

Resumo tema 12

Experiencias aleatorias e sucesos

Moitos fenómenos observables teñen un resultado imprevisto: o xogo de tirar un dado ou unha moeda, extraer unha carta dun mazo de naipes, extraer números da Lotaría Primitiva, etc.. Este tipo de fenómenos denomínanse experiencias aleatorias e caracterízanse porque:

- a) o seu resultado é imprevisible
- b) podemos realizar o experimento tantas veces como queiramos, sempre nas mesmas condicións.

Chámase **espazo mostral** ao conxunto de todos os resultados dun experimento aleatorio e simbolizámolo pola letra E .

Denomínase **suceso** a cada un dos subconxuntos dun espazo mostral.

Os conxuntos \emptyset (baleiro) e E (espazo mostral) denomínanse **suceso imposible** e **suceso seguro**.

Cos sucesos podemos facer dúas operacións: a unión e a intersección. A **unión** de dous sucesos A e B é outro suceso que simbolizamos por $A \cup B$ e contén os sucesos elementais de A , de B ou de ambos os dous,

A **intersección** de dous sucesos A e B é outro suceso que simbolizamos por $A \cap B$ e contén os sucesos elementais que pertencen simultaneamente a A e a B .

Dous sucesos dinse **incompatibles** cando a súa intersección é o **suceso imposible**, \emptyset

É dicir, a **probabilidade dun suceso A** é igual á suma das probabilidades dos sucesos elementais que constitúen A . Logo,

$$P(A) = \frac{\text{N}^\circ \text{elementos de } A}{\text{N}^\circ \text{elementos de } E}$$

Este cociente chámase **Regra de Laplace**.

Probos independentes:

Se o resultado da primeira proba non inflúe na segunda, son probas independentes.

A probabilidade dun suceso elemental é igual ao produto das probabilidades das ramas que conducen a el. Pero ademais podemos afirmar que a probabilidade da intersección dos sucesos independentes, ou en probas independentes, é igual ao produto das probabilidades de cada un deles.

Probos dependentes

Se o resultado da primeira proba inflúe na segunda, son probas dependentes.

A probabilidade da intersección de dous sucesos dependentes, ou en probas dependentes, é igual ao produto da probabilidade dun deles pola probabilidade do outro condicionado polo primeiro.

Números combinatorios

O número total de subconxuntos simbolízase por $\binom{m}{n}$ e para calculalo empregamos

a fórmula

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

onde $m!$ chámase factorial de m e corresponde a $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Distribución de probabilidade dunha variable aleatoria discreta

Unha variable numérica que toma diferentes valores, dos que coñecemos ou podemos coñecer a probabilidade de que cada un aconteza, chámase unha **variable aleatoria discreta**.

Distribución binomial

Aos dous posibles resultados destas experiencias chamáremoslos éxito (E) e fallo (F). Suporemos que p é a probabilidade de **éxito** en cada proba e, polo tanto, $1 - p$ será a probabilidade de **fallo** en cada proba.

Definimos unha función de probabilidade para a variable aleatoria X , que conta o número de éxitos en n probas, así:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

Esta función recibe o nome de función de probabilidade dunha **distribución binomial** de n probas con probabilidade de éxito p , simbolicamente $B(n, p)$.

Distribucións de probabilidade dunha variable aleatoria continua. A distribución normal

Se $f(x)$ é unha **función de densidade** dunha variable X , entón ten as seguintes características:

- 1º) $f(x) \geq 0$, para todo x
- 2º) A área entre a gráfica de $f(x)$ e o eixe de abscisas é 1.
- 3º) A probabilidade $P[X = x] = 0$, para calquera valor, x , da variable aleatoria X .
- 4º) A función densidade só permite calcular probabilidades de intervalos $P[a < X < b] = \text{área limitada por } f(x) \text{ e } [a, b]$ e como $P[X = a] = P[X = b] = 0$, entón $P[a < X < b] = P[a \leq X \leq b]$

A distribución normal

Unha variable aleatoria continua, X , dise que está normalmente distribuída ou que segue unha distribución normal de **media** μ e **desviación típica** σ , e simbolízase por $N(\mu, \sigma)$, se a súa función densidade ten esta aparencia:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ con } -\infty < x < \infty$$

Tipificación da variable

Entón para achar $P[X < x]$, con X , $N(\mu, \sigma)$, transformamos a variable X noutra, que simbolizaremos por Z , que sexa $N(0,1)$. Esta transformación chámase **tipificación da variable**. En realidade, consiste en dúas operacións:

- 1º) Trasladar a gráfica de $f(x)$ ata que o eixe de ordenadas sexa o eixe de simetría.
- 2º) Achatar ou estirar a gráfica ata que σ sexa 1.

Estas operacións redúcense a cambiar a variable X por Z , onde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Aproximación da binomial por a normal

Se n é grande o cálculo de probabilidades nunha distribución binomial $B(n,p)$ pode ser demasiado laborioso. Cando isto acontece a distribución binomial pódese aproximar por unha normal, pero cales son os parámetros desta distribución normal?

Pódese demostrar que cando n é suficientemente grande a distribución binomial $B(n, p)$ pódese aproximar pola normal

$$N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p(1 - p)})$$