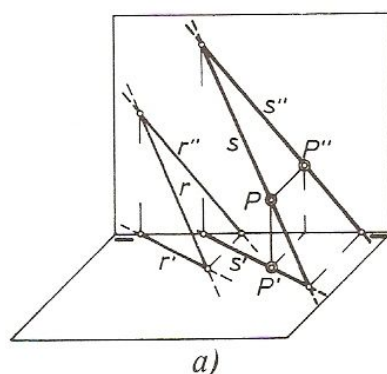
2. PARALELISMO

Os casos de paralelismo que se poden presentar son:

- a) **Paralelismo entre dúas rectas**
- b) **Paralelismo entre dous planos**
- c) **Paralelismo entre recta e plano**

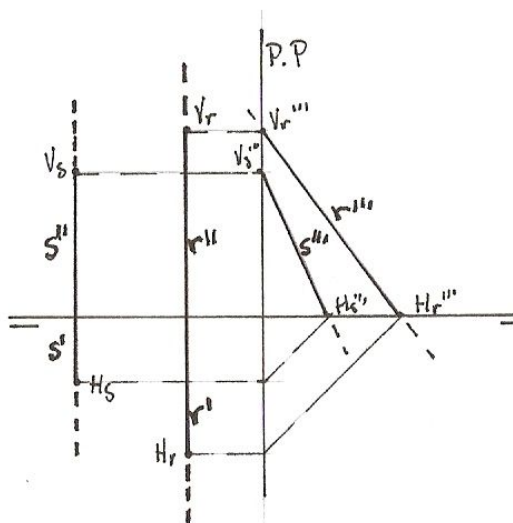
a) Paralelismo entre dúas rectas

Se dúas rectas son paralelas no espazo as súas proxeccións homónimas serán paralelas.



Se $r \parallel s$: $r' \parallel s'$ $r'' \parallel s''$

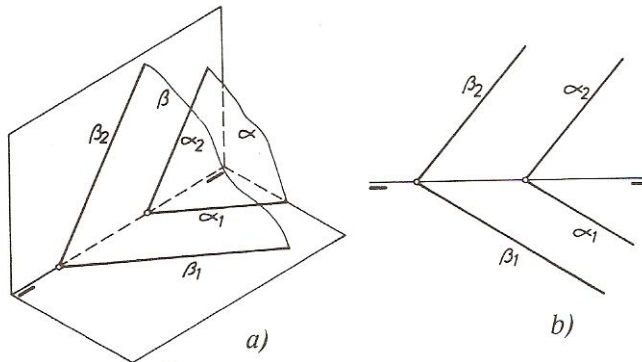
Esta condición non se cumpre coas **rectas de perfil**, onde será necesario atopar a 3ª proxección para saber se son paralelas ou non no espazo.



No exemplo vemos como as rectas de perfil r e s non son realmente paralelas, a pesar de ter as súas proxeccións paralelas, ao atopar as súas proxeccións no plano de perfil.

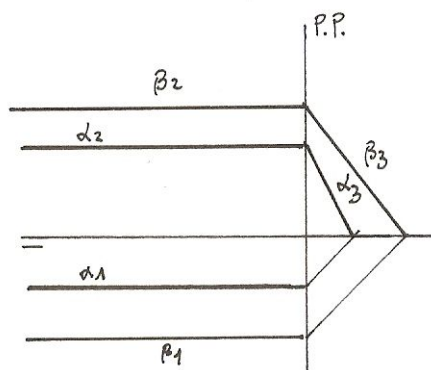
b) Paralelismo entre dous planos

Se dous planos son paralelos no espazo as súas trazas homónimas serán paralelas.



Se $\alpha \parallel \beta$: $\alpha_1 \parallel \beta_1$ $\alpha_2 \parallel \beta_2$

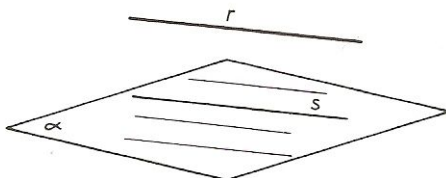
Exceptúanse os planos paralelos a LT que teñen as súas trazas paralelas pero poden non ser paralelos no espazo.



Como se pode apreciar no exemplo, os planos α e β son paralelos a LT polo que as súas trazas son paralelas. Para saber se son paralelos no espazo teremos que ir ao plano de perfil, onde pode observarse que neste caso non son paralelos.

c) Paralelismo entre recta e plano

Unha recta é paralela a un plano cando é paralela a unha recta contida nese plano.



O problema de trazar por un punto un plano paralelo a unha recta dada ten infinitas solucións, porque por unha recta pasan infinitos planos.

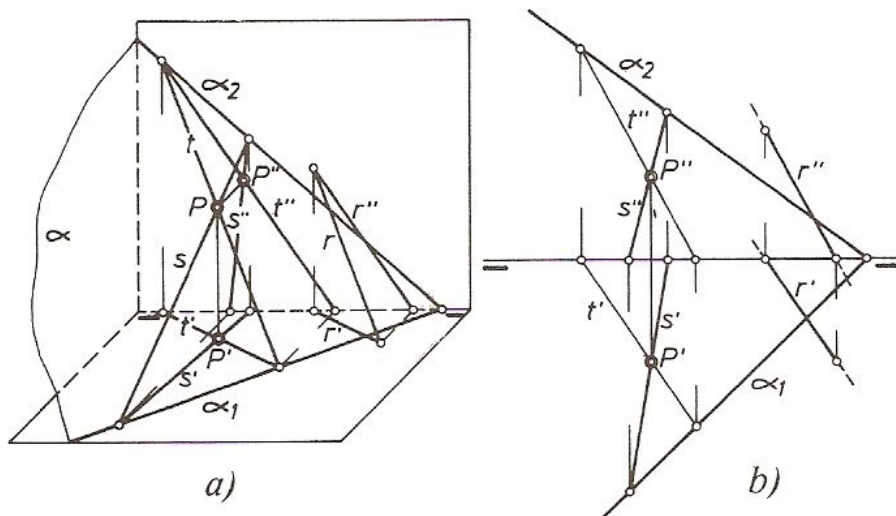
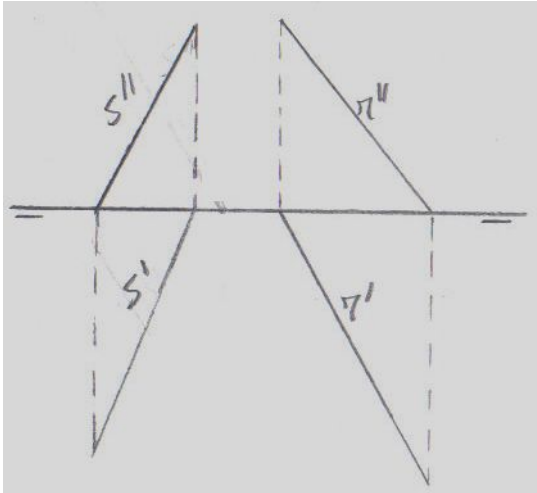
O problema quedaría definido cunha única solución se tivéssemos que trazar por unha recta dada un plano paralelo a outra recta dada. A continuación estudiaremos este caso.

Trazar pola recta s un plano paralelo a r .

O problema resólvese cortando a recta s cunha recta t paralela a r .

(Recordemos que: *unha recta é paralela a un plano cando é paralela a unha recta contida nese plano*).

A recta t é paralela a r . Ao cortarse as dúas rectas, s e t , definen un plano –plano paralelo á recta r .



3. PERPENDICULARIDADE

Os casos que se poden presentar son:

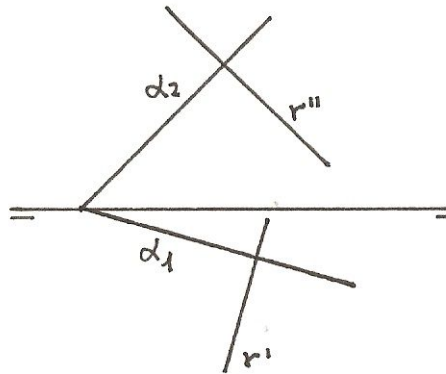
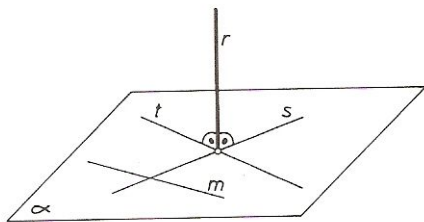
- Recta perpendicular a un plano e inverso.
- Recta perpendicular a recta.
- Plano perpendicular a plano.
- Plano perpendicular a outros dous.

a) Recta perpendicular a un plano e inverso.

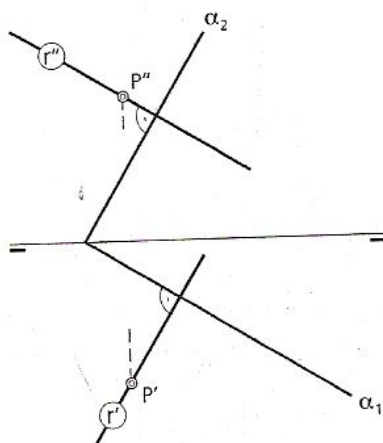
Unha recta perpendicular a un plano é perpendicular a todas as rectas contidas nese plano.

As trazas do plano son dúas rectas do plano, polo tanto, en proxeccións diédricas unha recta perpendicular a un plano terá r' perpendicular a α_1 e r'' perpendicular a α_2 .

As trazas dun plano α perpendicular a unha recta r proxéctanse perpendiculares ás proxeccións da recta.

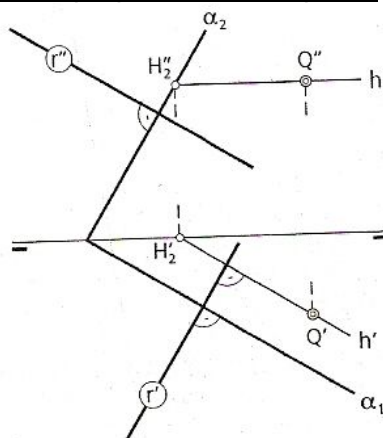


Recta perpendicular a α por P



O problema resólvese trazando polo punto $P (P', P'')$, unha recta r perpendicular a α : r' perpendicular a α_1 e r'' perpendicular a α_2 .

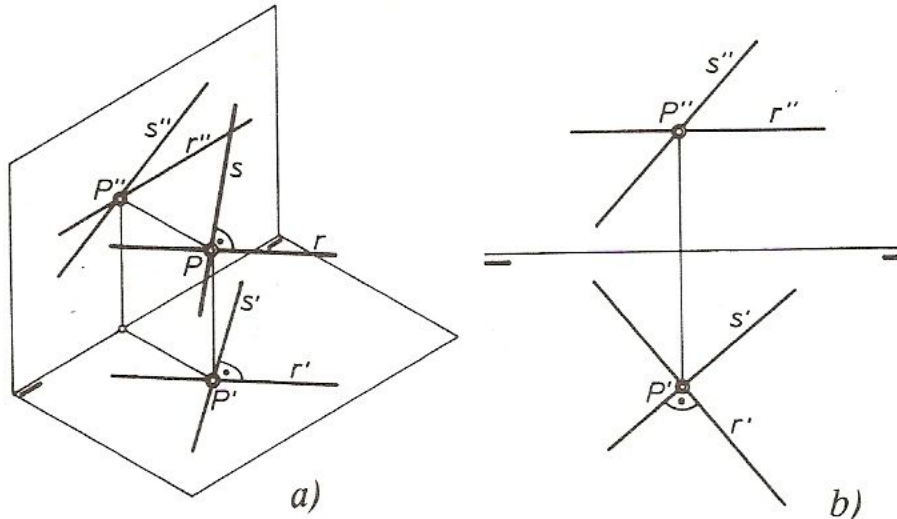
Plano perpendicular a r por Q



Resolvemos o problema inverso trazando unha recta horizontal ou frontal polo punto Q dado. A continuación, contemos a recta h nun plano α perpendicular á recta r .

b) Recta perpendicular a recta.

En xeral dúas rectas perpendiculares no espazo proxéctanse como dúas rectas oblicuas. Únicamente se unha das rectas é paralela a un dos planos de proxección as proxeccións de ambas sobre éste serán paralelas.

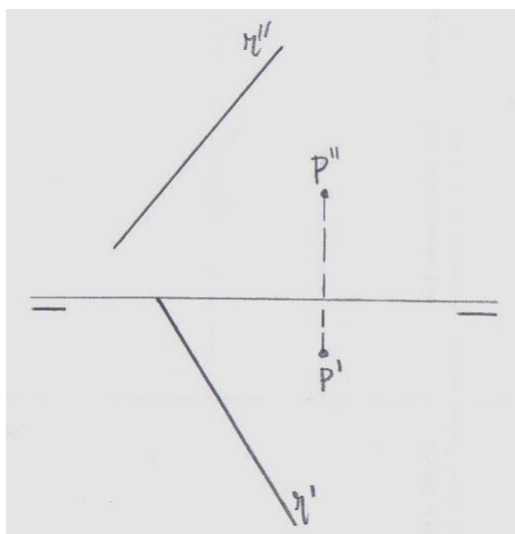


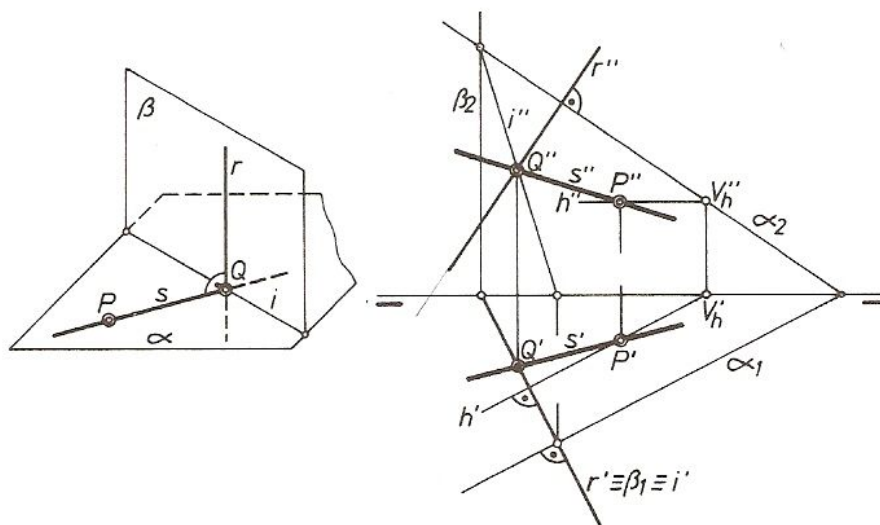
As rectas **r** e **s** son perpendiculares no espazo e proxéctanse perpendiculares sobre **PH** por ser a recta **r** paralela ao **PH**.

Trazar polo punto **P** unha recta perpendicular a **r**

Para resolver o problema trazamos polo punto **P** un plano α perpendicular a **r** (Para isto temos que pasar unha frontal ou horizontal perpendicular a **r** polo punto **P**, e conter a recta trazada **h** nun plano α perpendicular á recta **r**).

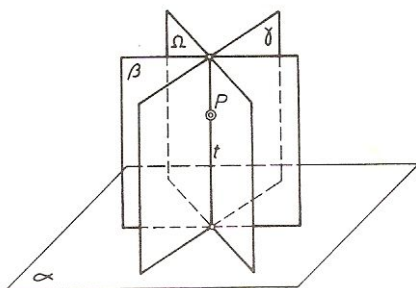
A continuación, atopamos o punto de intersección entre α e **r** = **Q** (Para isto contemos a recta **r** nun plano proxeccionante β , a recta intersección, **i**, de α con β córtase coa recta **r** no punto **Q**, punto de intersección de α e **r**). Unindo **P** con **Q** temos a solución.





c) Plano perpendicular a plano.

Dous planos son perpendiculares entre si cando un deles contén unha recta perpendicular ao outro.



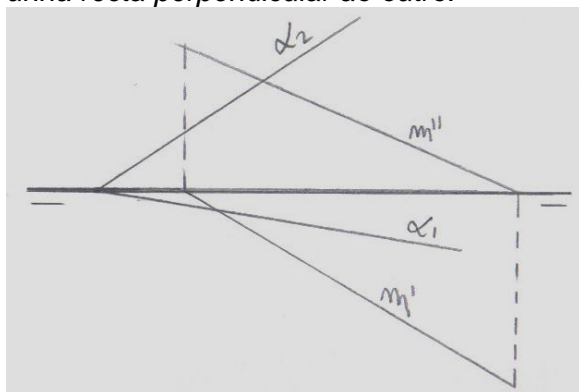
Como podemos ver todos os planos que pasan pola recta t (recta perpendicular a α) son perpendiculares ao plano α .

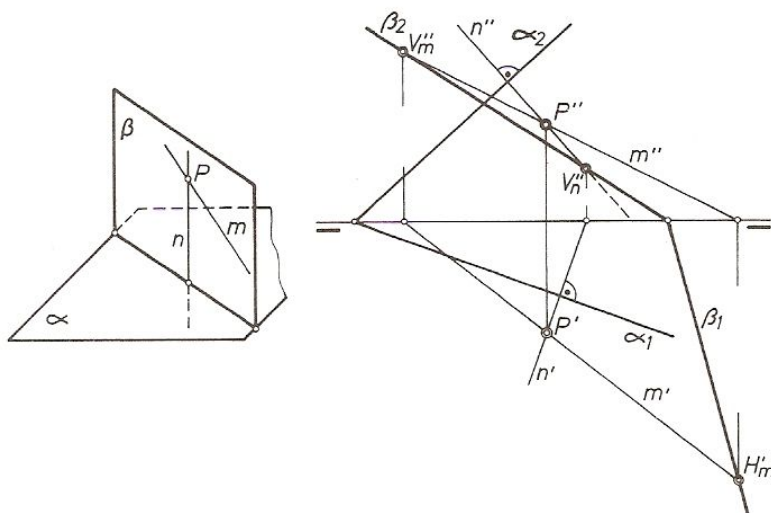
O problema de trazar un plano perpendicular a α por un punto P , tería infinitas solucións, porque teríamos que trazar por ese punto unha recta perpendicular a α e por esa recta pasarían infinitos planos

O problema quedaría definido cunha única solución, se nos dan unha recta do plano solución, xa que por unha recta dada, non perpendicular a un plano dado, sólo pasa un plano perpendicular a éste.

Trazar por m un plano perpendicular a α

Recordemos que: *dous planos son perpendiculares entre si cando un deles contén unha recta perpendicular ao outro.*



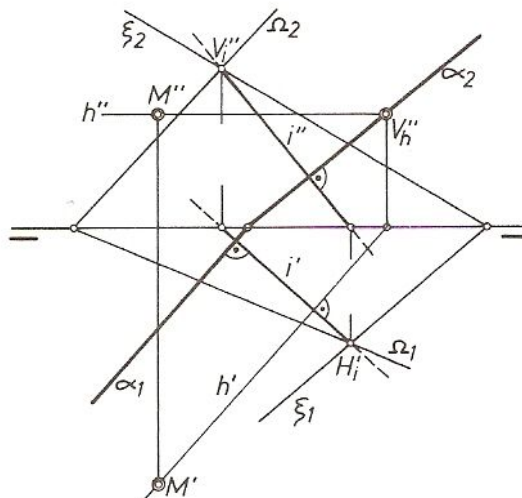
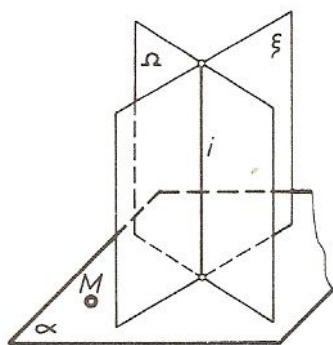
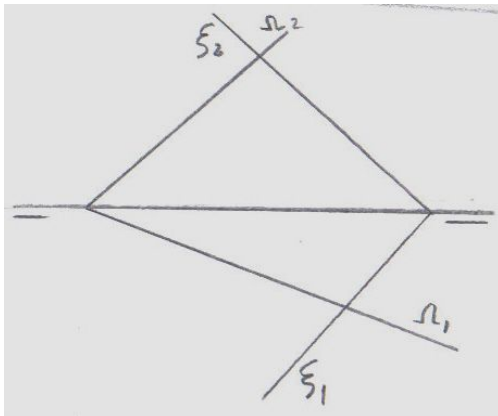


O problema resólvese trazando unha recta n que corte a m e sexa perpendicular ao plano α .

As rectas n e m definen ao plano β perpendicular a α .

d) Plano perpendicular a outros dous.

Un plano é perpendicular a outros dous cando é perpendicular á recta de intersección entre ambos.



4. DISTANCIAS

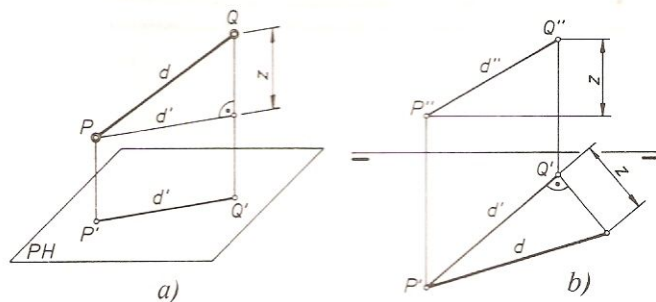
Falar de distancias é referirse á mínima distancia ou a verdadeira magnitude entre dous elementos xeométricos (puntos, rectas ou planos).

As distancias son unha aplicación directa da perpendicularidade e os casos que se poden presentar son:

- Entre dous puntos
- Entre un punto e unha recta
- Dun punto a un plano
- Entre dúas rectas paralelas
- Entre dous planos paralelos

a) Distancia entre dous puntos

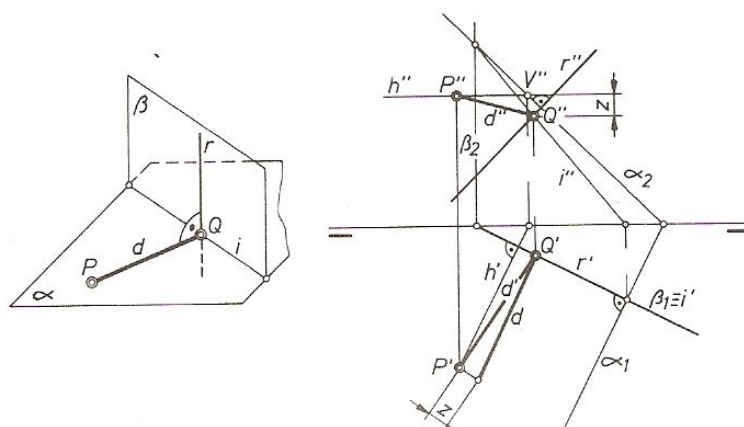
A distancia entre dous puntos dados polas súas proxeccións non está en verdadeira magnitude a non ser que o segmento que os une sexa paralelo a un dos planos de proxección.



A distancia d é a hipotenusa dun triángulo rectángulo cuíros catetos son: a proxección de d (d' ou d'') a diferenza de cotas z , coma neste caso, ou a diferenza de alonxamentos.

b) Distancia entre un punto e unha recta

Para determinar a distancia entre un punto P e unha recta r temos que trazar por P un plano perpendicular a r e atopar a intersección deste plano coa recta. Unindo o punto de intersección Q con P determinaremos a distancia entre o punto P e a recta dada.



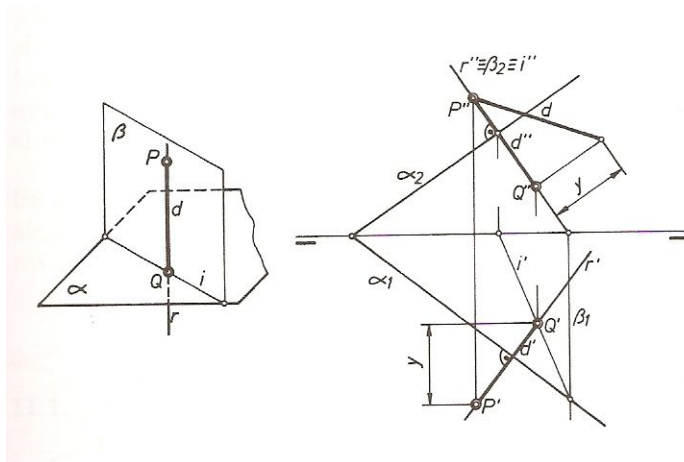
En proxeccións diédricas o proceso é o seguinte:

- Trazamos por P un plano α perpendicular a r mediante a recta horizontal h .
- Determinamos a intersección de α e r contendo á recta r nun plano proxeccionante β . A intersección i entre α e β corta a r no punto Q .

- Unindo Q con P temos a distancia buscada. Para determinar a verdadeira magnitude operamos como no caso anterior de distancia entre dous puntos.

c) Distancia dun punto a un plano

A distancia dun punto **P** a un plano **α** é o segmento **PQ** perpendicular a **α** .

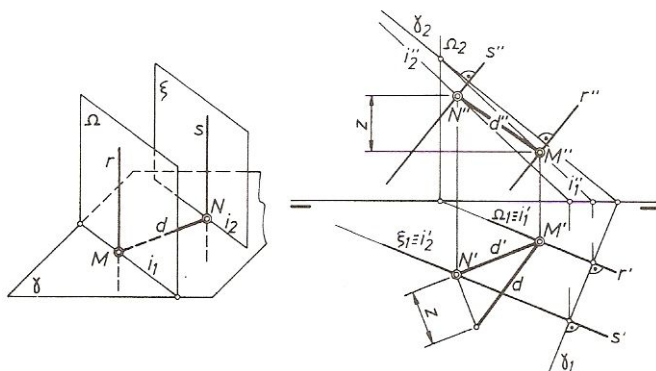


Resolvemos o problema en diédrico da maneira seguinte:
 - Trazamos por **P** a recta perpendicular **r** ao plano **α** .
 - O paso seguinte é determinar o punto **Q** de intersección entre a recta **r** e o plano **α** , facendo pasar por **r** un plano auxiliar **β** , proxeitante vertical, que corta ao plano **α** según a recta **i**. Onde a recta **i** corta á recta **r** temos o punto **Q**.

Coñecido o punto **Q**, determinamos a distancia entre os puntos **P** e **Q** para achar a verdadeira magnitude da distancia entre o punto **P** e o plano **α** .

d) Distancia entre dúas rectas paralelas

A distancia entre dúas rectas paralelas **r** e **s** será o segmento **MN** perpendicular a ambas.

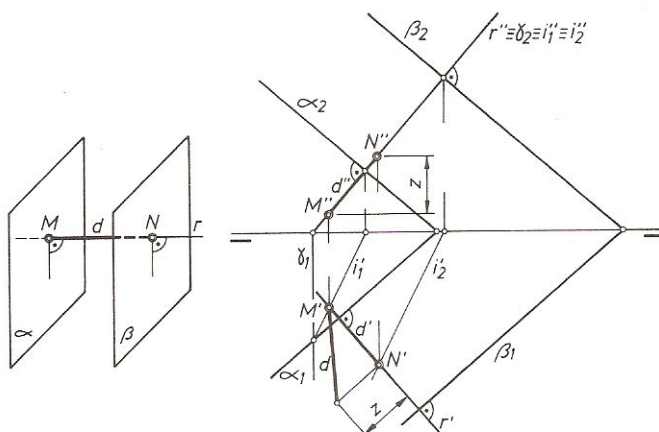


En diédrico resolvemos o problema trazando un plano **γ** perpendicular as dúas rectas (**γ_1** perpendicular a **s'** e **r'** e **γ_2** perpendicular a **s''** e **r''**), e despois atopando a intersección deste plano coas dúas rectas contendo as rectas en dous planos auxiliares **Ω** e **ξ** proxeitantes horizontais. Por último, determínanse os puntos **M** e **N** de intersección do plano **γ** con cada unha das rectas.

As proxeccións da distancia son **d'** e **d''** e verdadeira magnitude o segmento **d**.

e) Distancia entre dous planos paralelos

A distancia entre dous planos paralelos é un segmento perpendicular a ambos



- Trazamos unha recta **r** perpendicular aos dous planos.
 - Determinamos a intersección da recta **r** cos planos **α** e **β** contendo á recta **r** nun plano auxiliar. A intersección do plano auxiliar **γ** con **α** e **β** son dúas rectas paralelas **i_1** e **i_2** .
 - Estas rectas cortan a **r** nos puntos **M** e **N**, unindo estes

dous puntos temos a distancia buscada.

Para determinar a verdadeira magnitude do segmento procedemos como nos casos anteriores.

5. ABATEMENTOS

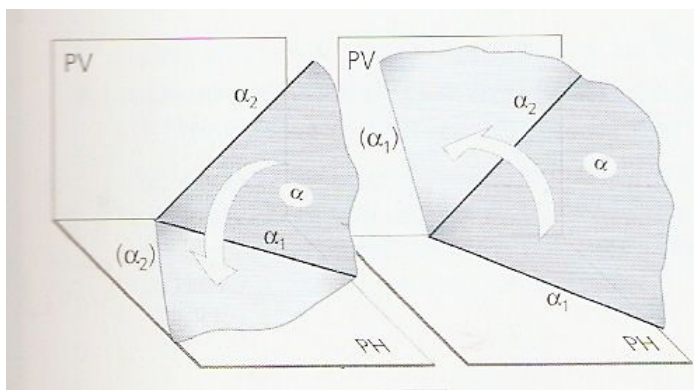
O abatemento é un procedemento empregado para obter formas planas en verdadeira magnitude (Cando falamos de verdadeira magnitude referímonos á figura tal e como é, no espazo, sen a deformación que sofre a maioría das veces ao proxectarse nos planos de proxección).

O obxectivo do abatemento é poder apreciar en verdadeira magnitude unha forma plana contida nun plano oblicuo, para poder realizar medicións sobre ela (lonxitudes, distancias, ángulos) ou os trazados que interesen (mediatrices, bisectrices).

Por outra parte, partindo do coñecemento da figura en verdadeira magnitude podemos atopar as súas proxeccións, facendo un desabatemento.

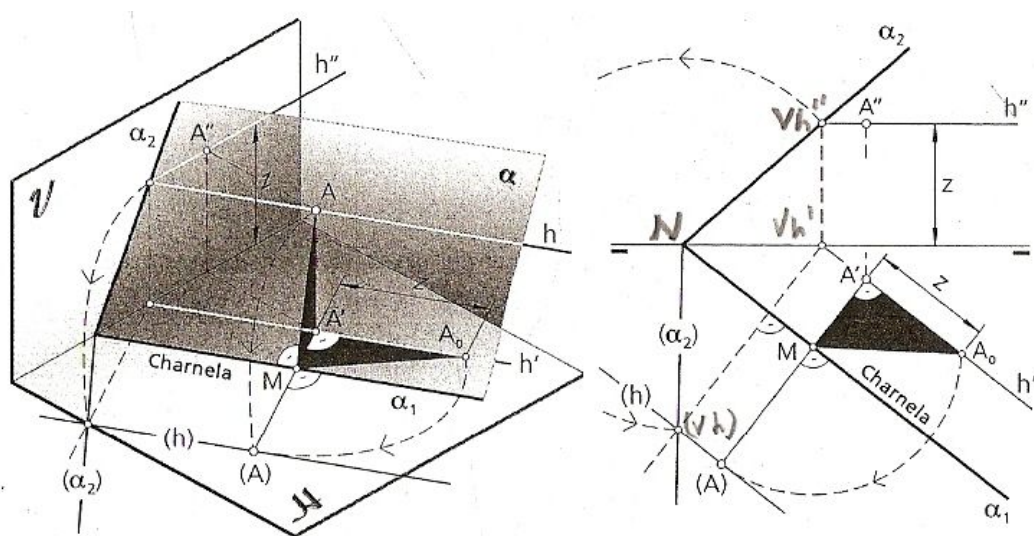
Abatir un plano sobre un plano de proxección consiste en xirar o plano ao redor da recta intersección co plano de proxección e facelo coincidir con éste.

Se abatimos o plano sobre o PH xiraremos o plano sobre a súa traza horizontal e se o abatimos sobre PV, sobre a súa traza vertical. A traza ao redor da que xira o plano chámase **charnela**.



Sempre se abaten planos, as expresións de abatir un punto, unha recta... carecen de exactitude, pero empréganse estas expresións pola súa comodidade. Sen embargo, enténdese que o que abatimos é o plano que contén a estes elementos.

a) Abatemento dun punto, dunha recta e un plano



Consideremos un punto **A** contido nun plano α :

-No espazo para abatir o punto facemos centro en **M** con radio **MA** (hipotenusa do triángulo rectángulo **A'A₀M**).

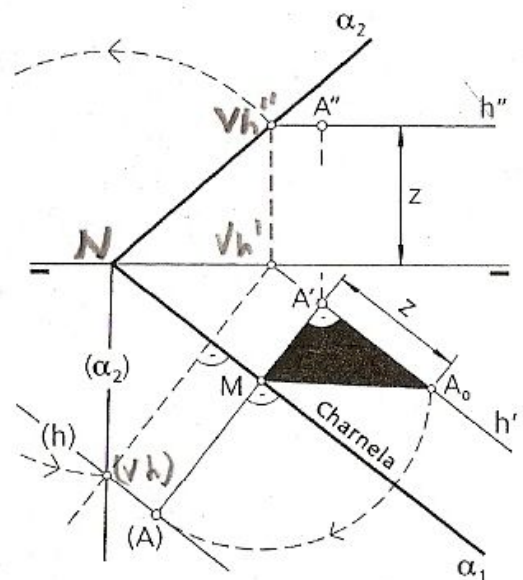
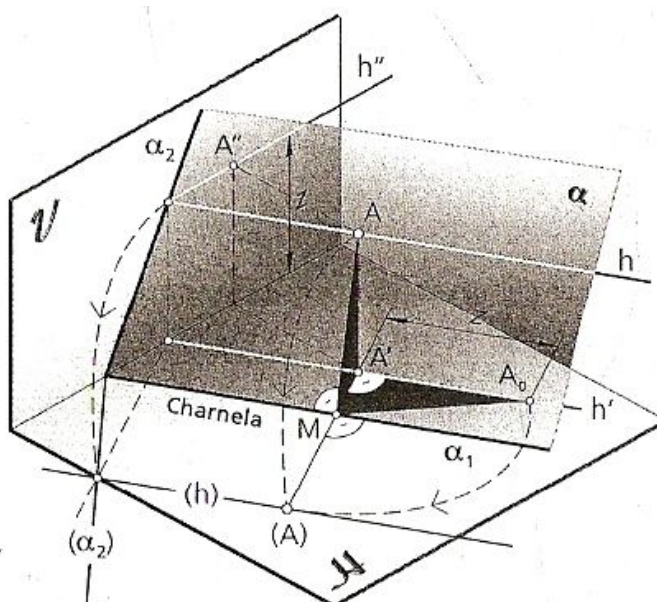
-En diédrico os pasos a seguir para abatir un punto son:

1º) O primeiro que faremos será conter o punto nun plano, cando o punto non estea contido nun plano. Para isto trazamos polo punto **A** unha recta horizontal ou frontal e, a continuación, contemos a recta nun plano α .

2º) Levamos sobre a proxección horizontal, **h'**, da recta horizontal **h**, desde **A'** á dereita, a cota **z** do punto **A** que queremos abatir.

3º) Por **A'** trazamos unha liña perpendicular á charnela α_1 . Esta liña cortará á charnela no punto **M**.

4º) Pinchamos co compás no punto **M** e con radio **MA₀**, trazamos un arco que cortará á liña perpendicular trazada por **A'** no punto **A** abatido, (**A**).



Para abatir unha recta contida nun plano, basta con abatir dous dos seus puntos.

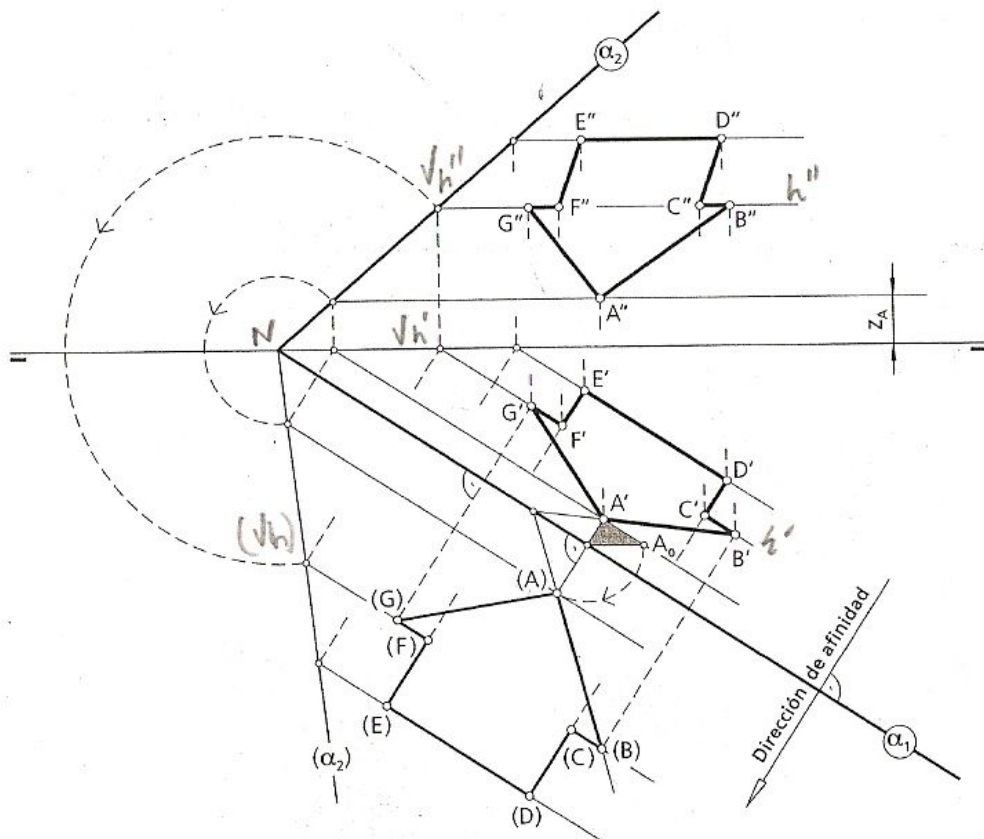
O máis cómodo é abatir as súas trazas (as trazas da recta son puntos).

Consideremos a recta horizontal **h** contida no plano α ; para abater a traza vertical **Vh** da recta **h**:

Facemos centro no punto **N** (punto onde se cortan α_1 e α_2 na **LT**), abrimos o compás ata a traza vertical **Vh''** da recta e trazamos un arco que cortará á liña perpendicular á charnela trazada por **Vh'** no punto **Vh** abatido (**Vh**).

Ao unir (**Vh**) co punto **N** (onde se cortan as trazas do plano en liña de terra), obteremos a traza vertical do plano abatida (α_2). Polo tanto, para abatir un plano teremos que abatir primeiro as trazas dunha recta contida nel. O máis cómodo é abatir unha recta horizontal ou frontal do plano.

d) Abatimento dunha figura plana



O procedemento xeral para abatir unha figura plana é o de abatir os puntos e rectas da figura, así como o plano que a contén. Mediante horizontais de plano e perpendiculares á charnela desde as proxeccións horizontais imos obtendo os puntos abatidos.

Sexa a figura **ABCDEFGH** dada polas súas proxeccións diédricas, queremos obter a súa verdadeira magnitude e forma. O procedemento a seguir é o seguinte:

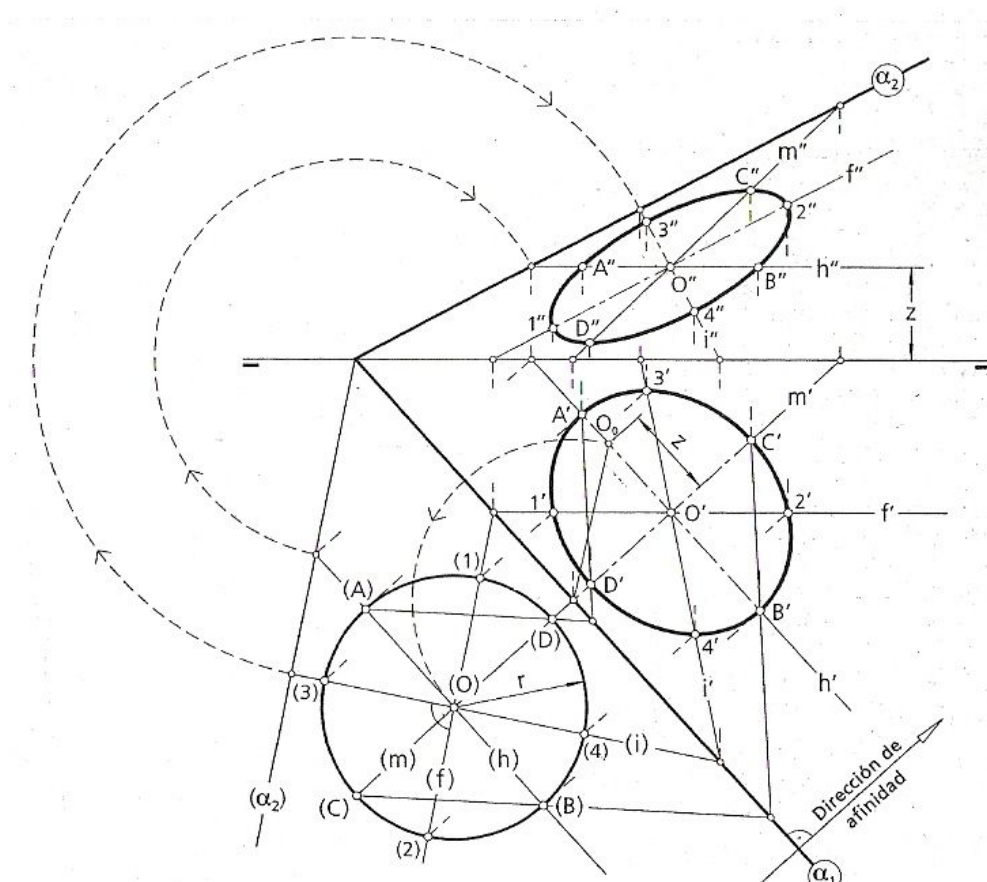
- 1º) Trazamos rectas horizontais polos puntos.
- 2º) Abatimos α_2 aproveitando unha destas horizontais, por exemplo a recta **h**. Facemos centro no punto **N** da **LT** onde se cortan α_2 e α_1 ata a proxección **Vh''**. Onde o arco trazado corte á perpendicular á charnela trazada dende **Vh'** teremos **(Vh)**. Unindo este punto con **N** temos (α_2) .
- 3º) Desde **(Vh)** trazamos unha recta paralela á charnela, esta paralela é á recta horizontal abatida, en verdadeira magnitude.
- 4º) Da mesma maneira abatimos as demais rectas horizontais: Trazamos rectas horizontais que conteñan aos puntos da figura e estas determinarannos o plano que contén á figura, a continuación, abatemos a traza vertical do plano, (α_2) , e trazamos liñas perpendiculares á charnela por todos os puntos onde as proxeccións horizontais das rectas cortan á liña de terra. Estas liñas perpendiculares a charnela cortarán á traza vertical do plano abatida nas trazas verticais das rectas abatidas, e por estes puntos traza abatidos trazaremos paralelas á charnela que se cortarán coas perpendiculares á charnela, trazadas polas proxeccións horizontais dos puntos, nos puntos abatidos.

Outro método empregado para abatir figuras é a **afinidade** xa que axiliza moito o trazado. Entre a proxección horizontal dunha figura e o seu abatimento sobre o plano horizontal ou entre a proxección vertical e o seu abatimento sobre o plano vertical, existe unha relación de **afinidade ortogonal**.

- O **eixo de afinidade**: **charnela** (α_1 ou α_2)
- A **dirección de afinidade**: perpendicular a la charnela.
- **Dous puntos afíns**: a proxección horizontal ou vertical dun punto e o seu abatido. Por exemplo A' e (A) .

Para usar o procedemento de **afinidade** necesitamos abatir un punto polo método xeral. Por exemplo o punto **A** (ver abatimento dun punto).

e) Desabatimento dunha figura plana



Sexa o plano α que conten unha circunferencia da que coñecemos o seu centro e o seu radio:

Datos: α ($\alpha_1 - \alpha_2$) e O ($O' - O''$)

1º) Trazamos unha recta horizontal por O e a abatemos xunto co punto O e traza α_2 do plano.

2º) Unha vez temos (O) podemos facer centro co compás e debuxar a circunferencia en verdadeira magnitude.

3º) Dividimos a circunferencia trazando algúns diámetros, neste caso xa temos a recta **h** (horizontal) e trazamos algunha máis como: recta **m** perpendicular á charnela (**de máxima pendiente**), recta **f** (**frontal**) e a recta **i** (**máxima inclinación**).

4º) Desabatimos utilizando o procedemento de afinidade, por exemplo comezamos unindo **(3)**, **(O)** e **(4)** levándoos ata a charnela ou eixo de afinidade e unindo esta recta co punto afín de **(O)**, o punto **O'**, onde esta recta corte as perpendiculares trazadas dende **(3)** e **(4)** estarán os seus afines **3'** e **4'**. O procedemento a seguir cos demais puntos é igual.

5º) Unha vez debuxada a proxección horizontal debuxamos a vertical.