

## Unidade 7: Magnitudes, medidas e erros

### Índice contidos

#### 1. MAGNITUDES E DIMENSIÓNS

- 1.1. Magnitudes fundamentais e derivadas
- 1.2. Magnitudes escalares e vectoriais
- 1.3. Operacións con vectores

#### 2. O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

#### 3. MEDIDAS DE MAGNITUDES

- 3.1. Medidas directas
- 3.2. Medidas indirectas
- 3.3. A notación científica

#### 4. ERROS NA MEDIDA

- 4.1. Aproximación ao valor real
- 4.2. Erro absoluto e erro relativo

#### 5. REPRESENTACIÓNS GRÁFICAS

- 5.1. Magnitudes directamente proporcionais
- 5.2. Magnitudes inversamente proporcionais
- 5.3. Magnitudes relacionadas por outras funcións matemáticas

### 1. MAGNITUDES E DIMENSIÓNS

**Unha magnitude física é toda propiedade que poida ser medida.** Pódese medir a masa dun corpo, a lonxitude, a densidade, etc.

Pola súa propia definición, as magnitudes clasifícanse en fundamentais e derivadas. Se atendemos á súa natureza, tamén as podemos clasificar en magnitudes escalares e vectoriais.

#### 1.1. Magnitudes fundamentais e derivadas

**Existen unhas magnitudes que serven de referencia (magnitudes fundamentais) e todas as demais defínense en función delas (magnitudes derivadas).**

En mecánica as magnitudes fundamentais son a lonxitude, a masa e o tempo. Todas as demais como a velocidade, a aceleración, a forza, etc. defínense en función dalgunhas ou de todas as fundamentais.

Así mesmo, en electricidade a magnitude fundamental é a intensidade de corrente, en termodinámica a temperatura, en óptica a intensidade luminosa e en química a cantidade de substancia.

### ***Ecuación de dimensións***

Como acabamos de dicir, as magnitudes derivadas defínense en función das fundamentais. Pois ben, unha **ecuación de dimensións é a expresión matemática desta definición**.

Esta ecuación obtense partindo de fórmulas que relacionan as magnitudes en cuestión, ou outras que, á súa vez, se relacionen con elas.

En xeral, as ecuacións de dimensións escríbense seguindo unhas normas:

- as magnitudes fundamentais exprésanse en letras maiúsculas;
- non se utilizan fraccións: os termos que puidesen aparecer no denominador pasan ao numerador cambiando o signo do seu expoñente;
- os termos constantes, se existen, desprézanse xa que estes non afectan ás dimensións;
- a magnitude derivada, unha vez despexada, escríbese entre corchetes.

Vexamos isto cuns sinxelos exemplos:

1. Cal é a ecuación de dimensións da velocidade?

$$\text{velocidade} = \text{espazo percorrido} / \text{tempo empregado}$$

*O espazo mídese pola súa lonxitude que é unha magnitude fundamental e o tempo tamén o é. Seguindo as regras que acabamos de indicar, podemos escribir directamente a ecuación de dimensións da velocidade:*

$$[v] = L \cdot T^{-1}$$

2. Cal é a ecuación de dimensións da forza?

$$F = m \cdot a = m \cdot v/t = m \cdot (s/t)/t = m \cdot s/t^2$$

*Fomos utilizando as fórmulas axeitadas ata expresar a forza en función de magnitudes fundamentais, agora soamente queda escribir a ecuación de dimensións segundo os criterios antes indicados:*

$$[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

Toda ecuación física debe ser dimensionalmente correcta, é dicir, os dous membros da ecuación han de ter as mesmas dimensións. No caso contrario, non sería homoxénea e os resultados obtidos non terían sentido; sería como obter o resultado do cálculo dunha velocidade en quilogramos.

## 1.2. Magnitudes escalares e vectoriais

Existen **magnitudes** como a masa, o tempo ou a enerxía **nas que soamente necesitamos coñecer o seu valor numérico e a unidade en que se expresa para que estean perfectamente determinadas**, estas **son magnitudes escalares**. Tamén hai outras, chamadas **magnitudes vectoriais**, como a velocidade ou a forza, que **para determinalas sen ambigüidade é necesario coñecer non soamente o seu valor numérico, senón tamén a súa dirección e o seu sentido**.

Estas magnitudes escríbense colocando unha frecha enriba da letra que as identifica ( $\vec{A}$ ) e represéntanse graficamente por un vector que é un segmento orientado no que hai que considerar a orixe, a dirección, o sentido e o módulo ou lonxitude.

- A **orixe** ou punto de aplicación é o punto onde actúa a magnitude.
- A **dirección** é a recta na que está apoiado o vector (p. ex. O-E)
- O **sentido** é cara onde actúa o vector (p. ex., cara o leste)
- O **módulo** é a lonxitude do mesmo, que nos dá idea do seu valor.



Figura 1: Elementos dun vector

Para representar o módulo dun vector, escríbese entre dúas barras verticais  $|\vec{A}|$ .

Habitualmente, os vectores represéntanse nun sistema de coordenadas cartesianas, que se compón de dous eixes, perpendiculares entre si, cando a representación se realiza nun plano (dúas dimensións) ou de tres eixes cando se teñen en conta as tres dimensións do espazo. Neste sistema un vector caracterízase polas súas compoñentes cartesianas que son as proxeccións do extremo do vector sobre os eixes cartesianos.

Para facilitar a expresión matemática dun vector utilízanse os vectores unitarios ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) que son vectores de lonxitude a unidade e de dirección a correspondente aos eixes X, Y e Z respectivamente. Deste modo, un vector con compoñentes cartesianas  $A_x, A_y, A_z$ , exprésase:  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$

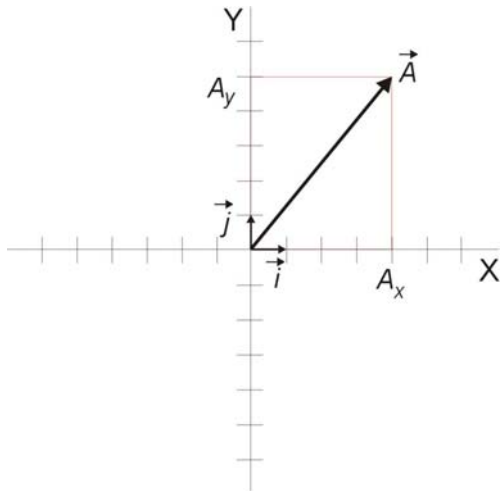


Figura 2: Representación dun vector en dúas dimensións  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$

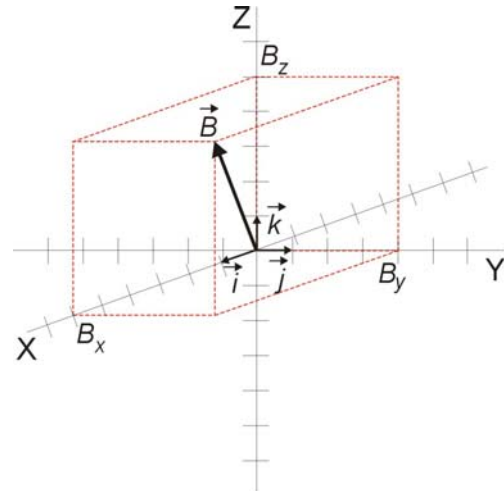


Figura 3: Representación dun vector en tres dimensións  $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$

Na figura 2 podemos ver representado no plano o vector  $\vec{A}$  con compoñentes  $A_x$  e  $A_y$ , de valor 4 e 5 respectivamente. E na figura 3, o vector  $\vec{B}$ , de compoñentes  $B_x=6$ ,  $B_y=4$  e  $B_z=5$  representado nas tres dimensións do espazo.

É doado demostrar, baseándose no teorema de Pitágoras, que o módulo dun vector en función das súas compoñentes vén dado pola expresión:  $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

### 1.3. Operacións con vectores

#### Suma

##### a) Vectores coa mesma dirección

Os dous vectores a sumar poden ter o mesmo sentido ou o contrario. No primeiro caso, o resultado é outro vector coa mesma dirección e o mesmo sentido, e de módulo igual á suma dos módulos dos sumandos.



Figura 4: Suma de vectores coa mesma dirección e sentido

No segundo caso, o resultado é un vector coa mesma dirección, sentido o do maior dos sumandos e de módulo a diferenza dos módulos.



Figura 5: Suma de vectores coa mesma dirección e sentido contrario

### b) Vectores con distinta dirección

Se a orixe dun vector coincide co extremo do outro, o resultado da suma é sinxelamente outro vector que vai dende a orixe do primeiro ata o extremo do segundo.

Se teñen a mesma orixe, utilízase a regra do paralelogramo que consiste en trazar polo extremo de cada un deles unha paralela ao outro formando un paralelogramo. A suma dos dous vectores é outro vector que coincide coa diagonal do paralelogramo e ten a mesma orixe que os sumandos.

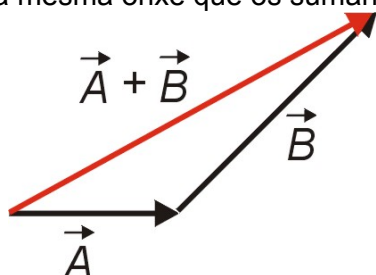


Figura 6: Suma de vectores con distinta dirección

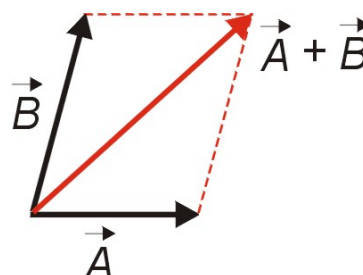


Figura 7: Suma de vectores. Regra do paralelogramo

Analiticamente para sumar dous vectores súmanse os seus compoñentes. Por exemplo, dados os vectores  $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$  e  $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$ , o vector suma de ambos dous será:  $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$

### Resta

Para restar un vector doutro, súmaselle ao minuendo o oposto do subtraendo. O vector oposto a un dado é outro vector coa mesma dirección, o mesmo módulo e de sentido contrario.

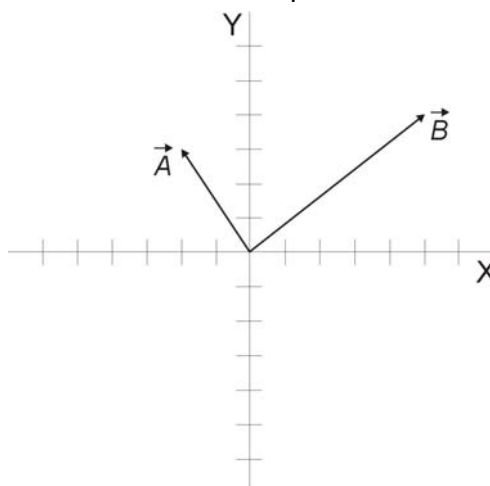


Figura 8: Vectores opostos

Se queremos realizar a operación  $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$ , en realidade o que facemos é  $\vec{C} = \vec{B} + (-\vec{A})$ . Así pois a operación de restar é igual que a de sumar, unha vez obtido o vector oposto do subtraendo.

Exemplo: Dados os vectores da figura:

- a) Exprésaos analiticamente e realiza as operacións  $\vec{A} + \vec{B}$  e  $\vec{A} - \vec{B}$

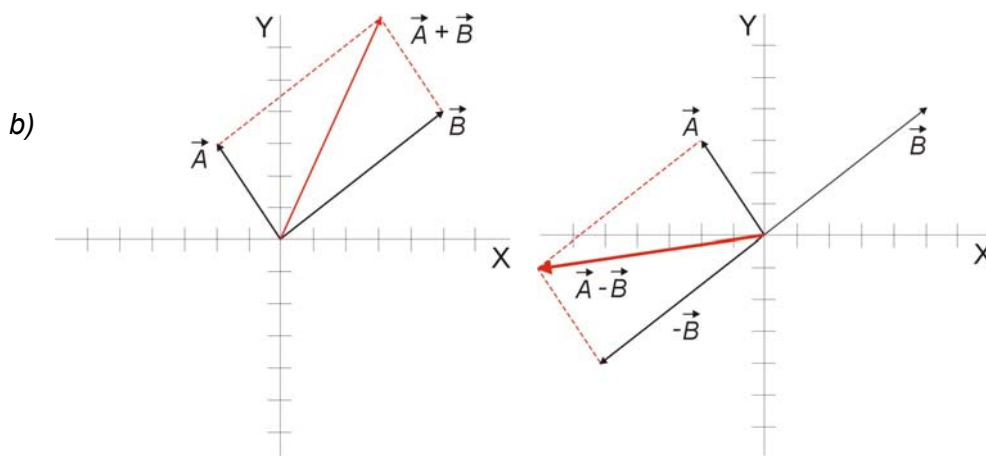


b) Realiza graficamente as operacións anteriores.

c) Acha o módulo de  $\vec{A} + \vec{B}$  e de  $\vec{A} - \vec{B}$

Solución:

a)  $\vec{A} = -2\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{B} = 5\vec{i} + 4\vec{j}; \vec{A} + \vec{B} = 3\vec{i} + 7\vec{j}; \vec{A} - \vec{B} = -7\vec{i} - \vec{j}$



c)  $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = 7,6; |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = 7,1$

### Produto dun vector por un escalar

O resultado é outro vector da mesma dirección, de módulo igual ao produto do escalar polo módulo do vector, e o seu sentido é o mesmo se o escalar é positivo e o contrario se este é negativo.



Figura 9: Produto dun vector por un escalar

Analiticamente, o resultado é o de multiplicar polo escalar cada un dos seus compoñentes. Así, se queremos multiplicar o vector  $\vec{A}$  polo escalar  $c$ , o resultado será:  
 $c \cdot \vec{A} = c \cdot A_x \vec{i} + c \cdot A_y \vec{j} + c \cdot A_z \vec{k}$

### Produto escalar de dous vectores

Represéntase polo signo " $\cdot$ " entre os dous vectores e o resultado é un escalar de valor igual ao produto dos módulos dos vectores polo coseno do ángulo que forman as súas direccións.



Figura 10: Produto escalar de dous vectores

Tamén pode definirse como o produto do módulo dun vector pola proxección do outro sobre el. Se observamos a figura anterior podemos comprobar que a proxección de  $\vec{A}$  sobre  $\vec{B}$  vale precisamente  $|\vec{A}| \cdot \cos \alpha$ .

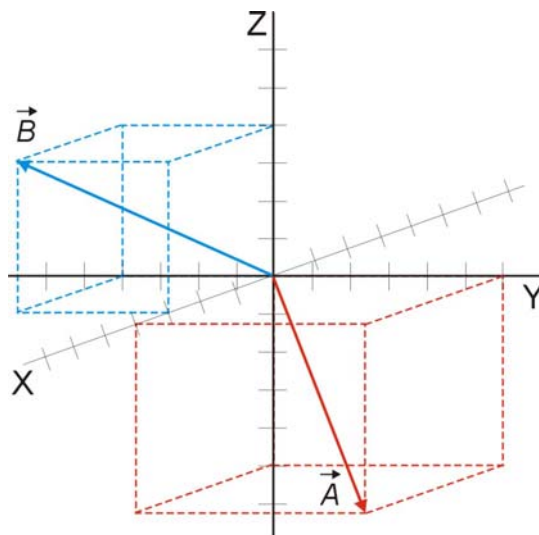
Analiticamente, o resultado obtense multiplicando as súas compoñentes homólogas; así o resultado de multiplicar  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  será:  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Exemplo: Dados os vectores  $\vec{A} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}$  e  $\vec{B} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$  :

- Representáaos graficamente nun sistema de eixes cartesianos.
- Atopa a expresión do vector  $\vec{C} = \vec{A} + 2\vec{B}$
- Realiza o seu produto escalar  $\vec{A} \cdot \vec{B}$
- Que ángulo forman entre si?

Solución:

a)



b)

$$\vec{C} = \vec{A} + 2\vec{B} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k} + 6\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k} = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$c) \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) + (-5) \cdot 4 = 12 - 24 - 20 = -32$$

d) Sabemos que  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$ ; despexando:  $\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$

Fáltanos por coñecer  $|\vec{A}|$  e  $|\vec{B}|$ :  $|\vec{A}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 5^2} = 8,77$ ;

$|\vec{B}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6,40$  Polo tanto  $\cos \alpha = (-32)/(8,77 \cdot 6,40) = -0,57$

$\alpha = \arccos(-0,57) = 124,75^\circ = 124^\circ 45'$

## Produto vectorial

Representábase polo signo "x" entre os dous vectores e o resultado é un vector de módulo igual ao produto dos módulos polo seno do ángulo que forman. A súa dirección é perpendicular ao plano que determinan os dous vectores e o sentido determínase pola regra do parafuso, segundo a cal o sentido do vector produto sería o de avance dun parafuso que xirase para facer coincidir o primeiro vector co segundo.

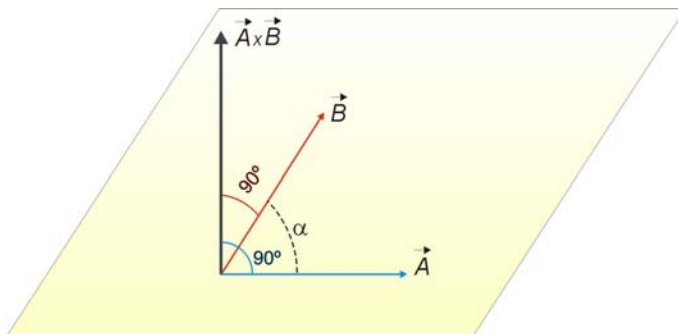


Figura 11: Produto vectorial de dous vectores

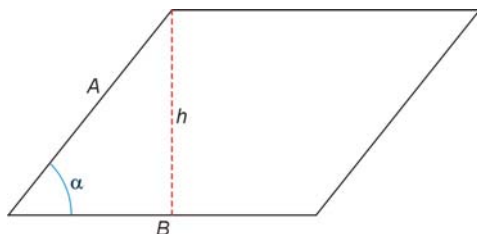


Figura 12: Superficie dun paralelogramo

Se temos un paralelogramo de lados A e B, o valor da superficie é o produto da base pola altura, pero a altura vale  $h = A \cdot \sin \alpha$ , polo tanto:  $S = A \cdot B \cdot \sin \alpha$

Segundo isto, o módulo do produto vectorial de dous vectores representa a superficie do paralelogramo que definen.

Para obter analiticamente o resultado do produto vectorial é necesario coñecer o cálculo con matrices que se estudará no curso seguinte. Así pois, por agora, é suficiente coñecer -e recordar- o sentido físico deste produto xa que é fundamental para a comprensión de determinados fenómenos de importancia transcendental na física.

## 2. O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Un sistema de unidades é un conxunto consistente a partir do cal se derivan todas as demais unidades.

En España, a Lei 3/1985 determina como as Unidades Legais de Medida as do Sistema Internacional de Unidades adoptado pola Conferencia Xeral de Pesos e Medidas. Estas unidades quedaron establecidas no Real Decreto 1317/1987.

Unha unidade é un patrón que serve para medir o valor dunha magnitude e polo tanto debe estar perfectamente definida e ser reproducíble en calquera lugar. Ademais deben estar definidos os seus múltiplos e submúltiplos para poder expresar o resultado da medida polo número de unidades e a fracción de unidade que contén.

As unidades básicas, correspondentes a magnitudes fundamentais, teñen unha definición propia en función de constantes universalmente coñecidas. As demais defínense en relación a elas.

Magnitude	Unidade	Símbolo
Lonxitude	metro	m
Masa	quilogramo	kg
Tempo	segundo	s
Intensidade de corrente eléctrica	amperio	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidade luminosa	candea	cd
Cantidade de substancia	mol	mol

Existen, ademais, dúas unidades suplementarias que non teñen dimensións e que tamén poden formar parte da definición das unidades derivadas.

Magnitude	Unidade	Símbolo
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereoradián	sr

Magnitudes derivadas e unidades de uso frecuente:

Magnitude	Unidade	Símbolo
Frecuencia	hertz	Hz
Forza	newton	N
Presión	pascal	Pa
Enerxía, traballo	xullo	J
Potencia	vatio	W
Carga eléctrica	culombio	C
Potencial eléctrico	voltio	V
Resistencia eléctrica	ohmio	$\Omega$
Capacidade eléctrica	faradio	F

Existen moitas unidades, pertencentes a magnitudes derivadas, que non teñen un nome específico. Estas exprésanse en función doutras unidades que están relacionadas con elas e que si teñen nome propio, sexan ou non unidades pertencentes a magnitudes fundamentais. Por exemplo: a unidade de velocidade é o metro por segundo (m/s ou  $\text{ms}^{-1}$ ) e a unidade de impulso mecánico (forza por tempo, que estudaremos na Unidade 9) é o newton por segundo (N·s).

Múltiplos decimais		
Prefixo	Símbolo	Factor
Deca	da	$10^1$
Hecto	h	$10^2$
Quilo	k	$10^3$
Mega	M	$10^6$
Xiga	G	$10^9$
Tera	T	$10^{12}$
Peta	P	$10^{15}$
Exa	E	$10^{18}$
Zetta	Z	$10^{21}$
Yotta	Y	$10^{24}$

Submúltiplos decimais		
Prefixo	Símbolo	Factor
deci	d	$10^{-1}$
centi	c	$10^{-2}$
mili	m	$10^{-3}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
pico	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$
atto	a	$10^{-18}$
zepto	z	$10^{-21}$
yocto	y	$10^{-24}$

### ***Regras prácticas para expresar cantidades e unidades***

- Os símbolos das unidades do SI, exprésanse con caracteres romanos e minúsculas, non obstante, se os devanditos símbolos corresponden a unidades derivadas de nomes propios, a súa letra inicial é maiúscula.
- Os símbolos non van seguidos de punto, nin toman o s para o plural.
- O símbolo da unidade segue ao símbolo do prefixo sen espazo.
- O produto dos símbolos de dúas ou máis unidades indícase con preferencia por medio dun punto como símbolo de multiplicación.
- Os nomes das unidades debidos a nomes propios de científicos deben escribirse con idéntica ortografía que o nome destes, pero con minúscula inicial.
- Os nomes das unidades toman unha s no plural, salvo que rematen en s, x ou z.
- Nos números, a coma utilízase só para separar a parte enteira da decimal. Para facilitar a lectura, recoméndase dividir os números en grupos de tres cifras; estes grupos non se separan xamais por puntos nin por comas. A separación en grupos non se utiliza para os números de catro cifras que designan un ano.
- Os múltiplos e submúltiplos decimais das unidades do SI se forman con prefixos que anteceden sen espazo ao símbolo da unidade.

### **Conversión de unidades**

Na práctica, moitas medidas non se expresan en unidades do sistema internacional ou en múltiplos ou submúltiplos delas, debido xeralmente á utilización de aparatos calibrados noutras unidades, por exemplo: o contaquilómetros dun coche dános a lectura en quilómetros por hora, así mesmo, o tempo, segundo a súa duración, exprésase en horas, minutos, etc.

Nestes casos debemos converter as unidades que non pertencen ao SI en unidades deste, xa sexan básicas ou derivadas. Para iso utilizamos os factores de conversión que, en cada caso, é a relación existente entre ámbalas dúas unidades. Así, o factor de conversión de minutos a segundos é de 60; é dicir, 1 min = 60 s.

Como exemplo, imos expresar a velocidade dun automóbil que se move a 72 quilómetros por hora en metros por segundo:

$$72 \text{ km/h} = 72 \text{ km}/1\text{h} = 72\,000 \text{ m}/3600 \text{ s} = 20 \text{ m/s} = 20 \text{ ms}^{-1}$$

## **3. MEDIDAS DE MAGNITUDES**

Sempre que realizamos unha medida obtemos unha información cuantitativa dunha magnitude física. Se queremos dar a coñecer o resultado da nosa medida dun modo coherente, temos que utilizar unha unidade na que expresar o resultado, de modo que sexa interpretable por outras persoas. Podemos dicir que **medir unha magnitude é comparala con outra**, de valor coñecido, **que se toma como unidade**.

Esta comparación realízase utilizando instrumentos de medida que poden ser moi sinxelos como unha regra, un dinamómetro... ou moi complexos como unha balanza electrónica de precisión, un espectrofotómetro... Segundo o instrumento utilizado obtéranse medidas máis ou menos fiables, dependendo das súas calidades:

- Exactitude: A lectura que ofrece o instrumento corresponde ao verdadeiro valor da magnitude medida. Por exemplo, un cronómetro que indique o tempo transcorrido realmente dicimos que é exacto.

- Sensibilidade: Aprecia variacións moi pequenas na magnitude. Por exemplo, un voltímetro que aprecie unha variación dunha milésima de voltio é máis sensible que un que aprecie só centésimas.

- Precisión: Expresa o grao de incerteza no valor medido. Se un aparato de medida é preciso, a súa medida atopase afectada de pouca incerteza. Por exemplo, se un amperímetro aprecia miliamperios o grao de incerteza será de  $\pm 0,001\text{A}$ , e se outro, menos preciso, aprecia centésimas de amperio, o grao de incerteza será de  $\pm 0,01\text{A}$ .

- Fidelidade: Sempre ofrece o mesmo resultado para o mesmo valor da magnitude. Por exemplo, se ao realizar varias medidas cunha balanza para determinar a masa dun corpo obtemos sempre o mesmo valor dicimos que esta é fiel.

### 3.1. Medidas directas

Unha medida é directa cando se obtén por comparación cun patrón calibrado (unha regra, unha pipeta, etc.) ou, máis frecuentemente na actualidade, pola lectura do instrumento de medida utilizado, xa sexa analóxico ou dixital.

#### ***Cifras significativas***

Unha vez realizada a lectura obtemos un número con varias cifras e, neste, as cifras significativas son as que dan idea da exactitude da medida. Para saber cáles son estes nun número calquera, seguiremos as seguintes regras:

Son cifras significativas:

- Todas as cifras distintas de cero.
- Os ceros que se atopen entre dúas cifras significativas.
- Todos os ceros situados á dereita da coma decimal, agás os que a seguen inmediatamente en cantidades menores que a unidade.

Non son cifras significativas:

- Os ceros situados antes da primeira cifra significativa.
- Os ceros situados despois da última cifra significativa, salvo que vaian seguidos da coma decimal ou estean á dereita desta.

Exemplos:

- 60 700 ten tres cifras significativas (6, 0 e 7) xa que os dous ceros do final non están entre cifras significativas.
- 60 700, ten cinco (todas) xa que o último cero vai seguido dunha coma, polo que é unha cifra significativa e en consecuencia os demais ceros tamén o serán.
- 0,0320 ten tres (3, 2 e o último cero). Os dous primeiros ceros non son significativos xa que están situados antes da primeira cifra significativa.
- 15 000 ten soamente dúas (1 e 5) xa que os ceros están despois da última cifra significativa.

A última cifra significativa indícanos a precisión con que se realizou a medida.

Supoñamos que temos unha mesa de lonxitude 0,750 m. Se a medimos cunha regra graduada en centímetros obteremos 0,75 m xa que non podemos apreciar os milímetros; non obstante ao medila cunha regra graduada en milímetros obtemos unha medida de 0,750 m. Na primeira medida obtemos dúas cifras significativas e na segunda tres o que nos indica que a segunda medida é máis precisa que a primeira, debido a que a regra graduada en milímetros é máis precisa que a graduada en centímetros.

Segundo isto, sempre existe un grao de incerteza ou erro na medida que dependerá do instrumento utilizado. No exemplo anterior expresaríamos a lonxitude da mesa

como  $l = 75 \pm 1$  cm na primeira medida e como  $l = 750 \pm 1$  mm na segunda. Observemos que en ámbolos dous casos o  $\pm 1$  corresponde á última cifra significativa e indícanos a precisión do instrumento utilizado.

### 3.2. Medidas indirectas

En moitas ocasións non existe, ou non é posible utilizar, o instrumento de medida adecuado, polo que é necesario realizar unha medida indirecta, recorrendo a medir outra magnitude que sexa medible directamente e estea relacionada con aquela da cal queremos coñecer o seu valor; por exemplo, se queremos saber a velocidade media dun atleta nunha carreira, cronometramos o tempo e, aplicando unha sinxela fórmula, achamos o valor buscado.

### 3.3. A notación científica

Frecuentemente, os científicos traballan con valores moi grandes, como a velocidade da luz ( $c = 299\,792\,500\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ), ou moi pequenos, como a constante da gravitación universal ( $G = 0,000\,000\,000\,066\,70\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ ). Como podemos ver, expresalos deste modo, é bastante pesado.

Para evitar este problema e favorecer os cálculos e estimacións utilízase a notación científica que consiste en expresar a cantidade por un número, cunha parte enteira dunha soa cifra e unha decimal, multiplicado por unha potencia de dez, que pode ser positiva ou negativa, dependendo do valor do número en cuestión. A parte enteira, xunto coa parte decimal do número mostran as cifras significativas deste e, polo tanto, a precisión coa que se obtivo.

Se expresamos en notación científica a velocidade da luz e a constante da gravitación, respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned}c &= 2,9997925 \cdot 10^8\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ G &= 6,670 \cdot 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}\end{aligned}$$

Nótese que a velocidade da luz se coñece con oito cifras significativas, mentres que a constante da gravitación soamente con catro, o que nos indica que a velocidade da luz se puido medir con máis precisión que a constante da gravitación.

### ***Orde de magnitude***

Acabamos de ver que a velocidade da luz é moi grande e que a constante da gravitación é moi pequena, pero... canto de grande ou de pequena? Para apreciar isto, utilizamos a orde de magnitude que é o número máis próximo ao de referencia que se poida expresar como unha potencia de dez.

Se o número en cuestión está expresado en notación científica, soamente hai que redondear a parte enteira, a 1 ou a 10, co cal a orde de magnitude será a súa propia potencia de dez se a parte enteira é menor de 5 e a súa potencia de dez máis 1 se a parte enteira é igual ou maior de 5.

Así, a velocidade da luz é da orde de  $10^8$ , mentres que a constante da gravitación é da orde de  $10^{-10}$ .

## 4. ERROS NA MEDIDA

En calquera medida que se realice, cométese erros experimentais, por moi sofisticado que sexa o instrumento co que se mida. O primeiro, como xa vimos e que é inevitable, é debido á precisión do aparato, que nunca poderá aproximar a medida máis alá das cifras significativas que poidamos obter da súa lectura. Ademais deste podemos atopar outros que poden ser de dous tipos:

- **Sistemáticos:** Son os que se repiten en todas as medidas realizadas, e normalmente **débense a unha mala calibración do aparato de medida, ou a un defecto de apreciación do observador**. Estes erros son difíciles de detectar e repetíranse en tanto non se localice a causa e tomen as medidas oportunas para a súa corrección, co cal quedará solucionado o problema.

- **Accidentais:** **Acontecen de modo circunstancial, inesperadamente**, como cambios ambientais, vibracións no ámbito, avarías, distracción do observador, etc. Son doados de detectar cando se realizan varias medidas, xa que a tomada accidentalmente dá un valor moi diferente das outras e ademais a súa contribución ao resultado final diminúe ao aumentar o número de medidas realizadas como veremos no epígrafe seguinte.

### 4.1. Aproximación ao valor real

Nunha serie de medidas é posible que esteamos a cometer erros sistemáticos ou non. Unha vez convencidos de que non estamos a incorrer neles obteremos valores máis ou menos dispersos debidos a erros accidentais e, polo tanto, aleatorios. Podemos supoñer razoablemente que unhas veces obteremos o valor por defecto e outras por exceso. Se realizamos dúas medidas, existe un 50% de posibilidades de que as dúas desviacións estean no mesmo sentido, pero a medida que aumenta o número diminúen as probabilidades de que isto aconteza, tendendo a compensarse unhas con outras. Así podemos pensar que se realizamos a media aritmética dos valores obteremos o valor medio que será máis fiable que calquera dos valores individuais obtidos, e máis aínda canto maior sexa o número de medidas realizadas.

Se nunha serie de  $n$  medidas obtivemos os valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , o valor máis fiable será:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

### 4.2. Erro absoluto e erro relativo

O **erro absoluto** é o valor absoluto da **diferenza entre o valor medido e o valor real**. Se " $x$ " é o valor medido e " $x_r$ " o valor real, o valor absoluto será:

$$\Delta x = x - x_r$$

Dado que o valor real non o coñecemos nunca con exactitude, non podemos saber se o erro se cometeu por exceso ou por defecto, polo que se utiliza o valor absoluto, que nos indica unicamente a desviación que existe na medida. Para expresar unha cantidade “x”, con indicación do erro absoluto escribimos  $x \pm \Delta x$ .

Supoñamos que medimos a lonxitude dun lapis cunha regra graduada en milímetros e obtemos 12,7 cm. Non podemos asegurar que este valor sexa exacto, pero si podemos asegurar que é menor de 12,8 cm e maior de 12,6 cm. Neste caso o erro absoluto é de 1 mm, que é a precisión da regra, e o expresamos así:  $l = 12,7 \pm 0,1$  cm.

O erro absoluto indica a desviación da medida, pero non dá unha idea da precisión, é dicir da calidade da medida. Imaxinemos que ao medir a lonxitude dunha piscina que ten 25 m de lonxitude se comete un erro de 1 centímetro; poderíamos considerar que é unha boa medida. Imaxinemos agora que ao medir a lonxitude do lapis do exemplo anterior se comete o mesmo erro; esta sería unha mala medida, por iso, cando convén coñecer este aspecto recórrase ao **erro relativo** que é o **cociente entre o erro absoluto e o valor real**.

Ao ser un cociente entre magnitudes iguais, non ten dimensións, non depende das unidades e, xeralmente, exprésase en tanto por cento. Indica a precisión da medida.

Imos calcular o erro relativo das medidas efectuadas nos exemplos do lapis e da piscina que acabamos de ver:

Na medida do lapis:  $E_r = 0,1 / 12,7 = 0,08 = 8\%$

Na medida da piscina:  $E_r = 0,01 / 25 = 0,0004 = 0,04\%$

Así comprobamos que a medida da piscina é máis precisa, ¡200 veces!, que a medida do lapis.

## 5. REPRESENTACIÓNS GRÁFICAS

Nas ciencias experimentais existen moitas ocasións nas que varias magnitudes están relacionadas entre si, de modo que cando varía unha delas implica a variación doutra ou outras. Así por exemplo, se un móbil se despraza cunha velocidade, a medida que aumenta o tempo aumenta o espazo percorrido; neste caso dicimos que o espazo é función do tempo xa que depende del. A variable que depende doutra denomínase variable dependente e a que serve de referencia, variable independente. Neste caso, o tempo é a variable independente e o espazo, a variable dependente.

Normalmente, os sucesivos valores das variables represéntanse nun sistema de eixes cartesianos. A variable independente sitúase no eixe de abcisas (eixe X) e a variable dependente no de ordenadas (eixe Y). Habitualmente, en primeiro lugar represéntanse no eixe X os valores da variable independente e posteriormente vanse marcando no eixe Y os valores obtidos para a variable dependente.

Cada parella de valores represéntase por un punto e a continuación trázase unha liña, de trazo uniforme, que se axuste o máximo posible a eles co que obteríamos a representación gráfica da función que relaciona ás dúas magnitudes.

Como acabamos de ver, en todas as medidas experimentais existe certo erro e en consecuencia, ao representar os puntos correspondentes aos valores obtidos, vemos que non seguen exactamente a liña que representa á relación matemática que esperamos atopar. Por iso, trazamos a liña de modo que se axuste o máximo posible aos puntos obtidos.

## 5.1. Magnitudes directamente proporcionais

Dúas magnitudes son directamente proporcionais cando o valor dunha delas é igual ao valor da outra multiplicado por unha constante. A súa expresión é da forma  $y = k \cdot x$  onde “y” é a variable dependente, “x” é a variable independente e “k” a constante de proporcionalidade. Dicimos, nestes casos, que estas dúas magnitudes están en relación lineal ou que están relacionadas linealmente.

Supoñamos que, ao medir dúas magnitudes relacionadas deste modo, obtemos os valores reflectidos na seguinte táboa:

x	0	2	4	6	8
y	0	3	6	9	12

A continuación, representamos os puntos correspondentes nuns eixes cartesianos, debuxamos unha liña que pase por todos eles e obtemos a gráfica seguinte:

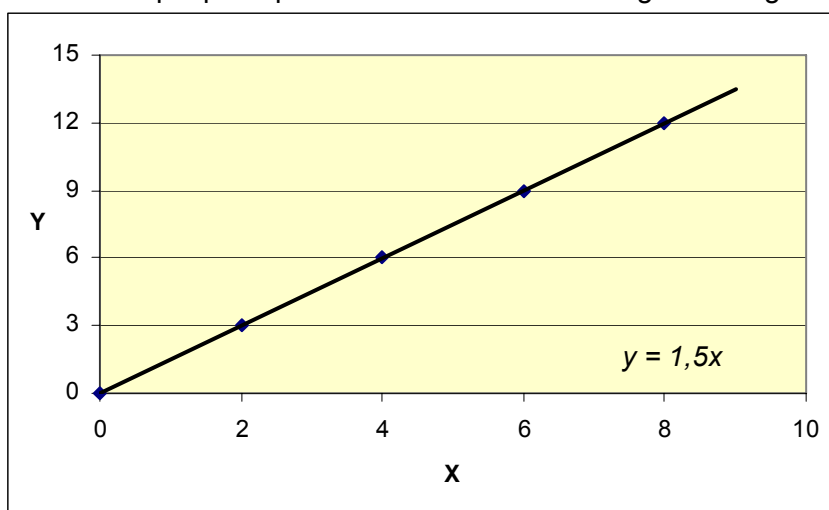


Figura 13: Representación gráfica de magnitudes directamente proporcionais

Obtivemos unha liña recta de pendente  $k = y/x$ . Se poñemos esta ecuación na forma  $y = k \cdot x$ , observamos que “k” é a constante de proporcionalidade entre “y” e “x”.

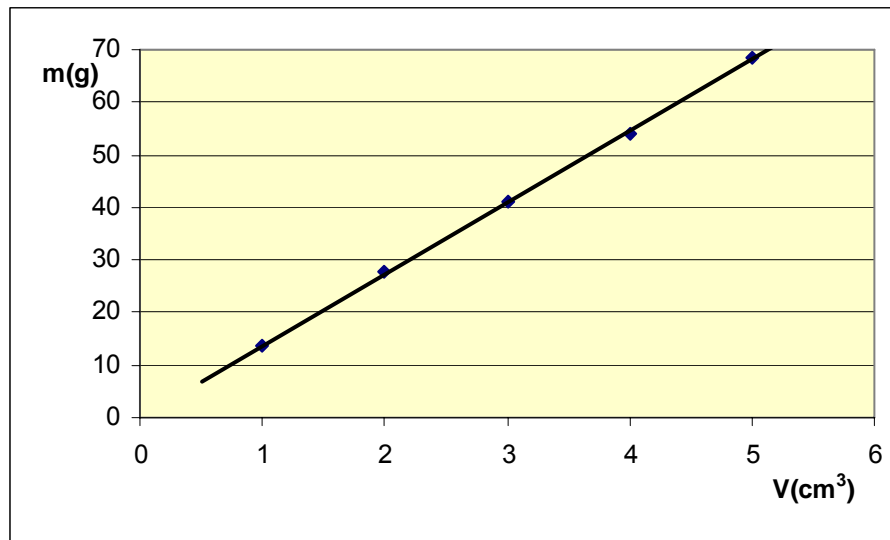
Exemplo: O mercurio é un metal líquido a temperatura ambiente, polo que é doado medir volumes diferentes e calcular as masas correspondentes cunha balanza. Operando así, obtivéronse os datos seguintes:

Volume, V(cm <sup>3</sup> )	1	2	3	4	5
Masa, m(g)	13,6	27,6	41,2	54,1	68,4

- Debuxar a gráfica de m fronte a V.
- Expresar a ecuación matemática que relaciona m con V.
- Calcular o valor da pendente e explicar o seu significado.

Solución:

a)



b) Podemos observar que, moi aproximadamente, os resultados das medidas seguen unha relación lineal polo que a ecuación buscada será da forma  $m=k \cdot v$  e indica que a masa é igual ao volume multiplicado por unha constante.

c) Tamén vemos que todos os puntos non están exactamente situados sobre a liña; por esta razón se tomamos un dos puntos obtidos experimentalmente para calcular o valor da pendente, estaremos a basearnos no resultado dunha soa medida polo que podemos esperar un alto índice de erro. Por iso, calculamos a pendente da recta elixindo calquera punto dela que consideremos ben definido, por exemplo, o (4, 4, 60). A pendente da recta será:  $k = 60/4,4 = 13,6$ .

O valor obtido representa a constante pola que hai que multiplicar o volume de mercurio para obter a súa masa que, segundo sabemos, é a densidade, polo que estas medicións servirían para obter a densidade do mercurio, que en unidades do SI será:  $d = 13,6 \text{ g/cm}^3 = 13,6 \text{ g/1 cm}^3 = (13,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg})/(1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3) = 13\,600 \text{ kg/m}^3$

### Rectas con ordenada na orixe

Nalgunhas ocasións, a recta obtida ao representar os valores non pasa pola orixe de coordenadas debido a que cando “x” vale cero, “y” ten un valor distinto de cero. Supoñamos que nunha serie de medidas obtivemos os seguintes valores:

x	0	2	4	6	8
y	2	8	14	20	26

Neste caso, “x” e “y” non parecen ser directamente proporcionais xa que ao dividir os sucesivos valores de “y” entre os de “x” non obtemos sempre o mesmo resultado.

Non obstante, se representamos graficamente estes resultados, obtemos unha liña recta que non pasa pola orixe de coordenadas, senón que corta ao eixe de ordenadas no punto (0,2). O valor de “y” neste punto ( $y = 2$ ) denomínase ordenada na orixe.

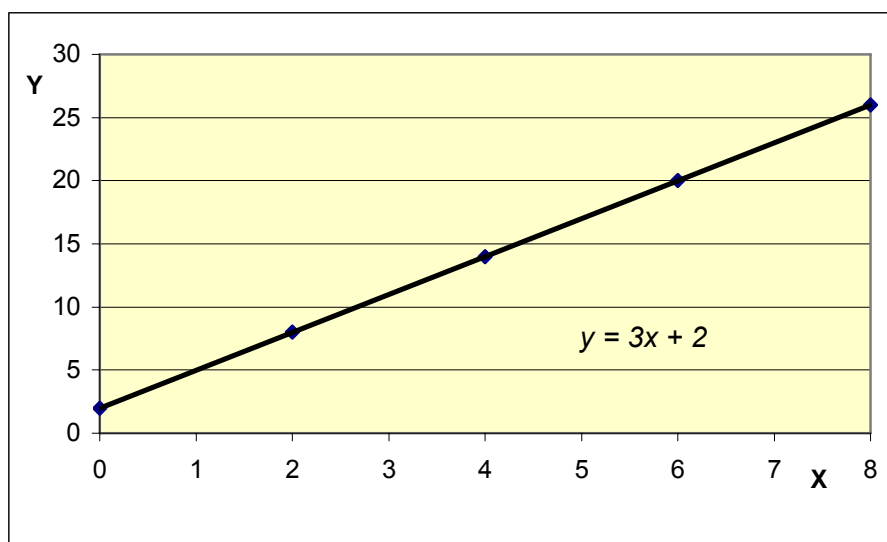


Figura 14: Recta con ordenada na orixe

Se a cada un dos valores obtidos para “y” restámoslle o valor da ordenada na orixe, a fracción que resulta  $\left(\frac{y-2}{x}\right)$  dános un valor constante, que é a pendente da recta. Neste caso concreto, substituíndo calquera parella de valores na expresión, obtemos que a pendente é igual a 3, é dicir:  $\frac{y-2}{x} = 3 \Rightarrow y-2 = 3x \Rightarrow y = 3x+2$  que é a ecuación buscada.

## 5.2. Magnitudes inversamente proporcionais

A relación entre estas magnitudes é da forma  $y = k/x$  onde “k” é unha constante, un número. Agora non permanece constante o cociente, senón o produto. É dicir  $x \cdot y = k$ .

Supoñamos que temos os seguintes valores de dúas magnitudes:

x	1	2	3	4	5
y	24	12	8	6	4,8

Se representamos estes valores obtemos a seguinte gráfica que como vemos é unha curva, concretamente, parte dunha hipérbole.

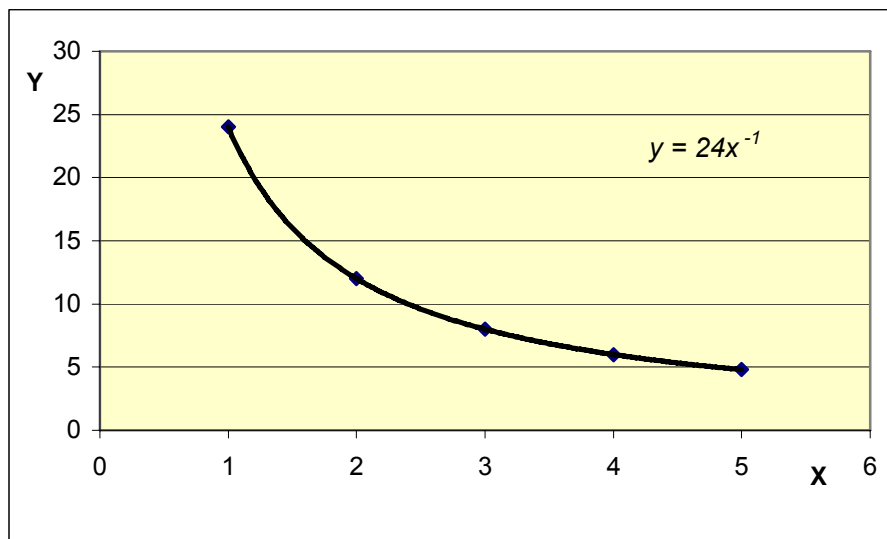


Figura 15: Representación gráfica de magnitudes inversamente proporcionais

### 5.3. Magnitudes relacionadas por outras funcións matemáticas

Hai moitas ocasións nas que a relación matemática existente entre dúas magnitudes non corresponde a ningunha das que vimos, pero, en esencia, o modo de realizar a representación gráfica é o mesmo, dando lugar a curvas máis ou menos complexas. Algunhas das funcións que aparecen con máis frecuencia son:

- Potenciais: Son da forma  $y = k \cdot x^n$ . Onde “n” é unha constante que pode ser positiva ou negativa. Segundo o valor de “n” poden adoptar formas moi diversas. Se nos fixamos, a última que vimos (magnitudes inversamente proporcionais) é deste tipo, xa que  $y = k/x$  pódese expresar como  $y = k \cdot x^{-1}$ . Outra relación deste tipo moi frecuente é a cuadrática:  $y = k \cdot x^2$ . Neste caso a representación gráfica é unha parábola.

- Exponenciais: Son da forma  $y = k^x$ . Sendo “x” a variable independente. Dáse moi frecuentemente en procesos naturais de crecemento continuo como a dos seres vivos, a formación de cristais en disolucións,... ou de decrecemento, como a cantidade de materia radiactiva que queda nunha mostra co paso do tempo.

- Logarítmicas: Son da forma  $y = \log x$ . A función logarítmica é a inversa da función exponencial e a súa utilización, como se verá en cursos superiores, facilita o estudo e representación das funcións exponenciais que con tanta frecuencia aparecen no estudio da física e das ciencias en xeral.