

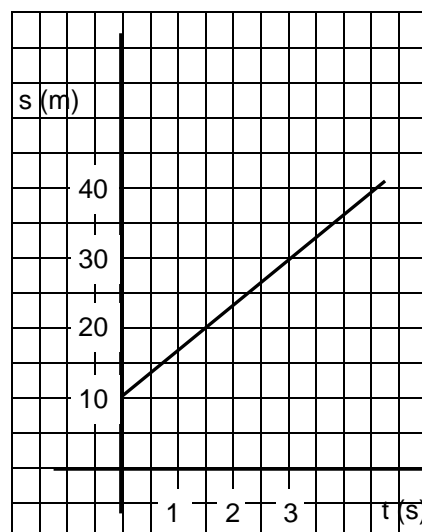
Sección 8. Exercicios autoavaliables

1. Sistemas de referencia . Elementos do movemento.

- **Exemplo 1:** O vector de posición dun móbil nun determinado instante é $\mathbf{r}_1 = 7 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j}$, e ao cabo de 3 s é $\mathbf{r}_2 = 4 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$. Determina a velocidade media e o seu módulo.
- **Exemplo 2:** Un móbil ten unha velocidade en $t = 0$ s de $\mathbf{v}_0 = 6 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j}$. Aos 3 s de iniciar o movemento, a súa velocidade é $\mathbf{v}_3 = 18 \mathbf{i} - 6 \mathbf{j}$ (as dúas expresadas en unidades do SI).
 - a) Determina o vector aceleración media e o seu módulo.
 - b) Supoñendo que a aceleración é constante, calcula o valor da velocidade que terá cando transcorresen 7 s desde que se iniciou o movemento.
- **Exemplo 3:** Unha gravadora de CD xira a 400 rpm. Se sabes que o CD ten un diámetro de 12 cm, calcula a aceleración normal dun punto situado no bordo do disco.

2. Movemento rectilíneo uniforme

- **Exemplo 1:** Un corpo que se move cara á dereita, con velocidade constante de 3 m/s, atópase situado a 15 m á dereita da orixe cando comeza a contarse o tempo. Escribe as ecuacións que describen o seu movemento.
- **Exemplo 2:** Un corpo móvese cara á orixe con velocidade constante de 2,3 m/s. Se inicialmente atópase a unha distancia de 100 m deste; ¿canto tempo tardará en pasar por el?
- **Exemplo 3:** Estudouse o movemento dun corpo obténdose como resultado a gráfica que se mostra.
 - a. ¿Cales son as ecuacións que describen o seu movemento?
 - b. ¿A que distancia da orixe se atopa cando pasen 5,4 s?



- **Exemplo 4:** O movemento dun corpo obedece á ecuación seguinte:
 $s = -12 + 5t$.

- a) Indica o tipo de movemento do corpo e fai un esquema da súa traxectoria.
- b) ¿Que aspecto terán as gráficas s/t e v/t ?
- c) ¿Canto tempo tardará en pasar pola orixe?

3. Movemento circular uniforme

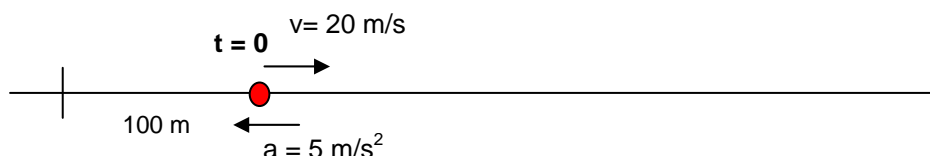
- **Exemplo 1:** A nora dun parque de atraccións ten un raio de 10 m e xira a velocidade constante de 1,5 voltas por minuto. Calcula a velocidade angular da nora en rad/s, a velocidade lineal dun pasaxeiro e o ángulo xirado por este en 40 s.

4. Movemento circular uniformemente acelerado

- **Exemplo 1:** Unha centrifugadora de 0,1 m de raio xira a 180 000 rpm e empeza a frear, realizando 10 000 voltas ata deterse. Calcula a aceleración angular de freada, a aceleración tanxencial e o tempo que tarda en pararse.

5. Movemento rectilíneo uniformemente acelerado

- **Exemplo 1:** Escribe as ecuacións que describen o movemento do punto da figura



- **Exemplo 2:** Un corpo parte do repouso e comeza a moverse. Os datos tomados recóllense na táboa adxunta. Indicar que tipo de movemento ten e determinar as ecuacións para o mesmo.

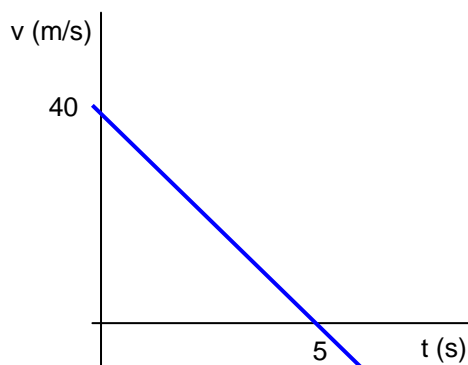
t (s)	s (m)
0	10
1	13
2	22
3	37
4	58
5	85

- **Exemplo 3:** *Unha pedra é lanzada verticalmente e cara arriba cunha velocidade de 15 m/s. Determinar:*
 - a) *Ecuacións do movemento.*
 - b) *Altura máxima alcanzada.*
 - c) *Valor da velocidade cando $t = 0,8$ s y $t = 2,3$ s.*

- **Exemplo 4:**

A gráfica da dereita obtívose tras estudar o movemento dun corpo.

- a) ¿Que tipo de movemento ten?
- b) ¿Cales son as súas ecuacións?
- c) ¿Que ocorre para $t = 5$ s?



6. Composición de movementos

- **Exemplo 1:** Desde a cesta dun globo que ascende a 1 m/s lánzase un foguete con aceleración de 2 m/s^2 . Indica o valor da velocidade e a aceleración con respecto o chan.
- **Exemplo 2:** Desde a fiestra situada a 20 m sobre o chan lánzase horizontalmente un obxecto cunha velocidade de 15 m/s. Determinar:
 - a) As ecuacións que describen o movemento do obxecto.
 - b) O punto en que toca o chan.
 - c) A velocidade con que chega ao chan.
- **Exemplo 3:** Un saltador de lonxitude chega á táboa de batida cunha velocidade de 8,5 m/s e inicia o voo cun ángulo de 40° . Determinar:
 - a) As ecuacións do movemento.
 - b) O alcance do salto.
 - c) A altura máxima alcanzada.
 - d) Altura e velocidade aos 0,75 s.

- **Exemplo 4:** Desde unha fiestra dun edificio situada a 12 m do chan lánzase unha pelota cunha velocidade de 15 m/s formando un ángulo de 30° coa horizontal. Determinar:
 - a) As ecuacións que describen o movemento da pelota:
 - ✓ Se se toma como orixe de coordenadas onde se xuntan a fachada do edificio e o chan.
 - ✓ Se se toma como orixe de coordenadas o lugar de lanzamento.
 - b) ¿Canto tempo tardará en chocar co chan?
 - c) ¿Canto tempo tardará en pasar por diante dun balcón situado 2 m por encima do lugar de lanzamento?
 - d) ¿Cal é a altura máxima alcanzada?

Sección 8. Exercicios autoavaliables (Coa solución)

1. Sistemas de referencia . Elementos do movemento.

- **Exemplo 1:** O vector de posición dun móbil nun determinado instante é $\mathbf{r}_1 = 7 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j}$, e ao cabo de 3 s é $\mathbf{r}_2 = 4 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}$. Determina a velocidade media e o seu módulo.

Solución:

Calculamos en primeiro lugar o desprazamento producido.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (4 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j}) - (7 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j}) = (4 - 7) \mathbf{i} + (4 + 2) \mathbf{j} = -3 \mathbf{i} + 6 \mathbf{j}$$

O vector velocidade media e o seu módulo valen:

$$\mathbf{V}_m = \Delta \mathbf{r} / \Delta t = (-3 \mathbf{i} + 6 \mathbf{j}) / 3 = -\mathbf{i} + 2 \mathbf{j}; \quad ; \quad V = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ m/s}$$

- **Exemplo 2:** Un móbil ten unha velocidade en $t = 0$ s de $\mathbf{v}_0 = 6 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j}$: Aos 3 s de iniciar o movemento, a súa velocidade é $\mathbf{v}_3 = 18 \mathbf{i} - 6 \mathbf{j}$ (as dúas expresadas en unidades do SI).
 - a) Determina o vector aceleración media e o seu módulo.
 - b) Supoñendo que a aceleración é constante, calcula o valor da velocidade que terá cando transcorresen 7 s desde que se iniciou o movemento.

Solución:

a) *A variación que se produciu na velocidade é:*

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_0 = (18 \mathbf{i} - 6 \mathbf{j}) - (6 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j}) = (18 - 6) \mathbf{i} + (-6 + 3) \mathbf{j} = 12 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j} \text{ m/s}$$

Daquela a aceleración será:

$$\mathbf{a}_m = \Delta \mathbf{v} / \Delta t = (12 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j}) / 3 = 4 \mathbf{i} - \mathbf{j}; \quad ; \quad a = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} = 4,12 \text{ m/s}^2$$

b) *Da ecuación da aceleración despegamos a velocidade para $t = 7$ s*

$$\mathbf{a}_m = \Delta \mathbf{v} / \Delta t = \mathbf{v}_7 - \mathbf{v}_0 / 7; \quad 4 \mathbf{i} - \mathbf{j} = \mathbf{v}_7 - \mathbf{v}_0 / 7; \quad \mathbf{v}_7 = 34 \mathbf{i} - 10 \mathbf{j} \text{ m/s}$$

- **Exemplo 3:** Unha gravadora de CD xira a 400 rpm. Se sabes que o CD ten un diámetro de 12 cm, calcula a aceleración normal dun punto situado no bordo do disco.

Solución:

En primeiro lugar pasamos as unidades das magnitudes ao sistema internacional. Así:

$$\omega = 400 \cancel{\text{rev}} / \cancel{\text{min}} \times 2\pi \text{ rad} / 1 \cancel{\text{rev}} \times 1 \cancel{\text{min}} / 60 \text{ s} = 41,9 \text{ rad/s}$$

$$\text{Raio} = r = 0,06 \text{ m}$$

$$\text{Polo tanto, } a_n = v^2 / r = \omega^2 r = (41,9)^2 * 0,06 = 105,3 \text{ m/s}^2$$

2. Movemento rectilíneo uniforme

- **Exemplo 1:** Un corpo que se move cara á dereita, con velocidade constante de 3 m/s, atópase situado a 15 m á dereita da orixe cando comeza a contarse o tempo. Escribe as ecuacións que describen o seu movemento:

Solución:

Para escribir a ecuación correspondente a un movemento rectilíneo e uniforme:

- ✓ *Determina o valor de s_0 .*
- ✓ *Determina o valor da velocidade*
- ✓ *Adapta as ecuacións xerais do movemento ao caso particular que estudas pondo os valores de s_0 e v .*

Ecuacións xerais para o movemento rectilíneo e uniforme:

$$\begin{aligned} v &= \text{cte.} \\ s &= s_0 + v t \end{aligned}$$

Valores de s_0 e v para este caso: $s_0 = 15 \text{ m}$; $v = 3 \text{ m/s}$

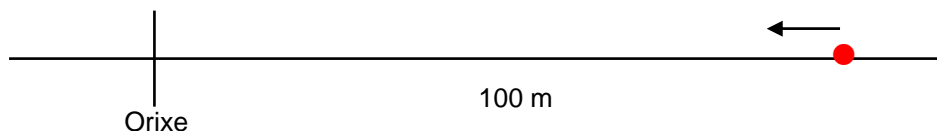
Ecuacións particulares para este movemento:

$$\begin{aligned} v &= 3 \\ s &= 15 + 3 t \end{aligned}$$

- **Exemplo 2:** Un corpo móvese cara á orixe con velocidade constante de 2,3 m/s. Se inicialmente atópase a unha distancia de 100 m deste; ¿canto tempo tardará en pasar por el?

Solución:

Esquema do movemento



Ecuacións xerais para o movemento rectilíneo e uniforme:

$$v = \text{cte.}$$

$$s = s_0 + v t$$

Valores de s_0 e v para este caso: $s_0 = 100 \text{ m}$; $v = - 2,3 \text{ m/s}$

Ecuacións particulares para este movemento:

$$v = - 2,3$$

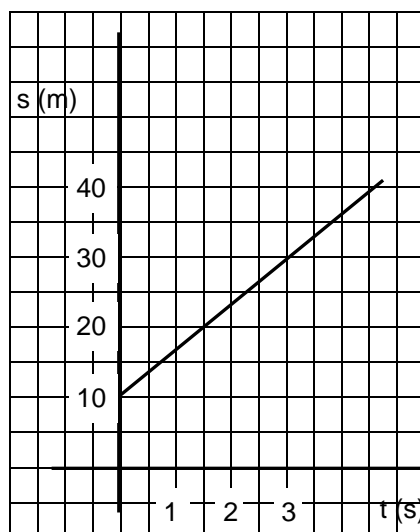
$$s = 100 - 2,3 t$$

Cando pasa pola orixe $s = 0$, logo: $0 = 100 - 2,3 t$;

$$t = \frac{100}{2,3} = 43,5 \text{ s}$$

- **Exemplo 3:** Estudouse o movemento dun corpo obténdose como resultado a gráfica que se mostra.

- ¿Cales son as ecuacións que describen o seu movemento?
- ¿A que distancia da orixe se atopa cando pasen 5,4 s?



Solución:

Ecuacións xerais para o movemento rectilíneo e uniforme:

$$v = \text{cte.}$$

$$s = s_0 + v t$$

Valores de s_0 e v para este caso:

$s_0 = 10 \text{ m}$ (lido na gráfica: punto de corte co eixe vertical)

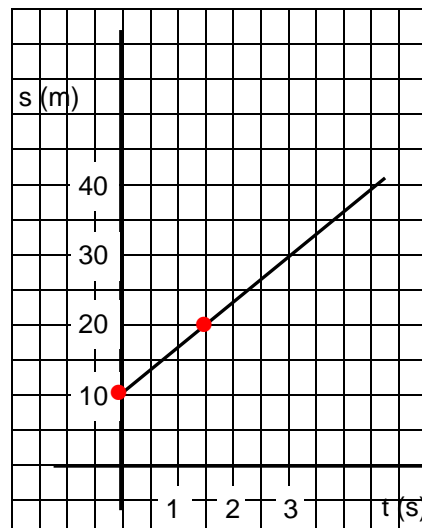
Para saber o valor da velocidade calcúlase a pendente da recta. Para iso tómanse dous puntos de lectura fácil (ver gráfica) e calcúlase a pendente da seguinte maneira:

$$v = \frac{(20 - 10) \text{ m}}{(1,5 - 0) \text{ s}} = 6,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ecuacións particulares para este movemento:

$$v = 6,7$$

$$s = 10 + 6,7 t$$



Valor de s cando $t = 5,4 \text{ s}$: $s_{(t=5,4)} = 10 + 6,7 \cdot 5,4 = 46,2 \text{ m}$

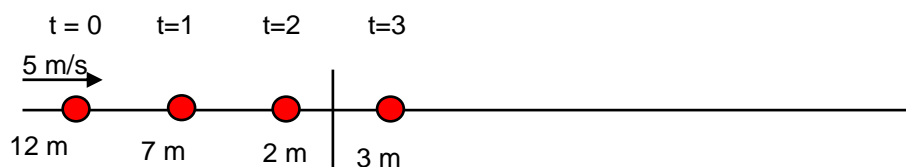
- **Exemplo 4:** O movemento dun corpo obedece á ecuación seguinte:
 $s = -12 + 5 t$.

- Indica o tipo de movemento do corpo e fai un esquema da súa traxectoria.
- ¿Que aspecto terán as gráficas s/t e v/t ?
- ¿Canto tempo tardará en pasar pola orixe?

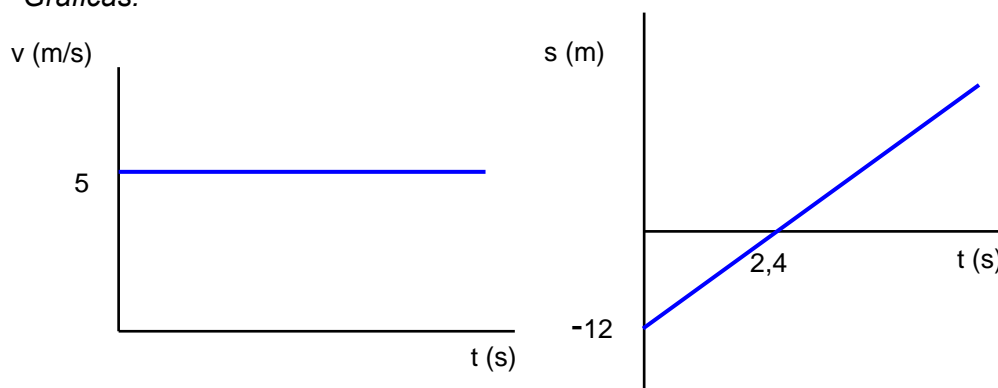
Solución:

O corpo móvese con movemento rectilíneo e uniforme (m.r.u), xa que a ecuación s/t é do tipo $s = s_0 + v t$, sendo os valores das constantes, para este caso:

- ✓ $s_0 = -12 \text{ m}$. O signo menos se debe a que inicialmente se atopa situado á esquerda da orixe.
- ✓ $v = 5 \text{ m/s}$. O signo positivo indícanos que se move cara á dereita.



Gráficas:



Cando pase polo orixe cumprírase: $s = 0$. Logo : $0 = -12 + 5t$;

$$t = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ s}$$

3. Movemento circular uniforme

- Exemplo 1:** A nora dun parque de atraccións ten un raio de 10 m e xira a velocidade constante de 1,5 voltas por minuto. Calcula a velocidade angular da nora en rad/s, a velocidade lineal dun pasaxeiro e o ángulo xirado por este en 40 s.

Solución:

$$\omega = 1,5 \text{ voltas/min} \times 2\pi \text{ rad} / 1 \text{ volta} \times 1 \text{ min} / 60 \text{ s} = \pi / 20 \text{ rad/s}$$

É frecuente deixar o resultado en función de π .

$$v = \omega r = (\pi / 20) * 10 = 1,57 \text{ m/s}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t = 0 + \pi / 20 * 40 = 2\pi \text{ rad} ; \text{ nota: tomamos } \varphi_0 = 0$$

4. Movemento circular uniformemente acelerado

- **Exemplo 1:** Unha centrifugadora de 0,1 m de raio xira a 180 000 rpm e empeza a frear, realizando 10 000 voltas ata deterse. Calcula a aceleración angular de freada, a aceleración tanxencial e o tempo que tarda en pararse.

Solución:

A velocidade angular e o número de voltas calcúlanse en unidades do sistema internacional.

$$\omega = 180\,000 \text{ voltas/min} \times 2\pi \text{ rad} / 1 \text{ volta} \times 1 \text{ min} / 60 \text{ s} = 6\,000 \pi \text{ rad/s}$$

$$\varphi = 10\,000 \text{ voltas} \times 2\pi \text{ rad} / 1 \text{ volta} = 20\,000 \pi \text{ rad}$$

Eliminamos o tempo entre as dúas ecuacións, e tendo en conta que $\varphi_0 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{array} \right\} \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \varphi$$

Substituíndo :

$$0 = (6\,000 \pi)^2 + 2\alpha * 20\,000 \pi \rightarrow \alpha = -900 \pi \text{ rad/s}^2$$

Coñecido o valor da aceleración angular α , a aceleración tanxencial é:

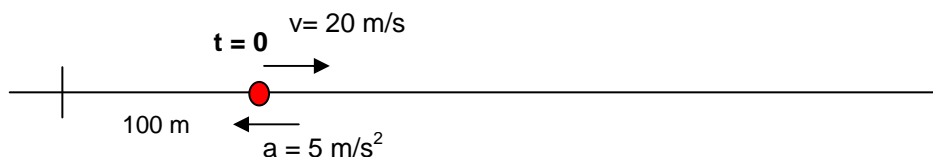
$$a_t = \alpha r = -900 \pi * 0,1 = -90 \pi \text{ m/s}^2$$

Despexamos o tempo da ecuación de velocidade angular:

$$t = (\omega - \omega_0) / \alpha = (0 - 6000 \pi) / -900 \pi = 6,67 \text{ s}$$

5. Movemento rectilíneo uniformemente acelerado

- **Exemplo1:** Escribe as ecuacións que describen o movemento do punto da figura



Solución:

Ecuacións xerais para o movemento:

$$v = v_0 + a t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Tómase como orixe de distancias a liña vertical.

Sentido positivo cara á dereita.

Determinación de s_0 : A que distancia da orixe está o punto cando $t = 0$? $s_0 = 100 \text{ m}$

Determinación de v_0 : Cal é a velocidade do punto cando $t = 0$? $v_0 = 20 \text{ m/s}$

Determinación da aceleración: $a = -5 \text{ m/s}^2$ (signo menos, xa que apunta cara á esquerda).

Ecuacións particulares para este movemento:

$$v = 20 - 5 t$$

$$s = 100 + 20 t - 2,5 a t^2$$

Unha vez escritas as ecuacións pódense resolver practicamente todas as cuestións que se queiran expor. Soamente hai que traducir da nosa linguaxe á linguaxe da ecuación que soamente sabe de valores de s , v ou t .

Exemplos: Canto tarda en frear o punto do exemplo anterior?.

Tradución á linguaxe ecuación: ¿Que valor toma t cando $v=0$?

Se $v = 0$; $0 = 20 - 5 t$;

$$t = \frac{20}{5} = 4 \text{ s}$$

¿Cal é a súa velocidade ao cabo de $5,3 \text{ s}$?

Tradución á linguaxe ecuación: ¿Que valor toma v cando $t = 5,3 \text{ s}$?

Se $t = 5,3 \text{ s}$; $v = 20 - 5 \cdot 5,3 = -6,5 \text{ m/s}$ (o signo menos indica que se despraza cara á esquerda. Logo de frear deu a volta).

- **Exemplo 2:** Un corpo parte do repouso e comeza a moverse. Os datos tomados recóllense na táboa adxunta. Indicar que tipo de movemento ten e determinar as ecuacións para o mesmo.

t (s)	s (m)
0	10
1	13
2	22
3	37
4	58
5	85

Solución:

Como se observa na táboa achegada o espazo percorrido non varía linealmente co tempo. Isto é: no intervalo dun segundo percorre cada vez máis espazo. Isto indica que a súa velocidade vai aumentando. Se se trata dun movemento uniformemente acelerado o aumento de velocidade, ou o que é o mesmo, a súa aceleración, será constante.

Se o movemento é uniformemente acelerado deberá cumprir a ecuación:

$$s = s_0 + v_0 t + 1/2 a t^2.$$

Como neste caso $v_0 = 0$, a ecuación quedará: $s = s_0 + 1/2 a t^2$.

Despexando a : $\frac{1}{2} a t^2 = s - s_0$; $a = \frac{2(s - s_0)}{t^2}$

Usando a ecuación anterior imos probando con datos correspondentes de t e s e comprobamos se o valor que dá é constante:

$$a = \frac{2(13 - 10) \text{ m}}{1^2 \text{ s}^2} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} ; a = \frac{2(22 - 10) \text{ m}}{2^2 \text{ s}^2} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} ; a = \frac{2(37 - 10) \text{ m}}{3^2 \text{ s}^2} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Xa que logo estamos ante un movemento uniformemente acelerado con $a = 6 \text{ m/s}^2$. Para obter as ecuacións determinamos o valor de v_0 e s_0 :

$v_0 = 0$, xa que nolo din no enunciado $s_0 = 10 \text{ m}$, xa que é o valor de s cando $t = 0$ (ver táboa).

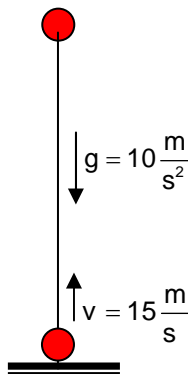
Ecuacións:

$$v = 6 t$$

$$s = 10 + 3 t^2$$

- **Exemplo 3:** Unha pedra é lanzada verticalmente e cara arriba cunha velocidade de 15 m/s. Determinar:
 - a) Ecuacións do movemento.
 - b) Altura máxima alcanzada.
 - c) Valor da velocidade cando $t = 0,8 \text{ s}$ y $t = 2,3 \text{ s}$.

Solución:



Orixe : o solo (punto de lanzamento)

Sentido positivo : cara arriba

Determinación de v_0 : ¿Cal é a velocidade cando $t = 0$? O tempo empeza a contar cando a pedra sae da man. Logo $v_0 = 15 \text{ m/s}$

Determinación de s_0 : ¿A que distancia da orixe está a pedra cando $t = 0$? Cando se lanza a pedra está no punto de lanzamento (orixe). Logo $s_0 = 0$

Determinación do valor de a : $a = g = -10 \text{ m/s}^2$. O signo menos débese a que a aceleración apunta cara abaixo e consideramos sentido positivo cara arriba.

a) Ecuacións: $v = 15 - 10t$

b) ¿Cal é a altura máxima alcanzada?

Traducción a linguaxe da ecuación: ¿Para que valor de t , $v = 0$? (xa que no punto de altura máxima a pedra detense durante un instante)

Si $v = 0$; $0 = 15 - 10t$; $t = 15/10 = 1,5 \text{ s}$; tempo que tarda en alcanzar a altura máxima

Para calcular a altura máxima alcanzada calculamos a distancia á que se encontra da orixe cando $t = 1,5 \text{ s}$:

$$s = h_{\max} = 15 \cdot 1,5 - 5 \cdot 1,5^2 = 11,25 \text{ m.}$$

c) Valores da velocidade:

$$v_{(t=0,8)} = 15 - 10 \cdot 0,8 = 7 \text{ m/s}$$

$$v_{(t=2,3)} = 15 - 10 \cdot 2,3 = -8 \text{ m/s}$$

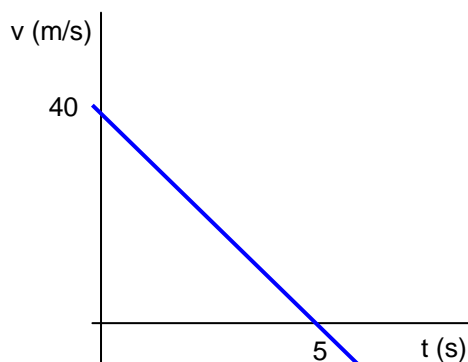
Como pode observarse o cabo de $0,8 \text{ s}$ do lanzamento da pedra aínda está na fase ascendente, xa que o signo da velocidade é positivo (sentido positivo: cara arriba). Como se ve a súa velocidade vai diminuindo, debido a que durante o tramo de ascenso a aceleración leva sentido contrario á velocidade (movemento decelerado)

O cabo de $2,3 \text{ s}$ a pedra móvese cara abaixo. O signo é negativo: sentido cara abaixo. Efectivamente, aos $1,5 \text{ s}$ alcanza a altura máxima e como a aceleración continúa actuando, comeza a súa carreira de descenso, pero esta vez ao ter o mesmo sentido a aceleración e a velocidade, esta aumenta.

• **Exemplo 4:**

A gráfica da dereita obtívose tras estudar o movemento dun corpo.

- ¿Que tipo de movemento ten?
- ¿Cales son as súas ecuacións?
- ¿Que ocorre para $t = 5$ s?



Solución:

- A gráfica $v - t$ é unha recta con pendente negativa. Isto indícanos que a velocidade diminúe co tempo pero de forma lineal (a mesma cantidade en 1 s). Logo o movemento é uniformemente acelerado (con aceleración negativa. Tamén se chama decelerado). Para calcular a aceleración (deceleración) calculamos a pendente da recta $v - t$:

$$\text{Pendente} = a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(0 - 40) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(5 - 0) \text{s}} = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Observa os valores tomados: $t_1 = 0$ $v_1 = 40$; $t_2 = 5$ $v_2 = 0$

- Como no nos dan datos, podemos tomar para s_0 calquera valor. Tomaremos $s_0 = 0$

$v_0 = 40 \text{ m/s}$ (lido na gráfica)

$a = -8 \text{ m/s}^2$ (calculado)

Ecuacións:

$$v = 40 - 8t$$

$$s = 40t - 4t^2$$

- Na gráfica pódese ler que cando $t = 5$ s, $v = 0$. Logo ao cabo de 5 s detense (é un movemento decelerado). Se t é maior de 5 s, observa que a liña na gráfica $v - t$ pasa o eixo horizontal empezando a velocidade (valores do eixo Y) a tomar valores negativos xa que o corpo desprazaríase en sentido contrario.

6. Composición de movementos

- **Exemplo 1:** Desde a cesta dun globo que ascende a 1 m/s lánzase un foguete con aceleración de 2 m/s^2 . Indica o valor da velocidade e a aceleración con respecto o chan.

Solución:

Hai que aplicar o principio de superposición para calcular ambas variables. Se lles chamamos V_G á velocidade do globo e V_{FG} á do foguete respecto ao globo, obtense a V_{FT} que é a velocidade do foguete respecto o chan (Terra), logo:

$V_{FT} = V_G + V_{FG} = V_G + at = 1 + 2t$ isto é o mesmo que dicir que o foguete ao ser lanzado adquire a velocidade do globo: Polo tanto, é como si o lanzáramos do chan cunha velocidade inicial de 1 m/s e cunha aceleración de 2 m/s^2 .

Para obter a aceleración é máis doado xa que só o foguete ten aceleración, logo:

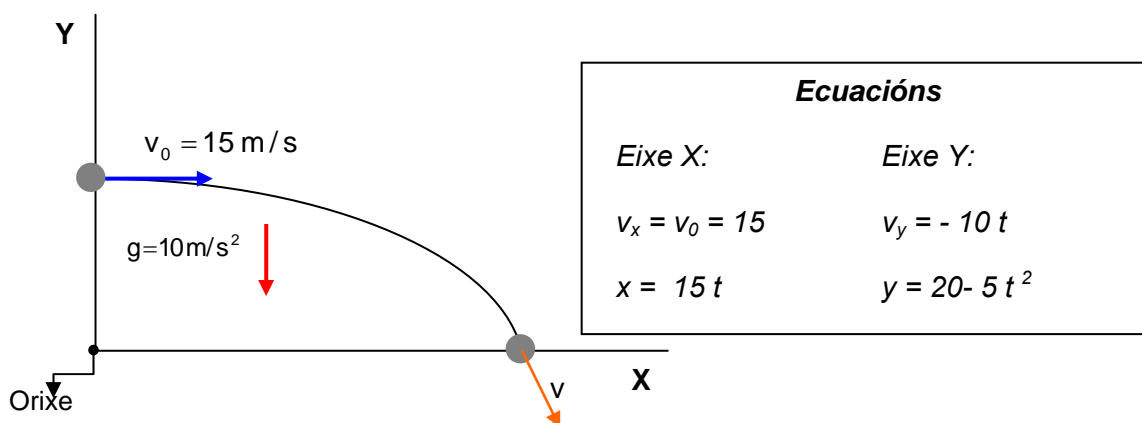
$$a_{FT} = a_{FG} = 2 \text{ m/s}^2$$

- **Exemplo 2:** Desde a fiestra situada a 20 m sobre o chan lánzase horizontalmente un obxecto cunha velocidade de 15 m/s . Determinar:
 - a) As ecuacións que describen o movemento do obxecto.
 - b) O punto en que toca o chan.
 - c) A velocidade con que chega ao chan.

Solución:

Tomando como orixe a dos eixes de coordenadas e considerando positivo cara á dereita e cara arriba temos: $x_0 = 0$; $v_0 = 15 \text{ m/s}$; $y_0 = 20 \text{ m}$ e $g = -10 \text{ m/s}^2$.

Asimesmo, as ecuacións son as seguintes



Cando toca o chan, $y = 0$.

Logo : $0 = 20 - 5 t^2$.

$$t = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2 \text{ s} \quad \text{Tempo que o obxecto tarda en chegar ao chan (só se considera o resultado con signo positivo).}$$

Para calcular a distancia á que toca o chan calcúlase o valor da compoñente x para $t = 2 \text{ s}$.

$$x_{(t=2)} = 15 \cdot 2 = 30 \text{ m.}$$

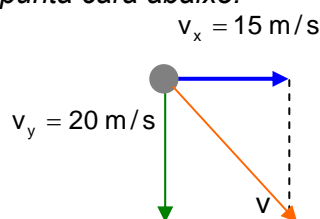
Cando toca o chan o vector velocidade terá como compoñentes:

$$v_x = v_0 = 15 \text{ m/s}$$

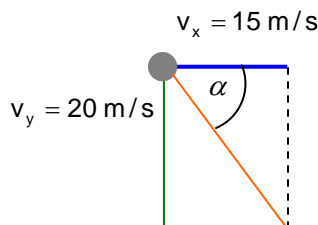
$$v_y = -10 \cdot 2 = -20 \text{ m/s. O signo menos indica que apunta cara abaixo.}$$

Polo tanto:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Tamén se pode calcular o ángulo que o vector velocidade forma coa horizontal no momento de chegar ao chan.



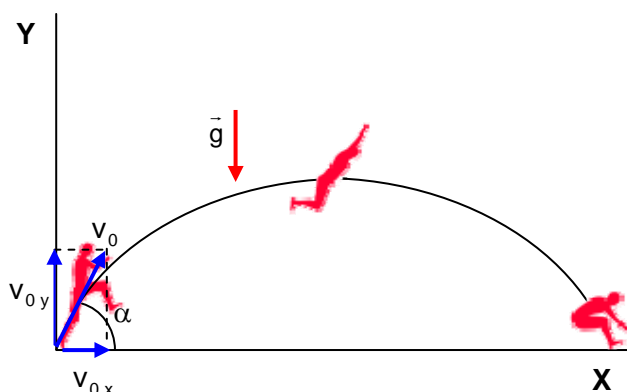
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{15} = 1,333; \alpha = 53,1^\circ$$

Para calcular o ángulo correspondente á tanxente usar a función $\operatorname{inv} \tan$ ou \tan^{-1} da calculadora.

- **Exemplo 3:** Un saltador de lonxitude chega á táboa de batida cunha velocidade de $8,5 \text{ m/s}$ e inicia o voo cun ángulo de 40° . Determinar:
 - As ecuacións do movemento.
 - O alcance do salto.
 - A altura máxima alcanzada.
 - Altura e velocidade aos $0,75 \text{ s}$.

Solución:

Tomando como orixe a dos eixes de coordenadas e considerando positivo cara á dereita e cara arriba: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $v_{0x} = 8,5 \cdot \cos 40 = 6,5 \text{ m/s}$; $v_{0y} = 8,5 \cdot \sin 40 = 5,5 \text{ m/s}$; $g = -10 \text{ m/s}^2$



Para calcular o alcance do salto, impomos a condición de que o saltador chegue ao chan. É dicir $y=0$:

$$0 = 5,5 t - 5 t^2; \quad t = \frac{5,5}{5} = 1,10 \text{ s} \quad . \text{ Tempo que o saltador está no aire.}$$

Para calcular a distancia calcúlase o valor da compoñente x para $t = 1,1 \text{ s}$

$$x_{(t=1,1)} = 6,5 \cdot 1,1 = 7,2 \text{ m}$$

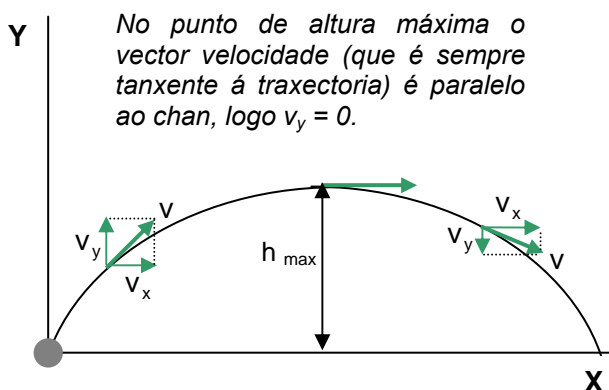
No punto de altura máxima a compoñente vertical da velocidade (v_y) é nula (ver esquema). Xa que logo:

$$v_y = 0.$$

$$0 = 5,5 - 10 t;$$

$$t = 0,55 \text{ s.}$$

O tempo obtido é o que tarda en alcanzar a altura máxima (notar que neste caso é xustamente a metade do tempo de voo, pero non sempre ocorre isto).



Para calcular o valor da altura máxima, calculamos o valor da compoñente vertical para $t = 0,55$ s:

$$y_{(t=0,55)} = 5,5 \cdot 0,55 - 5 \cdot 0,55^2 = 1,51 \text{ m.}$$

Aos 0,75 s de iniciado o salto, o atleta encontrárase a unha distancia da orixe de:

$$x_{(t=0,75)} = 6,5 \cdot 0,75 = 4,88 \text{ m.}$$

A unha altura de:

$$y_{(t=0,75)} = 5,5 \cdot 0,75 - 5 \cdot 0,75^2 = 1,31 \text{ m.}$$

As compoñentes da velocidade valerán:

$$v_x = 6,5 \text{ m/s.}$$

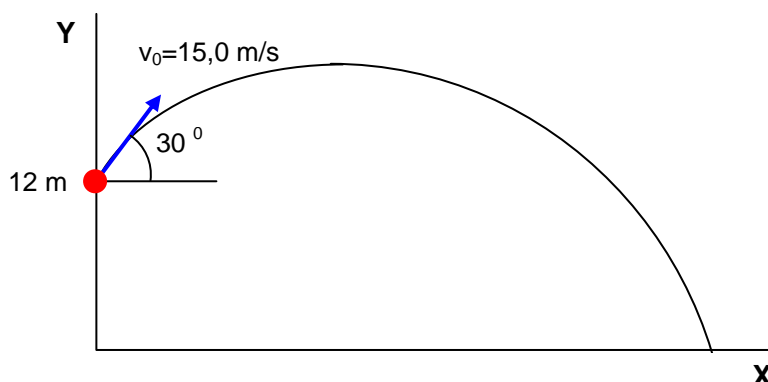
$$v_y = 5,5 - 10 \cdot 0,75 = -2,0 \text{ m/s.}$$

Como se pode comprobar polo signo de v_y o saltador encóntrase na parte descendente da parábola. A súa velocidade será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6,5^2 + 2,0^2} = 6,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- **Exemplo 4:** Desde unha fiestra dun edificio situada a 12 m do chan lánzase unha pelota cunha velocidade de 15 m/s formando un ángulo de 30° coa horizontal. Determinar:
 - a) As ecuacións que describen o movemento da pelota:
 - ✓ Se se toma como orixe de coordenadas onde se xuntan a fachada do edificio e o chan.
 - ✓ Se se toma como orixe de coordenadas o lugar de lanzamento.
 - b) ¿Canto tempo tardará en chocar co chan?
 - c) ¿Canto tempo tardará en pasar por diante dun balcón situado 2 m por encima do lugar de lanzamento?
 - d) ¿Cal é a altura máxima alcanzada?

Solución:



a)

Tomando como orixe a dos eixes de coordenadas e considerando positivo cara á dereita e cara arriba:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 12$$

$$v_{0x} = 15,0 \cdot \cos 30 = 13,0 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = 15,0 \cdot \sin 30 = 7,5 \text{ m/s}$$



Ecuacións

Eje X:

$$v_x = v_{0x} = 13,0$$

$$x = 13,0 t$$

Eje Y:

$$v_y = 7,5 - 10 t$$

$$y = 12 + 7,5 t - 5 t^2$$

Tomado como orixe o punto de lanzamento e considerando positivo cara á dereita e cara abaixo:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_{0x} = 15,0 \cdot \cos 30 = 13,0 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = -15,0 \cdot \sin 30 = -7,5 \text{ m/s}$$



Ecuacións

Eje X:

$$v_x = v_{0x} = 13,0$$

$$x = 13,0 t$$

Eje Y:

$$v_y = -7,5 + 10 t$$

$$y = -7,5 t + 5 t^2$$

b) Se consideramos a orixe situada no chan, cando a pelota choque con el, $y = 0$

$0 = 12 + 7,5 t - 5 t^2$; resolvendo a ecuación de segundo grao e seleccionando o resultado positivo que é o que ten significado físico

(¿que significado ten o resultado negativo?) tense como tempo que a pelota tarda en caer: $t = 2,47$ s

Se consideramos **a orixe situada no punto de lanzamento**, cando a pelota chegue ao chan cúmprese que $y = 12$ m. Logo:

$12 = -7,5 t + 5t^2$; $0 = 12 + 7,5 t - 5t^2$ que é unha ecuación idéntica á anterior e que, en consecuencia, ten a mesma solución.

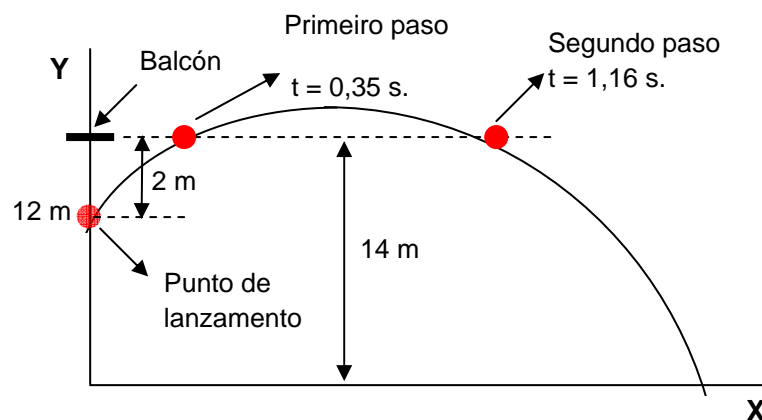
c) Considerando **a orixe situada no chan**, cando pase polo balcón $y = 14$ m.

Logo:

$$14 = 12 + 7,5 t - 5 t^2 ; 5t^2 - 7,5 t + 2 = 0.$$

Resolvendo a ecuación de segundo grao e seleccionando o resultado positivo que é o que ten significado físico obtéñense dous resultados positivos $t_1 = 0,35$ s ; $t_2 = 1,16$ s.

Ambos os resultados poden considerarse válidos. O primeiro é o tempo que tarda en pasar polo balcón cando aínda está ascendendo e o segundo cando está na zona de descenso.



Se consideramos **a orixe situada no punto de lanzamento**, cando pase polo balcón $e = -2$ m (recordar que se considerou positivo cara abaixo). Logo:

$$-2 = -7,5 t + 5 t^2 ; 5 t^2 - 7,5 t + 2 = 0 , \text{ que é a mesma ecuación.}$$

- d) Para calcular a altura máxima alcanzada impomos a condición (ver exemplo 3) $v_y = 0$:

$0 = 7,5 - 10 t$; $t = 0,75$ s. Tempo que tarda en alcanzar a altura máxima. Observar que neste caso ao non estar o punto de lanzamento sobre o eixo X, o tempo que tarda en alcanzar a altura máxima non é a metade do tempo de voo.

Para calcular a altura máxima calculamos o valor de y:

Orixe o chan:

$$y(t = 0,75) = 12 + 7,5 \cdot 0,75 - 5 \cdot 0,75^2 = 14,81 \text{ m.}$$

Orixe punto de lanzamento:

$$y(t = 0,75) = -7,5 \cdot 0,75 + 5 \cdot 0,75^2 = -2,81 \text{ m.}$$

Observar que sae signo negativo. O que indica que a altura máxima atópase 2,81 m por encima do punto de lanzamento. Isto é a $2,81 + 12 = 14,81$ m do chan.