

UNIDADE 8. CINEMÁTICA

1. SISTEMAS DE REFERENCIA. ELEMENTOS DO MOVEMENTO.

- 1.1. Vector de posición.
- 1.2. Desprazamento.
- 1.3. Traxectoria.
- 1.4. Velocidade.
- 1.5. Aceleración.

2. MOVEMENTO RECTILÍNEO.

- 2.1. Movemento rectilíneo uniforme.
- 2.2. Movemento rectilíneo uniformemente acelerado.

3. MOVEMENTO CIRCULAR.

- 3.1. Movemento circular uniforme.
- 3.2. Movemento circular uniformemente acelerado.

4. COMPOSICIÓN DE MOVEMENTOS.

- 4.1. Lanzamento horizontal.
- 4.2. Lanzamento parabólico.

1. SISTEMAS DE REFERENCIA. ELEMENTOS DO MOVEMENTO

Todos temos unha idea bastante clara do que é o movemento: o cambio de posición ou lugar que ocupa un corpo no espazo. Isto é certo pero... como coñecemos e, máis aínda, expresamos a posición dun corpo?; está lonxe ou preto? Inmediatamente xorde outra pregunta: lonxe ou preto... de onde?, en que dirección?

É aquí onde aparece a necesidade de establecer un sistema de referencia que nos permita coñecer e expresar matematicamente a posición dun punto no espazo.

Calquera sistema de referencia vai ligado a un punto, que se toma como orixe, e a tres direccións que representan as dimensións do espazo. A representación matemática máis habitual dun sistema de referencia fundaméntase nos eixes cartesianos. A posición dun punto exprésase polas súas coordenadas (x, y, z) que son as medidas obtidas ao proxectar o punto sobre cada un dos eixes.

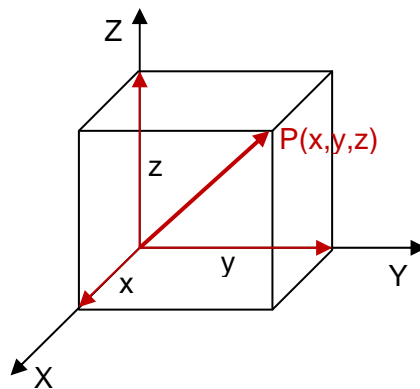


Figura 1: Sistema de coordenadas

Como é evidente, pódense establecer infinitos sistemas de referencia. A posición dun punto e, polo tanto, o movemento sempre serán relativos ao sistema de referencia elixido.

Un sistema de referencia pode estar a moverse con respecto a outro. Se a súa velocidade é constante (non existe aceleración) dicimos que se trata dun **sistema de referencia inercial** no caso contrario o sistema é non inercial.

Imaxinemos que viaxamos nun barco e fixamos o sistema de referencia no porto de partida; este sistema sería adecuado para estudar o movemento do barco, pero se queremos estudar o movemento dun pasaxeiro que pasea pola cuberta conviría establecer un sistema con orixe no propio barco. Nestas condicións, se o barco se move en liña recta e a velocidade constante, o sistema a orixe do cal está nun punto do barco é inercial respecto ao sistema con orixe no porto e se o barco está a acelerar, freando ou cambiando de rumbo, é non inercial.

Na resolución de problemas é moi importante elixir sistemas de referencia inerciais, sempre que sexa posible, para evitar efectos non desexados debidos á aceleración propia do sistema.

Cando establecemos un sistema de referencia convén situar a súa orixe e seleccionar as direccións de modo que se favoreza a resolución do problema que intentamos resolver. Se ademais podemos eliminar unha dirección porque non afecta ao problema, este simplifícase a dúas dimensións, é dicir a un plano ou mesmo a unha recta no caso de que as variables dependan dunha soa dimensión.

1.1. Vector de posición

Vimos que a posición dun punto se expresa polas súas coordenadas cartesianas pero tamén podemos expresala polo seu **vector de posición** que é o que vai dende a orixe de coordenadas ata o punto a posición do cal queremos expresar.

Se coñecemos as coordenadas do punto (x, y, z) , o vector de posición dado pola expresión: $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, onde \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} son os **vectores unitarios** correspondentes aos eixes X , Y , Z .

Nota importante: Por cuestión de facilidade á hora de elaborar o texto, os vectores representáremoslos en negriña en vez de coas frechiñas (nos debuxos aparecerán con frechiñas), polo tanto, no parágrafo anterior \vec{r} é o vector de posición e \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} os vectores unitarios.

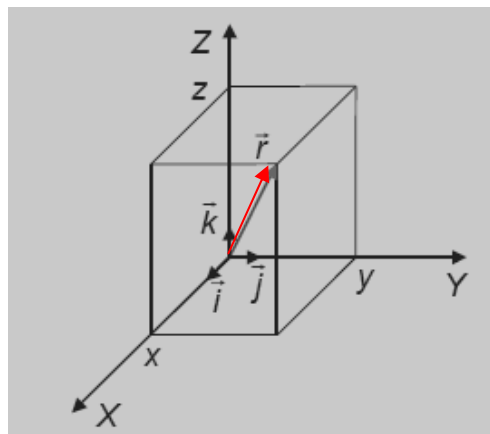


Figura 2: Vector de posición

1.2. Desprazamento

Cando un punto se move dende unha posición \vec{r}_0 ata outra \vec{r} , realiza un desprazamento que podemos representar por un vector que vai dende a posición inicial do móbil ata a posición final e que matematicamente expresamos polo seu **vector desprazamento** que é a diferenza entre os vectores de posición \vec{r} e \vec{r}_0 cuxo valor ben dado pola expresión:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Expresado en función dos seus compoñentes, quedará:

$$\Delta \mathbf{r} = (x - x_0) \mathbf{i} + (y - y_0) \mathbf{j} + (z - z_0) \mathbf{k}$$

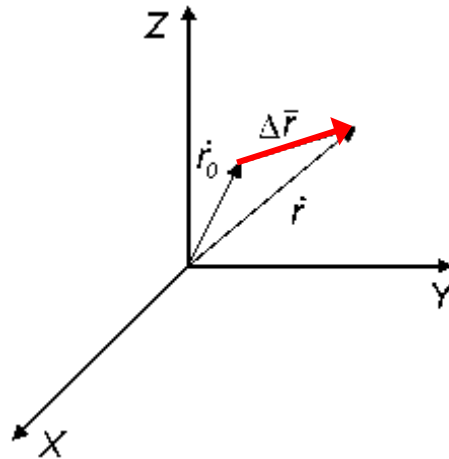


Figura 3: Desprazamento

1.3. Traxectoria

É a liña definida polos puntos que foi ocupando o móbil durante o seu movemento. Dito dun modo máis sinxelo, é a liña que marca o camiño percorrido polo móbil. En adiante chamarémola Δs .

Recordemos que o desprazamento é un vector o módulo do cal coincide coa lonxitude da liña recta que une os puntos inicial e final do movemento, mentres que a **traxectoria** é unha magnitude escalar e a súa lonxitude é a da propia liña, que pode ser curva ou recta, dependendo do movemento. De aquí podemos deducir que a lonxitude da traxectoria é sempre maior que a do desprazamento salvo cando o movemento é rectilíneo en cuxo caso coinciden.

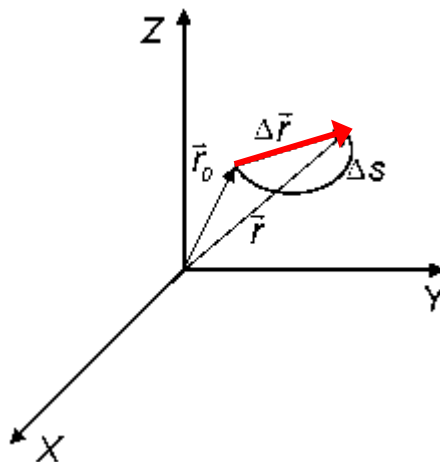


Figura 4: Traxectoria e desprazamento

1.4.Velocidade

Todo movemento se realiza nun intervalo de tempo polo que se queremos coñecer as súas características deberemos coñecer a relación que existe entre o desprazamento realizado e o tempo empregado. Esta relación é o que coñecemos como velocidade media e expresámola mediante a seguinte fórmula:

$$\mathbf{V}_m = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$$

A unidade no Sistema Internacional é o metro/segundo (m/s) ou (ms^{-1}).

Se expresamos o vector velocidade en función dos seus compoñentes teremos:

$$\mathbf{V}_m = (x - x_0) / (t - t_0) \mathbf{i} + (y - y_0) / (t - t_0) \mathbf{j} + (z - z_0) / (t - t_0) \mathbf{k}$$

Con frecuencia, para expresar a rapidez con que se realizou un movemento, é conveniente referirse á **velocidade media ao longo da traxectoria**, que é unha magnitude escalar, o valor do cal é o cociente entre a lonxitude desta e o tempo empregado en percorrela

$$V_m = \Delta s / \Delta t$$

A velocidade tamén pode variar. Se queremos coñecer o seu valor nun instante determinado ou **velocidade instantánea** debemos de adaptar a expresión da velocidade medida a un tempo infinitesimal, e expresámola así:

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} / \Delta t$$

Como se estudará en matemáticas ao longo deste curso, esta expresión representa a derivada do vector de posición con respecto ao tempo e exprésase:

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r} / dt$$

En función das súas compoñentes

$$\mathbf{V} = dx/dt \mathbf{i} + dy/dt \mathbf{j} + dz/dt \mathbf{k}, \text{ ou máis resumidamente}$$

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$$

Exemplo:

1. As coordenadas dun punto que se move no plano X-Y veñen dadas por $x = 5t$; $y = 3t^2 + 2$ en unidades do S.I. Achar:

- a) O vector de posición.
- b) O vector velocidade.
- c) O módulo da velocidade.

Solución:

a) $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = 5t \mathbf{i} + (3t^2 + 2) \mathbf{j}$

b) $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = d/dt (5t \mathbf{i} + (3t^2 + 2) \mathbf{j}) = 5 \mathbf{i} + 6t \mathbf{j}$

c) $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{25 + 36t^2} \text{ ms}^{-1}$

2. A posición dun punto material que se move no eixo X vén dada, en función do tempo, pola ecuación $x = 4t^2 - 3t + 5$ en unidades do S.I. Calcular:

- a) A expresión da velocidade en función do tempo.
- b) O módulo da velocidade aos 4 segundos de iniciarse o movemento.
- c) O desprazamento realizado durante estes 4 segundos.

Solución:

a) Sabemos que v é a derivada de s con respecto ao tempo: $v = dx/dt = 8t - 3$.

b) Substituímos $t = 4$ na ecuación da velocidade e obtemos: $v = 8 \cdot 4 - 3 = 29 \text{ ms}^{-1}$

c) Calculamos a posición do punto para $t = 0 \text{ s}$ e para $t = 4 \text{ s}$. A diferenza entre a posición final e inicial daranos o desprazamento.

$$x_0 = 5 \text{ m}; x_4 = 4 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 5 = 57 \text{ m} \rightarrow x = x_4 - x_0 = 57 - 5 = 52 \text{ m}$$

1.5. Aceleración

Para saber como varía a velocidade temos que calcular a relación existente entre o incremento de velocidade e o tempo empregado. Esta relación é o que coñecemos como **aceleración media** e expresámola mediante a seguinte:

$$\mathbf{a}_m = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$$

A aceleración tamén pode variar. Para coñecer o seu valor nun instante determinado ou **aceleración instantánea** temos que adaptar a expresión anterior a un tempo infinitesimal, e expresámolo así:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v} / \Delta t$$

que como acabamos de ver representa a derivada do vector velocidade respecto ao tempo

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt$$

Compoñentes cartesianas da aceleración

$$\mathbf{a} = dv_x/dt \mathbf{i} + dv_y/dt \mathbf{j} + dv_z/dt \mathbf{k} ,$$

ou máis resumidamente

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} ;$$

onde $a_x = dv_x/dt$; $a_y = dv_y/dt$; $a_z = dv_z/dt$ son as compoñentes cartesianas da aceleración

Exemplo:

A posición dun punto material que se move no espazo vén dada polo vector

$$\mathbf{r} = (5t^2 - 2) \mathbf{i} + (2t + 1) \mathbf{j} + 4t^3 \mathbf{k}$$

Achar:

- A distancia, en metros, existente entre o punto móbil e a orixe de coordenadas aos 5 segundos de iniciarse o movemento.**
- As compoñentes cartesianas da velocidade e o vector velocidade.**
- As compoñentes cartesianas da aceleración, o vector aceleración e o seu módulo aos 5 segundos.**

Solución:

- a) A distancia pedida é precisamente o módulo do vector de posición. En primeiro lugar achamos o vector de posición aos 5 segundos:

$$\mathbf{r} = (5 \cdot 5^2 - 2) \mathbf{i} + (2 \cdot 5 + 1) \mathbf{j} + 4 \cdot 5^3 \mathbf{k} = 123 \mathbf{i} + 11 \mathbf{j} + 500 \mathbf{k}$$

$$\text{o seu módulo vale: } r = \sqrt{123^2 + 11^2 + 500^2} = 515,02 \text{ m}$$

- b) As compoñentes da velocidade veñen dadas polas derivadas das compoñentes do vector de posición:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 - 2) = 5 \cdot 2t = 10t ; v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 1) = 2 ; v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}4t^3 = 4 \cdot 3t^2 = 12t^2$$

$$\text{O vector velocidade será: } \mathbf{v} = 10t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + 12t^2 \mathbf{k}$$

- c) Obtemos as compoñentes cartesianas da aceleración derivando as componentes da velocidade:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}10t = 10 ; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}2 = 0 ; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt}12t^2 = 24t$$

O vector aceleración será: $\mathbf{a} = 10 \mathbf{i} + 24t \mathbf{k}$

E o seu módulo aos 5 segundos: $a = \sqrt{10^2 + (24 \cdot 5)^2} = 120,42 \text{ ms}^{-2}$

Compoñentes intrínsecas da aceleración

Se eliximos un sistema de referencia con orixe no propio móbil, un eixe na mesma dirección que o vector velocidade e o outro perpendicular a esta, é doado achar as compoñentes da aceleración nestes eixes. Unha é tanxencial (na mesma dirección que a velocidade) e a outra normal (perpendicular). Estas son precisamente as **compoñentes intrínsecas** da aceleración e en función delas, podemos expresar:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

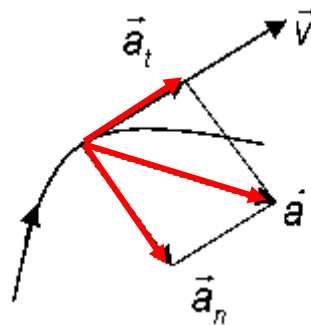


Figura 5: Compoñentes intrínsecas da aceleración

A **aceleración tanxencial** dáanos a medida da variación do módulo do vector velocidade ou a variación da rapidez do movemento.

A **aceleración normal** dáanos a medida do cambio de dirección da velocidade e o seu valor, como se demostrará máis adiante, cando estudemos o movemento circular, é sempre

$$a_n = v^2 / r$$

onde v é o módulo da velocidade e r o radio de curvatura da traxectoria no punto onde se atopa o móbil.

2. Movemento rectilíneo

Na nosa vida diaria observamos moitos movementos; entre todos eles, o máis sinxelo é o dun móbil cunha liña recta por traxectoria.

Se este movemento se realiza a velocidade constante trátase dun movemento **rectilíneo uniforme** e se a súa velocidade varía cunha aceleración constante, é un movemento **rectilíneo uniformemente acelerado**.

En calquera dos dous casos, a lonxitude do desprazamento e a da traxectoria coinciden co espazo percorrido e o movemento realízase nunha soa dirección polo que non é necesario recorrer ao cálculo vectorial e será indiferente falar de desprazamento ou de traxectoria, sempre e cando teñamos en conta o sentido do movemento, dentro da dirección en que se realiza xa que a traxectoria é sinxelamente unha lonxitude e non indica por si mesma o sentido.

2.1. Movemento rectilíneo uniforme

Unha vez que coñecemos a equivalencia entre o desprazamento e a traxectoria neste tipo de movemento, o valor da velocidade media virá dado por o cociente entre o espazo percorrido e o tempo empregado:

$$v = \Delta s / \Delta t = (s - s_0) / (t - t_0)$$

Dado que a velocidade non varía, a aceleración é nula e tamén é evidente que a velocidade media e a instantánea son iguais.

Para obter a lonxitude da traxectoria ou o espazo percorrido despexamos s na fórmula anterior e obtemos: $s = s_0 + v(t - t_0)$

Se supoñemos que comezamos a contar o tempo cando se inicia o movemento teremos que $t_0 = 0$ polo que $s = s_0 + vt$, onde s_0 é o espazo inicial ou a distancia dende a orixe ata o punto onde se atopaba o móbil ao comezar o movemento.

Se representamos nunha gráfica a velocidade en función do tempo, obtemos unha recta paralela ao eixe de tempos xa que a velocidade é constante. Podemos observar que o espazo percorrido coincide co valor da superficie do rectángulo formado pola gráfica e o eixe de abscisas no intervalo de tempo considerado $s = v(t - t_0)$

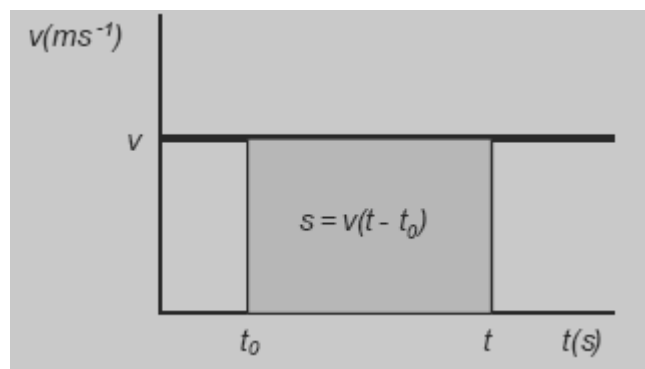


Figura 6: Gráfica v-t no movemento rectilíneo uniforme

Tamén podemos representar o espazo en función do tempo e obtemos unha recta cuxa ordenada na orixe é o valor do espazo inicial s_0 e a súa pendente coincide co valor da velocidade.

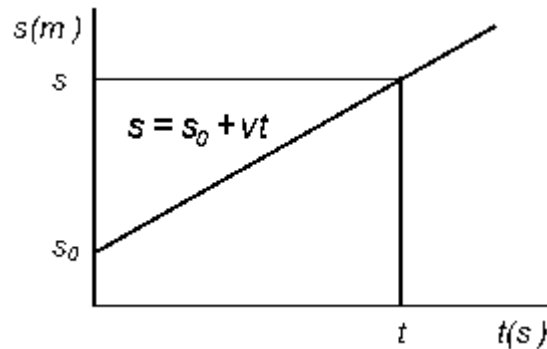


Figura 7: Gráfica s-t no movement rectilíneo uniforme

2.2. Movement rectilíneo uniformemente acelerado

Todo o que vimos no epígrafe anterior sobre o desprazamento e a traxectoria segue sendo válido para este tipo de movement xa que tamén é rectilíneo, a única diferenza é que neste caso a velocidade varía e polo tanto o valor da aceleración non será nulo. Segundo vimos anteriormente, o valor da aceleración é:

$$a = (v - v_0) / (t - t_0)$$

se nesta expresión, despois de substituír a velocidade obtemos: $v = v_0 + a(t - t_0)$ que é o valor da velocidade instantánea.

Se comezamos a contar o tempo dende cero ($t_0 = 0$), teremos: $v = v_0 + at$

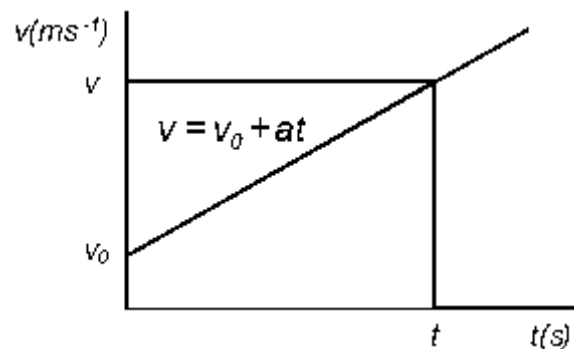


Figura 8: Gráfica v-t nun movement uniformemente acelerado

En calquera tipo de movement, se cumpre que o espazo percorrido nun intervalo de tempo é igual ao valor da superficie limitada pola súa gráfica v-t e o eixe de abscisas nese intervalo de tempo. Neste caso, o valor do espazo percorrido virá dado pola área do trapecio:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Tamén podemos representar o espazo en función do tempo e obtemos unha **rama de parábola**

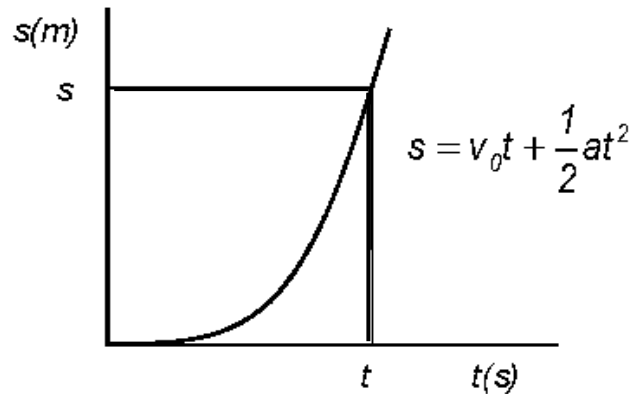


Figura 9: Gráfica s-t nun movemento uniformemente acelerado

Movemento de caída libre

Un exemplo típico deste tipo de movemento é o dun corpo que cae libremente pola acción da gravidade. A aceleración á que está sometido o corpo é a da gravidade que ten por valor media aproximado na superficie da Terra $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Neste caso as ecuacións da velocidade e do espazo (altura) serán respectivamente:

$$v = v_0 + gt \quad h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

Para facilitar a resolución de problemas imos adoptar un criterio de signos:

- A altura será positiva se o móbil se atopa máis arriba da orixe que tomáramos, normalmente o punto de partida.
- A velocidade será positiva se o móbil se move cara a arriba e negativa se se move cara a abaixo.
- A aceleración da gravidade é sempre negativa xa que vai dirixida cara a abaixo.

Exemplo:

Lánzase verticalmente cara a arriba un obxecto cunha velocidade inicial de 30 ms^{-1} .
Calcular:

- a) O tempo que tarda en alcanzar o punto máis alto da súa traxectoria.
- b) A altura máxima que alcanza.
- c) A velocidade aos catro segundos de ser lanzado.
- d) Altura á que se atopa aos catro segundos.

Solución:

- a) O móbil alcanzará o punto máis alto cando a súa velocidade sexa igual a cero.

$$0 = v_0 + gt ; \text{ substituindo } 0 = 30 - 9,8t ; \text{ despexando } t = 30 / 9,8 = 3,06 \text{ s}$$

- b) A altura máxima será a que teña aos 3,06 s calculados no apartado anterior.

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 = 30 \cdot 3,06 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (3,06)^2 = 45,92 \text{ m}$$

- c) Substituímos en $v = v_0 + gt = 30 - 9,8 \cdot 4 = -9,2 \text{ ms}^{-1}$

Observamos que a velocidade é negativa, como era de esperar, xa que aos 3,06 segundos o obxecto alcanzou o seu punto máis alto, polo que aos catro segundos está a descender.

- d) Substituímos en $h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 = 30 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (4)^2 = 41,6 \text{ m}$

3. Movemento circular

Diariamente vemos obxectos ou mecanismos que xiran ao redor dun eixe fixo, como unha roda, un disco, un carrusel... Se nos fixamos nun punto calquera, diferente do centro, dun obxecto que dá voltas, e nos imaxinamos a súa traxectoria, chegamos á conclusión de que é unha circunferencia. Pois ben, isto é precisamente o que caracteriza a calquera movemento circular: a súa traxectoria é unha circunferencia.

3.1. Movemento circular uniforme

É o que realiza un móbil que percorre arcos de circunferencia iguais en tempos iguais.

Tamén poderíamos definir este movemento como o dun móbil que describe ángulos iguais en tempos iguais.

Esta segunda definición permítenos estudar este movemento en función do ángulo descrito (φ) en lugar do desprazamento realizado. Para iso introducimos o concepto de

velocidade angular (ω) que é o ángulo descrito na unidade de tempo, ou dito doutra forma: é o cociente entre o ángulo descrito e o tempo empregado. É dicir:

$$\omega = \Delta\varphi / \Delta t \quad ; \text{ se tomamos } t_0 = 0, \text{ temos que } \omega = (\varphi - \varphi_0) / t$$

Se na fórmula anterior despxamos φ obtemos o valor do ángulo descrito:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

As unidades en que se expresa ω son radiáns por segundo (rad/s).

Na industria é moi frecuente expresar a velocidade angular en revolucións por minuto (rpm);

$$1 \text{ rpm} = 1 \text{ volta} / \text{min} = 2\pi / 60 \text{ rad/s}$$

Agora imos coñecer dúas magnitudes moi sinxelas que nos axudarán a comprender mellor o movemento circular: o período e a frecuencia:

O **período** (T) é o tempo que tarda o móbil en dar unha volta completa, é dicir, o tempo que tarda en describir un ángulo de 2π radiáns.

A **frecuencia** é o número de voltas que dá na unidade de tempo (un segundo). A súa unidade no SI é o hertz (Hz) que equivale a unha volta por segundo.

O período e a frecuencia son magnitudes inversas: $T = 1 / f$; $f = 1 / T$

Sabendo isto, podemos calcular a velocidade angular que mantivo o móbil nunha volta completa xa que coñecemos o ángulo descrito (2π radiáns) e o tempo empregado que é o valor do período (T): $\omega = 2\pi / T$ ou ben $\omega = 2\pi f$ que nos dá a velocidade angular en función do período ou da frecuencia respectivamente.

Tamén imos deducir outra fórmula que nos vai permitir relacionar de modo inmediato a velocidade lineal coa angular.

Se a lonxitude da circunferencia é $l = 2\pi r$, a velocidade lineal na traxectoria será: $v = 2\pi r / T$ de onde deducimos que $v = \omega r$

Se razoamos sobre a fórmula obtida, comprobamos que a velocidade dun punto é directamente proporcional ao radio, é dicir á distancia que o separa do centro.

Na figura 10, podemos observar que o vector velocidade é en todo momento tanxente á traxectoria, polo que a súa dirección cambia constantemente.

Recordemos que a aceleración é un vector o valor da cal é o cociente entre o incremento do vector velocidade e o incremento de tempo.

Se o vector velocidade varía, aínda que o seu módulo sexa constante, existe unha aceleración que ten o sentido e a dirección de $\Delta \mathbf{v}$ e vai dirixida ao centro da circunferencia como pode apreciarse na figura 11 ao facer coincidir as orixes \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 .

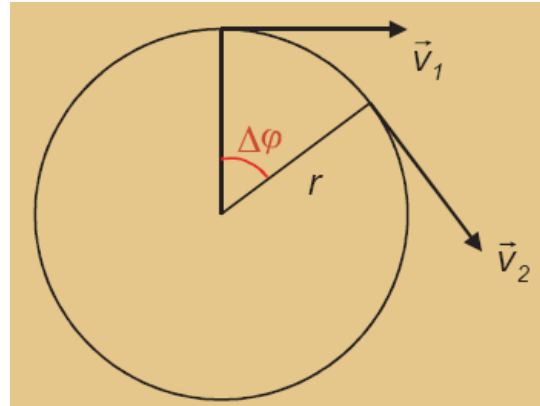



Figura 10: Vector velocidade no MC

Por esta razón denomínaselle **aceleración normal ou centrípeta**

O módulo da aceleración virá dado por $a = \Delta v / \Delta t$

Para poder achar o valor, fixémonos en que os dous triángulos formados na figura 11 son semellantes xa que o vector velocidade, de módulo v , é sempre perpendicular ao radio polo que se cumpre: $\Delta v / v = \Delta s / r$. Pero $\Delta s = v \Delta t$ xa que é o espazo percorrido. Substituíndo: $\Delta v / v = v \Delta t / r$, despexando: $\Delta v = v^2 \Delta t / r$ e dividindo ambos membros por Δt , temos: $\Delta v / \Delta t = v^2 / r$ ou o que é o mesmo:



$$a_c = v^2 / r$$

También podemos expresar a aceleración centrípeta en función da velocidade angular:

$$a_c = v^2 / r = (\omega r)^2 / r = \omega^2 r$$

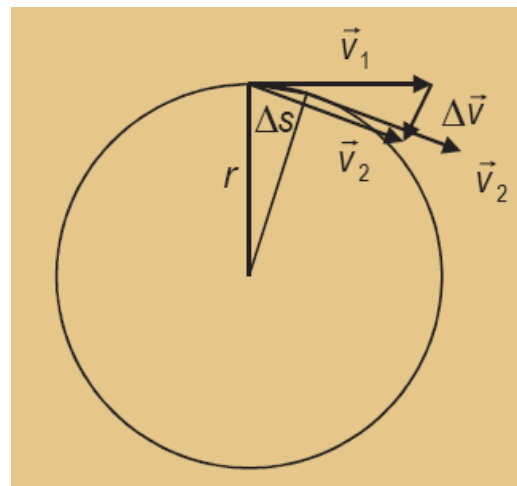


Figura 11: Aceleración centrípeta

Exemplo:

Un cabaliño dun carrusel que xira cunha velocidade angular de 1 radián por segundo atópase 4 m do centro. Calcular:

a) A velocidade lineal do cabaliño.

- b) O período e a frecuencia do seu movemento.
- c) A aceleración centrípeta.

Solución:

- a) **Sabemos que $v = \omega r = 1 \cdot 4 = 4 \text{ m/s}$**
- b) **O período será: $T = 2\pi / \omega = 2\pi / 1 = 6,28 \text{ s}$; A frecuencia é a inversa do período $f = 1 / T = 1 / 6,28 = 0,16 \text{ s}^{-1} \text{ (Hz)}$.**
- c) **A aceleración centrípeta: $a_c = v^2 / r = 4^2 / 4 = 4 \text{ m/s}^2$**

3.2. Movemento circular uniformemente acelerado

Se un obxecto que xira aumenta ou diminúe a súa velocidade angular (por exemplo, as rodas dun automóbil cando acelera ou frea) ten unha aceleración angular. O seu valor vén dado pola expresión $\alpha = \Delta\omega / \Delta t$

Este é o valor da aceleración angular durante un tempo determinado ou aceleración angular media.

Tamén podemos coñecer a aceleración angular instantánea que será:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\omega / \Delta t$$

Como vimos ao definir a velocidade instantánea, esta expresión é a derivada da velocidade angular con respecto ao tempo e represéntase por:

$$\alpha = d\omega / dt$$

Dado que estamos a estudar o movemento circular uniformemente acelerado, a aceleración é constante e polo tanto a aceleración instantánea ten o mesmo valor que a aceleración media e, en xeral, para calcular a aceleración neste tipo de movemento, tomando $t_0 = 0$, abondará con utilizar a fórmula:

$$\alpha = (\omega - \omega_0) / t$$

Se despexamos ω teremos que a velocidade angular valerá:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

A continuación imos obter a ecuación que nos dará o ángulo descrito:

$$\varphi = \omega_m t \quad \omega_m = \frac{\omega_0 + \omega}{2} = \frac{\omega_0 + \omega_0 + \alpha t}{2} = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha t \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Neste movemento tamén existe unha aceleración normal, igual que no movemento circular uniforme e o seu valor é o mesmo: $a_c = v^2 / r$, aínda que habemos de ter en conta que neste caso a velocidade non é constante e, polo tanto, tampouco é constante a aceleración normal.

A velocidade lineal do obxecto que realiza un movemento deste tipo tamén varía polo que haberá unha **aceleración tanxencial**:

$$a_t = \Delta v / \Delta t = \Delta \omega r / \Delta t = \alpha r$$

Exemplo:

Un motor que xira a 3000 rpm ten un volante de inercia de 10 cm de radio. Nun instante determinado, desconéctase o motor e o volante vai decelerando uniformemente ata se parar ao cabo de 2 minutos. Calcula:

- A aceleración angular do volante.
- A aceleración lineal dun punto da súa periferia.
- O número de voltas que deu antes de parar.

Solución:

En primeiro lugar pasamos todas as unidades ao Sistema Internacional:

$$2 \text{ min} = 120 \text{ s}$$

$$10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$3000 \text{ rev / min} = 3000 * (2 \pi \text{ rad} / 60 \text{ s}) = 100 \pi \text{ rad/s}$$

$$\text{a) Aceleración angular: } \alpha = (\omega - \omega_0) / t = 0 - 100 \pi / 120 = - 2,62 \text{ rad/s}^2$$

$$\text{b) Sabemos que } a = \alpha r = -2,62 * 0,1 = -0,26 \text{ m/s}^2$$

c) Atopamos o ángulo descrito.

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 100\pi \cdot 120 - \frac{1}{2} 2,62 \cdot 120^2 = 18835,11 \text{ rad}$$

e pasámolo a revolucións ou voltas $18835,11 \text{ rad} \times 1 \text{ rev} / 2 \pi \text{ rad} = 3000 \text{ rev}$

4. Composición de movementos

Imaxinemos que un pasaxeiro dun tren se cambiou de vagón no transcurso da viaxe. Se queremos coñecer o desprazamento que realizou, teremos que sumar o do movemento do tren e o do seu propio camiñar.

Sabemos que o desprazamento é un vector e que a suma de vectores goza de a propiedade conmutativa polo que é indiferente a orde na que a realicemos.

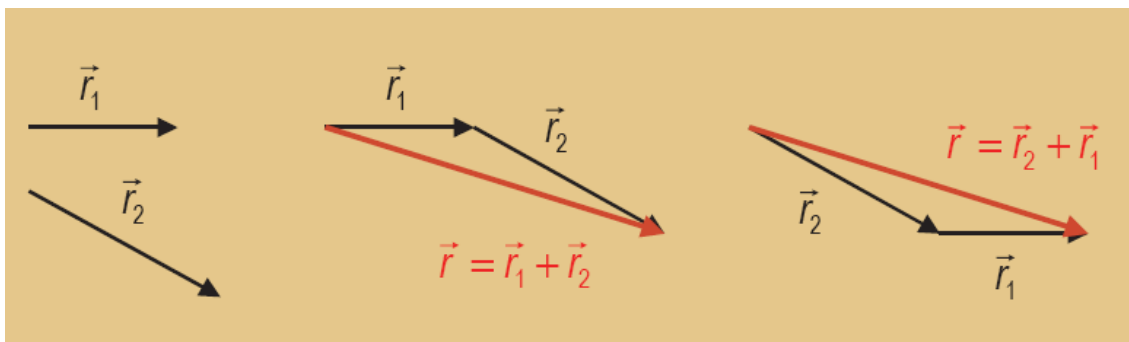


Figura 12: Principio de superposición

Tendo en conta isto, podemos enunciarse o **principio de superposición** que di "se unha partícula é sometida a varios desprazamentos independentes, o desprazamento resultante é a suma vectorial dos desprazamentos parciais, independentemente do momento en que se realicen".

Así mesmo, a velocidade coa que se despraza nun instante determinado será a suma vectorial das velocidades dos dous movementos e igualmente acontece coa a aceleración.

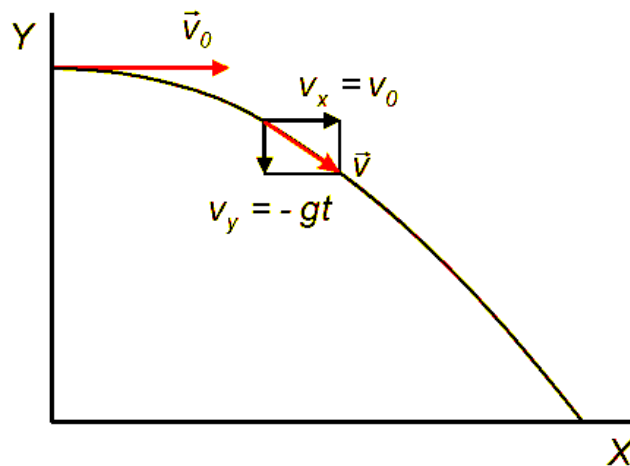
4.1. Lanzamento horizontal

Un exemplo típico de movemento composto por dous movementos independentes dáse cando se lanza un obxecto horizontalmente. A medida que o obxecto se afasta do punto de lanzamento vai caendo cara ao chan debido á atracción que a Terra exerce sobre el e que se manifesta pola aceleración da gravidade.

Así pois o corpo está sometido a dous movementos:

- Un horizontal, rectilíneo uniforme debido ao impulso que se lle subministró no momento do lanzamento.
- Outro vertical, rectilíneo uniformemente acelerado, en sentido descendente debido á aceleración da gravidade.

Estes dous tipos de movemento estudámoslos no epígrafe 2 polo que non teremos dificultade para achar as ecuacións que rexen o lanzamento horizontal.



Se representamos o movemento nun sistema de eixes cartesianos vemos que o movemento debido ao impulso inicial realízase no eixe X e o debido á aceleración da gravidade no eixe Y. Así pois as ecuacións que rexen este movemento serán:

$$\begin{array}{l} \text{Eixe X} \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidade: } V_x = V_0 \\ \text{Posición: } x = V_0 t \end{array} \right. \\ \text{Eixe Y} \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidade: } V_y = -gt \\ \text{Posición: } y = -\frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right. \end{array}$$

Imos coñecer unha serie de características moi interesantes sobre este movemento:

Tempo que tarda en chegar ao chan

Supoñamos que o corpo se lanza horizontalmente dende unha altura h cunha velocidade v_0 e que o chan é horizontal.

O corpo chegará ao chan xustamente cando descenda unha altura h , é dicir, cando a compoñente vertical y valla $-h$ (o movemento vertical neste caso é cara abaixo).

Logo: $-h = -\frac{1}{2}gt^2$ desdexando t , obtemos: $t = \sqrt{2h/g}$

Podemos observar que o tempo que tarda é o mesmo que se se soltase en caída libre dende unha altura h polo que non depende da velocidade inicial do lanzamento.

Alcance horizontal

Xa vimos o tempo que tarda en chegar ao chan polo que só teremos que substituír este valor na ecuación da compoñente horizontal:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Ecuación da traxectoria

Para achar esta ecuación abonda con eliminar t entre as ecuacións das posicións horizontal e vertical. Despexamos o tempo na ecuación $x = V_0 t$; $t = x / V_0$ e substituímos en $y = - \frac{1}{2} g t^2$ co que obtemos: $y = - \frac{1}{2} g (x/V_0)^2$ ou ben $y = - (g/2V_0^2) x^2$

Esta expresión corresponde á ecuación dunha parábola, aínda que normalmente se denomina movemento parabólico ao que estudaremos no apartado seguinte.

4.2. Lanzamento inclinado

Este movemento dáse cando se lanza un obxecto cun ángulo de inclinación α . Do mesmo modo que no apartado anterior, o movemento do corpo estará composto por o debido ao lanzamento e o debido á acción da gravidade.

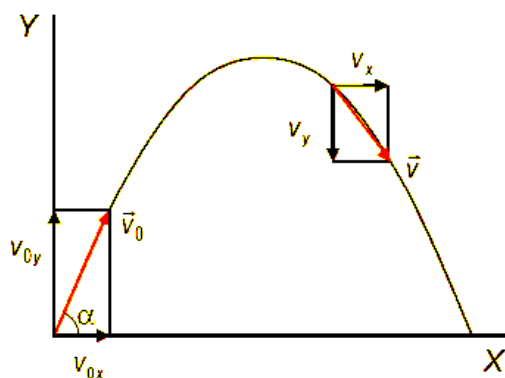


Figura 14: Movemento parabólico

Se fixamos a orixe de coordenadas no punto de lanzamento podemos ver que a velocidade inicial ten dúas compoñentes, unha horizontal que representamos no eixe X e outra vertical que representamos no eixe Y.

O movemento horizontal é uniforme xa que non existe aceleración nesta dirección, polo tanto:

$$\begin{array}{l} \text{Eixe X} \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidade: } V_x = V_0 \cos \alpha \\ \text{Posición: } x = (V_0 \cos \alpha) t \end{array} \right. \\ \text{Eixe Y} \left\{ \begin{array}{l} \text{Velocidade: } V_y = V_0 \sin \alpha - gt \\ \text{Posición: } y = (V_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} gt^2 \end{array} \right. \end{array}$$

Utilizando axeitadamente estas ecuacións podemos coñecer moitos aspectos interesantes sobre este movemento. Ademais, para ilustralo realizaremos, simultaneamente coa explicación teórica, un exemplo práctico no que se analizará con detalle o que acontece cando un porteiro dá unha patada ao balón que sae disparado cunha inclinación de 30° sobre a horizontal e unha velocidade inicial de 20 ms^{-1} . Desprezamos o rozamento do aire.

Altura máxima que alcanza

Durante o ascenso, a velocidade vai diminuíndo por acción a gravidade ata o instante en que se fai nula e comeza a descender. Polo tanto a altura máxima alcánzase cando o valor da velocidade no eixe Y sexa cero ($V_y = 0$)

Substituíndo na ecuación correspondente, temos: $0 = V_0 \sin \alpha - gt$

Se nesta ecuación despxamos t e substituímos na ecuación da posición vertical, obteremos a altura máxima alcanzada polo balón ou o punto máis alto da traxectoria:

$$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}; \text{ substituíndo: } y_{\max} = \frac{(20 \sin 30)^2}{2 \cdot 9,8} = 5,10 \text{ m}$$

Tempo que tarda en chegar ao chan

Esta situación dáse cando $y = 0$; substituíndo na ecuación correspondente, temos:

$$0 = (V_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} gt^2$$

Dado que é unha ecuación de segundo grao obtemos dúas solucións, unha de elas é $t = 0$, solución evidente, xa que nese instante o balón se atopa no chan porque aínda non se realizou o saque. A solución que buscamos é:

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}; \text{ substituíndo: } t = \frac{2 \cdot 20 \sin 30}{9,8} = 2,04 \text{ s}$$

Alcance máximo horizontal

O alcance máximo dáse cando o balón chega ao chan, supoñendo que este é horizontal, e no noso caso, debeo ser. Esta situación dáse para o valor de t que acabamos de calcular. Substituímos na ecuación da posición horizontal e obteremos o alcance máximo.

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad \text{substituíndo:} \quad x_{\max} = \frac{2 \cdot 20^2 \sin 30 \cos 30}{9,8} = 35,35 \text{ m}$$

Ángulo da traxectoria nun instante determinado

Na figura 14 podemos ver que para calquera instante cúmprese que $\tan \alpha = V_y / V_x$

No noso caso podemos calcular o ángulo da traxectoria para un tempo concreto; por exemplo, un segundo despois do saque: Calculamos V_x e V_y :

$$V_x = v_0 \cos \alpha = 20 \cos 30 = 17,32 \text{ ms}^{-1} ; \quad V_y = v_0 \sin \alpha - gt = 20 \sin 30 - 9,8 \cdot 1 = 0,2 \text{ ms}^{-1}$$

Vemos que V_y é moi pequena, debido a que neste tempo o balón está chegando ao punto máis alto da súa traxectoria.

Substituímos na ecuación: $\tan \alpha = V_y / V_x = 0,2 / 17,32 = 0,012$

de onde $\alpha = \arctg 0,012 = 0,69^\circ$

Tamén observamos que o ángulo é moi pequeno, isto indícanos que o balón está case no seu punto máis alto, no cal a traxectoria é horizontal.

Ecuación da traxectoria

Se na ecuación da posición horizontal despexamos t e substituímos na da posición vertical obtemos a ecuación da traxectoria:

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + (\tan \alpha)x = -\left(\frac{9,8}{2 \cdot 20^2 \cos^2 30}\right)x^2 + (\tan 30)x$$

Realizando operacións, obtemos: **$y = -0,016 x^2 + 0,58 x$**

Como podemos comprobar corresponde á ecuación dunha **parábola** e por isto se denomina movemento parabólico.