



# 12

## Distribucións de probabilidade

<b>1. PROBABILIDADE.....</b>	<b>2</b>
1.1. Experiencias aleatorias e sucesos. ....	2
1.2. Operacións con sucesos. ....	3
1.3. Probabilidade dun suceso. ....	4
1.4. Cálculo de probabilidades en experiencias de dúas ou máis probas. ....	5
<b>2. NÚMEROS COMBINATORIOS .....</b>	<b>7</b>
<b>3. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADE DUNHA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA. ....</b>	<b>8</b>
<b>4. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. ....</b>	<b>10</b>
<b>5. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADE DUNHA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.</b>	
<b>A DISTRIBUCIÓN NORMAL. ....</b>	<b>14</b>
5.1. Funcións de densidade. ....	14
5.2. A Distribución Normal. ....	15
5.3. Tipificación da variable. ....	16
5.4. Cálculo de probabilidades coa táboa N (0,1). ....	17
5.5. Aproximación da binomial pola normal. ....	20

Nas distribucións dunha variable estatística, Unidade 10, vimos que a cada valor da variable correspondíalle unha frecuencia, que ás veces expresabamos como unha frecuencia relativa; nas distribucións de probabilidade dunha variable discreta fágolle corresponder a cada valor da variable a probabilidade de que ese valor aconteza. Se a variable é continua, as cousas complícanse un pouco máis, porque a probabilidade de que un valor determinado aconteza é cero, e isto é así dado que a variable pode tomar infinitos valores.

En calquera caso, é necesario ter unha idea do que é probabilidade dun suceso, en experiencias aleatorias simples ou de varias probas, e do concepto de número combinatorio, e por aí imos comezar esta unidade. Logo, centraremos o noso estudo nunha distribución de probabilidade discreta: a distribución binomial; e nunha distribución de probabilidade continua: a distribución normal. Ambas as dúas son fundamentais no estudo da inferencia estatística que se verá nas Matemáticas de 2º curso de Bacharelato.

# 1. Probabilidade

## 1.1. Experiencias aleatorias e sucesos

Moitos fenómenos observables teñen un resultado imprevisto: o xogo de tirar un dado ou unha moeda, extraer unha carta dun mazo de naipes, extraer números da Lotaría Primitiva, etc.. Este tipo de fenómenos denomínanse experiencias aleatorias e caracterízanse porque:

- a) o seu resultado é imprevisible;
- b) podemos realizar o experimento tantas veces como queiramos, sempre nas mesmas condicións.

Chámase **espazo mostral** ao conxunto de todos os resultados dun experimento aleatorio e simbolizámolo pola letra  $E$ . A botar unha moeda e observar se sae cara ou cruz, o espazo mostral é  $E = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$ . Se tiramos un dado, o espazo mostral resulta ser  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ao elixir un naipe nunha baralla de 40 cartas, podemos supoñer que a cada unha lle asignamos un número distinto do 1 ao 40, entón o espazo mostral é:

$$E = \{1, 2, 3, 4, \dots, 39, 40\}$$

No xogo de lanzar dous dados o espazo mostral é:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,5)	(6,6)

Denomínase **suceso** a cada un dos subconxuntos dun espazo mostral.

Os sucesos como son subconxuntos pódense determinar enumerando os seus elementos ou mediante unha propiedade que cumpran exclusivamente os seus elementos. No xogo de botar un dado os subconxuntos  $A = \{1, 4, 5\}$  e  $B = \{\text{saír número par}\}$  son sucesos, é evidente que  $B = \{2, 4, 6\}$ . Os sucesos constituídos por un único elemento chámanse **sucesos elementais**. No espazo mostral  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  os subconxuntos:  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{5\}$  e  $\{6\}$  son sucesos elementais.

Os conxuntos  $\emptyset$  (baleiro) e  $E$  (espazo mostral) denomínase **suceso imposible** e **suceso seguro**.

Dicimos que, ao realizar un experimento aleatorio, se presenta un suceso  $A$  se o resultado do devandito experimento é un calquera dos sucesos elementais que pertencen a  $A$ . Por exemplo, se botamos un dado e o resultado é o suceso elemental  $\{4\}$ , ademais deste, preséntanse todos os sucesos que teñen o 4 como un dos seus elementos:  $A = \{\text{saír número par}\}$ ,  $B = \{\text{saír número maior que 3}\}$ , entre outros.

## Exemplo

1. No xogo de tirar dous dados e sumar as puntuacións, cales son os elementos do suceso  $A = \{\text{sumar } 3\}$  e do suceso  $B = \{\text{sumar } 11\}$ ?

**Solución:**  $A = \{\text{sumar } 3\} = \{(1,2) \text{ e } (2,1)\}$  e  $B = \{\text{sumar } 11\} = \{(5,6) \text{ e } (6,5)\}$ .

## 1.2. Operacións con sucesos

Cos sucesos podemos facer dúas operacións: a unión e a intersección. A **unión** de dous sucesos  $A$  e  $B$  é outro suceso que simbolizamos por  $A \cup B$  e contén os sucesos elementais de  $A$ , de  $B$  ou de ambos os dous,

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

A **intersección** de dous sucesos  $A$  e  $B$  é outro suceso que simbolizamos por  $A \cap B$  e contén os sucesos elementais que pertencen simultaneamente a  $A$  e a  $B$ ,

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Dous sucesos dinse **incompatibles** cando a súa intersección é o **suceso imposible**,  $\emptyset$

## Exemplos

2. Os conxuntos  $A = \{1,3,5\}$ ,  $B = \{1,2,3\}$  e  $C = \{4,5\}$  son sucesos do experimento de lanzar un dado.

Calcula  $A \cup B$ ,  $A \cup B \cup C$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cap A$ ,  $B \cap B$ ,  $B \cap C$ ,  $E \cup B$  e  $E \cap B$ .

**Solución:**

$$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\},$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$$

$$A \cap A = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\},$$

$$B \cap B = \{1,2,3\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$$

$$B \cap C = \{1,2,3\} \cap \{4,5\} = \emptyset, \text{ son incompatibles,}$$

$$E \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4,5,6\} = E$$

$$E \cap B = \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\} = B.$$

O **contrario** dun suceso  $A$  represéntase por  $\bar{A}$ , e realízase sempre e cando non suceda  $A$ . É obvio que o suceso contrario de  $\bar{A}$  é  $A$ .

Tamén é evidente que  $A$  e o que non é  $A$  constitúen todo o espazo mostral

$$A \cup \bar{A} = E$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$



## 1.3. Probabilidade dun suceso

Hai dous modos de atribuír probabilidade a un suceso:

- a) Mediante a frecuencia relativa do suceso, cando o número de veces que repetimos o experimento é moi grande.
- b) Admitindo como axiomas da probabilidade as afirmacións seguintes:
  1. A probabilidade dun suceso  $A$  é sempre un número real non negativo,  $P(A) \geq 0$ ,
  2. A probabilidade do suceso seguro  $E$  é 1,  $P(E) = 1$ ,
  3. Se  $A$  e  $B$  son sucesos incompatibles,  $A \cap B = \emptyset$   
a probabilidade da unión é igual á suma de  $P(A)$  e  $P(B)$ ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Estes axiomas unidos ao feito de que cada suceso elemental, dun espazo mostral  $E$  de  $m$  elementos, cando é previsible que teñan a mesma dispoñibilidade de saír, ten unha probabilidade de:

$$\frac{1}{N \text{ sucesos elementais}}$$

permiten atopar unha regra para calcular a probabilidade doutros sucesos.

Se  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  é un suceso, entón  $A = \{a\} \cup \{a\} \cup \{a\} \cup \dots \cup \{a\}$ ,  
que evidentemente son incompatibles dous a dous, polo tanto,

$$P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_n\}) = 1/m + 1/m + \dots + 1/m = n/m$$

É dicir, **a probabilidade dun suceso  $A$**  é igual á suma das probabilidade dos sucesos elementais que constitúen  $A$ . Logo,

$$P(A) = \frac{N^{\text{elementos de } A}}{N^{\text{elementos de } E}}$$

Os elementos de  $A$  chámanse resultados favorables á realización do suceso  $A$ , e os elementos do espazo mostral  $E$ : resultados posibles, e por isto acostúmase escribir:

$$P(A) = \frac{N^{\text{casos favorables}}}{N^{\text{casos posibles}}}$$

Este cociente chámase **Regra de Laplace**.

### Exemplos

3. Ao tirar un dado, ¿cal é a probabilidade de que saia número par? ¿cal é a probabilidade de que non saia número par? ¿e de que saia par e maior que 2?

### Solución:

O suceso saír par é  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $p(A) = 3/6 = 1/2$

O suceso non saír par é o contrario de A, é dicir,  $\bar{A}$  e  $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ , logo

Observamos que  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$  ou  $\bar{A} P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

O suceso saír maior que 2 é  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  e saír par e maior que 2 é  $A \cap B = \{4, 6\}$ ;

logo:  $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3$

4. Ao tirar un dado, ¿cal é a probabilidade de que saia un número primo?; ¿e de que saia un número primo e impar?; ¿cal é a probabilidade de que saia un número que non é primo nin impar?

### Solución:

O suceso saír número primo é  $A = \{2, 3, 5\}$  e  $P(A) = 3/6 = 1/2$

O suceso saír impar é  $B = \{1, 3, 5\}$  e saír primo e impar é  $A \cap B = \{3, 5\}$ ;  
logo:  $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3$

O suceso no primo é  $\bar{A} = \{4, 6\}$  e non impar  $\bar{B} = \{2, 4, 6\}$ ; logo

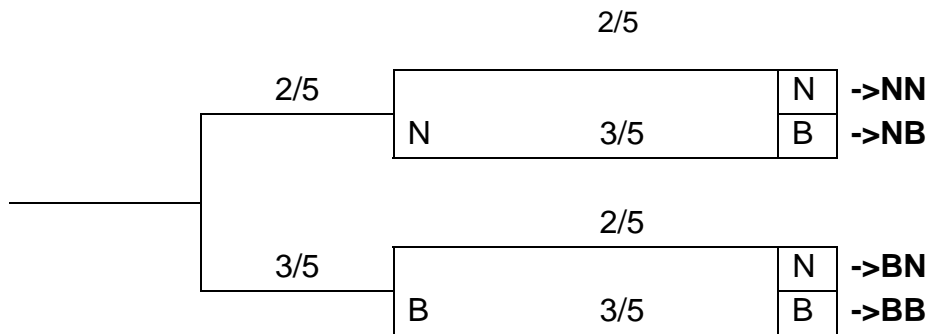
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 2/6 = 1/3$

## 1.4. Cálculo de probabilidades en experiencias de dúas ou máis probas

Cando realizamos experiencias con varias probas, tirar dous dados, ou un dado varias veces, extraer varias cartas dunha baralla, ou varias bólas dunha urna, para calcular a probabilidade dun suceso é importante coñecer se as probas son independentes ou, pola contra, afecta o resultado dunha na seguinte.

### **Probas independentes**

Analicemos un exemplo. Nunha urna hai cinco bólas de igual tamaño, 2 son negras e 3 brancas. Extráese unha bóla ao chou, **obsérvase e devólvese** á urna. **Seguidamente** repítese a mesma operación. Estamos ante unha experiencia aleatoria de dúas probas. **O resultado da primeira proba non inflúe na segunda, son probas independentes.** As dúas primeiras ramas do diagrama en árbore corresponden ás probabilidades da primeira extracción e as catro restantes ás probabilidades da segunda proba:



O espazo mostral deste xogo é:  $E = \{ BB, BN, NB, NN \}$  e a determinación da probabilidade dun suceso elemental faise mediante as probabilidades das ramas que conducen a el. Se queremos achar a probabilidade de extraer unha bóla branca seguida dunha negra,

$$P(BN) = 3/5 \cdot 2/5 = 6/25 = 0,24 == P(\{Blanca na 1^a\}) \cap (\{Negra na 2^a\})$$

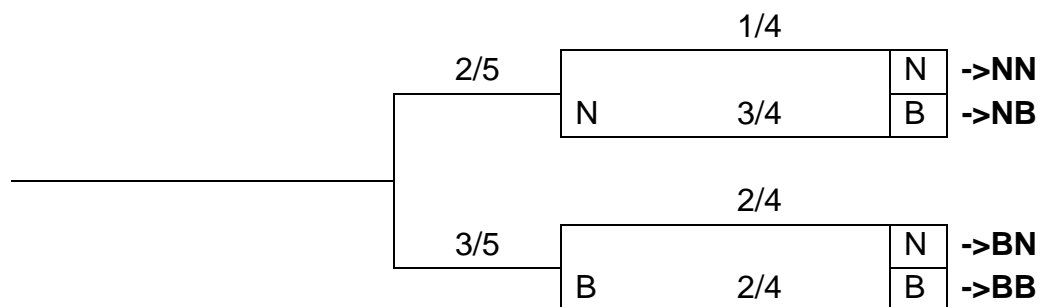
$$= P(\{Blanca na 1^a\}) \cdot P(\{Negra na 2^a\})$$

Polo tanto, podemos facer as seguintes consideracións:

**A probabilidade dun suceso elemental é igual ao produto das probabilidades das ramas que conducen a el. Pero ademais podemos afirmar que a probabilidade da intersección dos sucesos independentes, ou en probas independentes, é igual ao produto das probabilidades de cada un deles.**

### Probas dependentes

Se nunha urna hai cinco bólas de igual tamaño, 2 son negras e 3 brancas, e extraemos unha bóla ao chou, **obsérvase e non se devolve** á urna, entón na segunda extracción cambian as condicións iniciais do xogo. **O resultado da primeira proba inflúe na segunda, son probas dependentes.** As dúas primeiras ramas do diagrama en árbore corresponden ás probabilidades da primeira extracción e as catro restantes, agora con outros números, ás probabilidades da segunda proba:



Neste caso, se queremos calcular a probabilidade de extraer unha bóla branca seguida dunha negra, teremos:

$$P(BN) = P(\{Branca na 1^a\} \cap \{Negra na 2^a\}) = P(\{Branca na 1^a\}) \cdot$$

$$\cdot P(\{Negra na 2^a \text{ condicionado á saída Branca na } 1^a\}) = 3/5 \cdot 2/4 = 6/20 = 0,3$$

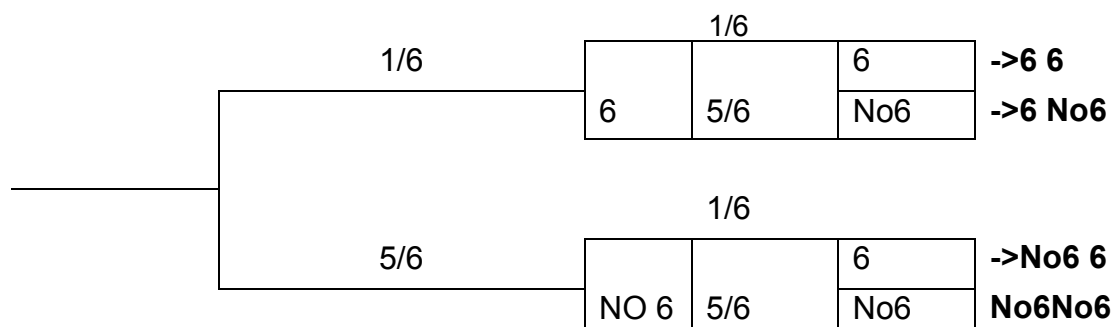
Por tanto, podemos facer a seguinte consideración:

**A probabilidade da intersección de dous sucesos dependentes, ou en probas dependentes, é igual ao produto da probabilidade dun deles pola probabilidade do outro condicionado polo primeiro.**

### Exemplos

5. Tírase un dado dúas veces, ¿cal é a probabilidade de que saia polo menos un 6?

**Solución:**



$$P(\text{Polo menos un 6}) = 1/6 \cdot 1/6 + 1/6 \cdot 5/6 + 5/6 \cdot 1/6 = 11/36$$

$$\text{Que é o mesmo que } P(\text{Polo menos un 6}) = 1 - P(\text{No saír 6}) = 1 - 5/6 \cdot 5/6 = 1 - 25/36 = 11/36.$$

6. Extráense simultaneamente dúas cartas dunha baralla de 40. Atopar a probabilidade de que saian dous ases.

**Solución:**

$$\begin{aligned} P(\text{Dos ases}) &= P(\{\text{As na 1ª}\} \cap \{\text{As na 2ª}\}) = \\ &= P(\{\text{As na 1ª}\}) \cdot P(\{\text{As na 2ª condicionado á saída As na 1ª}\}) = 4/40 \cdot 3/39 = 1/130 \end{aligned}$$

## 2. Números combinatorios

Imaxinemos unha urna con  $m$  bólas numeradas de 1 a  $m$ , e extraemos  $n$  bólas (con  $0 < n < m$ ) sen devolver ningunha á urna. Obtemos así un subconxunto de  $n$  elementos dun conxunto maior de  $m$  elementos. Cantos subconxuntos de  $n$  elementos hai nun conxunto maior de  $m$  elementos?

O número total de subconxuntos simbolízase por  $\binom{m}{n}$  e para calculalo empregamos

a fórmula  $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

onde  $m!$  chámase factorial de  $m$  e corresponde a

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

é dicir, o produto dos  $m$  primeiros números naturais, así:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 ; 7! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Observaremos, non obstante, unha convención  $0! = 1$  y  $1! = 1$ , con esta salvidade podemos calcular algúns números combinatorios

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \quad \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21$$

As calculadoras científicas dispoñen da tecla  $x!$  para calcular o factorial dun número, se a tecla está en cor vermella debemos pulsar antes é dicir,  $5!$ .

### Exemplos

7. Calcula  $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$

**Solucion:**

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!5!} = 1 \quad \binom{5}{1} = \frac{5!}{1!4!} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 1+5+10+10+5 = 31$$

## 3. Distribución de probabilidade dunha variable aleatoria discreta

Nos apartados anteriores falamos de sucesos en xeral, pero interésannos os experimentos aleatorios cuxos sucesos sexan identificables por un número; tal como acontece ao tirar dous dados e sumar as súas puntuacións ou lanzar 5 moedas e contar o número de caras, aínda que tamén son de natureza numérica: anotar, nun exame de 50 preguntas, o número de respostas correctas ou rexistrar o número de ovos rotos, por cada caixa de 12, dunha determinada granxa. En todos estes casos os sucesos son identificables por un número.



Unha variable numérica que toma diferentes valores, dos que coñecemos ou podemos coñecer a probabilidade de que cada un aconteza, chámase unha **variable aleatoria discreta**. As variables aleatorias simbolízanse por unha letra maiúscula como  $X$  (ou  $Y$  ou  $Z$ ), e asociada coa variable aleatoria hai unha función de probabilidade que nos informa da probabilidade de que  $X$  tome un determinado valor.

Unha distribución de probabilidade dunha variable aleatoria discreta é semellante a unha distribución de frecuencias dunha variable estatística, só que en vez de frecuencias relativas temos probabilidades.

No xogo de lanzar dous dados e sumar as súas puntuacións a distribución de probabilidade é a seguinte:

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A probabilidade de que neste xogo a suma sexa 3 simbolízase por

$$P[X=3]=2/36$$

En xeral, se

$X_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$P_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$		$p_n$

é unha distribución de probabilidade dunha variable aleatoria  $X$ , entón

$$P[X = x_1] = p_1$$

$$P[X = x_2] = p_2$$

$$P[X = \dots x_n] = p_n$$

onde  $p_i$  é un número comprendido entre 0 e 1,  $1 \geq p_i \geq 0$  e a suma dos  $p_i$  é a unidade

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

En ocasións, a probabilidade de que unha variable aleatoria  $X$  tome un determinado valor  $x$ ,  $P[X=x]$ , vén dado por unha función de probabilidade, como veremos no próximo apartado.

Sabemos que os parámetros principais dunha distribución estatística son a media,  $\bar{x}$ , e a desviación típica,  $s$ , e calcúlanse por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + \dots + x_n f_n}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2}$$

No caso das distribucións de probabilidade dunha variable aleatoria tamén podemos considerar a media, que simbolizamos pola letra grega  $\mu$ , e definimos como

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$



e a desviación típica, que simbolizamos pola letra grega  $\sigma$ , e definimos como

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 p_i - \mu^2}$$

### Exemplos

8. A táboa seguinte indica a distribución de probabilidade do xogo de lanzar 4 moedas e anotar o número de caras:

$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Calcular  $\mu$  e  $\sigma$ .

**Solución:**

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = 0 \cdot 1/16 + 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/16 = 2$$

A este número chamáselle tamén valor esperado ou esperanza matemática da variable.

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 p_i - \mu^2} = \sqrt{0 + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - 2^2} = 1$$

9. Calcular  $\mu$  e  $\sigma$  na distribución de probabilidade da suma das puntuacións de dous dados.

**Solución.** No xogo de tirar dous dados, a distribución vén dada pola táboa

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = 2 \cdot 1/36 + 3 \cdot 2/36 + \dots + 12 \cdot 1/36 = 252/36 = 7$$

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 p_i - \mu^2} = \sqrt{2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 12^2 \cdot \frac{1}{36} - 7^2} = 2,41$$

## 4. Distribución binomial

Supoñamos un experimento aleatorio que se poida repetir indefinidamente e que en cada proba só teña dous resultados. Experimentos deste tipo son: tirar unha moeda, onde unicamente sae cara ou cruz; tirar un dado e observar se sae 5 ou non; anotar o sexo dos recién nacidos dunha maternidade; rexistrar os resultados dun tenista contra outro determinado, etc.

**Aos dous posibles resultados destas experiencias chamáremoslos éxito (E) e fallo (F).**

Suporemos que  $p$  é a probabilidade de **éxito** en cada proba e, polo tanto,  $1 - p$  será a probabilidade de **fallo** en cada proba.

Se o experimento se repite  $n$  veces, ao anotar os resultados, obteñen unha palabra de lonxitude  $n$  formada polas letras E e F

E E F F E F E E F F F F E...

Estamos interesado en contar cantas palabras deste tipo conteñen  $x$  veces a letra E. Isto é equivalente a dicir: se temos  $n$  cuadrículas, de cantas maneiras distintas podemos situar  $x$  veces a letra E, unha por cuadrícula? Ou, mellor aínda, cantos subconxuntos de  $x$  elementos ten un conxunto de  $n$  elementos?

Esta última pregunta ten unha resposta coñecida, e é o número  $\binom{n}{x}$  combinatorio

Se agora nos preguntamos, cal é a probabilidade de obter  $x$  éxitos en  $n$  probas do experimento? ou, o que é o mesmo, cal é a probabilidade do suceso

$$A = E \cap E \dots \cap E \cap F \cap F \dots \cap F$$

$x$  veces                       $n-x$  veces

Como as probas son independentes, a probabilidade non varía dunha a outra proba, entón:

$$p(A) = p(E) \cdot p(E) \dots p(E) \cdot p(F) \cdot p(F) \dots p(F)$$

$x$  veces                       $n-x$  veces

$$p(A) = p \cdot p \dots p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \dots (1-p) = p^x (1-p)^{n-x}$$

$x$  veces                       $n-x$  veces

Ao haber  $\binom{n}{x}$  palabras de lonxitude  $n$  con  $x$  letras E e cada palabra ten unha

probabilidade de  $p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ , entón definimos unha función de probabilidade para a variable aleatoria  $X$ , que conta o número de éxitos en  $n$  probas, así:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Esta función recibe o nome de función de probabilidade dunha **distribución binomial** de  $n$  probas con probabilidade de éxito  $p$ , simbolicamente  $B(n, p)$ , e que tabulamos deste modo:

$x$	0	1	...	$k$	...	$n$
$P[X = x]$	$\binom{n}{0} (1-p)^n$	$\binom{n}{1} p (1-p)^{n-1}$	...	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	...	$\binom{n}{n} p^n$

Pódese demostrar que nunha distribución binomial  $B(n, p)$  a media e desviación típica veñen dadas polas fórmulas:

$$\mu = n \cdot p \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

### Exemplos

10. Nunha distribución binomial  $B(6; 0,25)$  calcular:

a)  $P[X=0]$  b)  $P[X=3]$  c)  $P[X=5]$  d)  $P[X>0]$  e)  $P[X \geq 0]$  f)  $P[X \geq 5]$



**Solución:**

$$\text{a) } P[X=0] = \binom{6}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^6 = 0,1779, \quad \text{b) } P[X=3] = \binom{6}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^3 = 0,1318,$$

$$\text{c) } P[X=5] = \binom{6}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75 = 0,0044, \quad \text{d) } P[X>0] = 1 - P[X=0] = 1 - 0,1779 = 0,8221.$$

$$\text{e) } P[X \geq 0] = 1 \quad \text{y} \quad \text{f) } P[X \geq 5] = \binom{6}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75 + \binom{6}{6} \cdot 0,25^6 \cdot 0,75^0 = 0,0044 + 0,0002 = 0,0046.$$

11. Nunha distribución binomial  $B(5; 0,3)$  calcular:

$$\text{a) } P[X \leq 2], \quad \text{b) } P[X \leq 4] \quad \text{c) } P[X \neq 0]$$

**Solución:**

$$\text{a) } P[X \leq 2] = \binom{5}{0} \cdot 0,7^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,3 \cdot 0,7^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^3 = 0,8369$$

$$\text{b) } P[X \leq 4] = \binom{5}{0} \cdot 0,7^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,3 \cdot 0,7^4 + \binom{5}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^3 + \binom{5}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7 = 0,9976$$

$$\text{ou tamén} \quad P[X \leq 4] = 1 - P[X=5] = 1 - \binom{5}{5} \cdot 0,3^5 = 0,9976.$$

$$\text{c) } P[X \neq 0] = 1 - P[X=0] = 1 - 0,1681 = 0,8319. \text{ Dado que os sucesos } [X \neq 0] \text{ e } [X=0] \text{ son contrarios.}$$

12. Se o 60% dos empregados dunha empresa están de acordo en que os salarios dependan da produtividade, e elíxese unha mostra de tres empregados, atopar unha táboa de distribución de probabilidade para a variable aleatoria que conta o número de empregados que están a favor desta forma retributiva. Calcula  $\mu$  e  $\sigma$ .

**Solución:**

Trátase dunha distribución binomial:

1º) en cada proba hai dous únicos resultados: estar de acordo ou non;

2º) o resultado de cada proba é independente do anterior;

3º) a probabilidade de atopar un empregado que estea a favor desta forma retributiva é constante  $p = 0,6$  e de que sexa contrario  $1-p = 0,4$ .

É, polo tanto, unha distribución binomial de parámetros  $n = 3$  e  $p = 0,6$ ,  $B(3; 0,6)$ , cuxa táboa é:

$x$	0	1	2	3
$P[X=x]$	$\binom{3}{0} \cdot 0,4^3$	$\binom{3}{1} \cdot 0,6 \cdot 0,4^2$	$\binom{3}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4$	$\binom{3}{3} \cdot 0,6^3$



Ademais,

$$\mu = n \cdot p = 3 \cdot 0,6 = 1,8 \text{ e}$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{3 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 0,8485$$

13. Nunha cidade, o 40% dos alumnos de que fan promoción a Bacharelato ten suspenso algunha materia de 4º ESO. Elíxense 6 alumnos de 1º de Bacharelato ao chou, cal é a probabilidade de que a metade deles teña algunha materia suspenso de ESO?

### Solución:

Trátase dunha distribución binomial: 1º) en cada proba hai dous únicos resultados: ter algunha suspenso ou non, 2º) o resultado de cada proba é independente do anterior, 3º) a probabilidade de atopar un alumno con algún suspenso é constante  $p = 0,4$ . É, polo tanto, unha distribución binomial de parámetros  $n = 6$  e  $p = 0,4$ ,  $B(6; 0,4)$ . A metade de 6 é 3, a probabilidade buscada é

$$P[X = 3] = \binom{6}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^3 = 0,2765$$

**Nota:** Cando os datos dun problema de distribución binomial non son extravagantes,  $n < 10$ , e  $p$  é un número múltiplo de 0,05, entón os valores da función de probabilidade están tabulados. O resultado deste exemplo leríase así na táboa de a distribución binomial ao final da unidade:

		$p$		
$n$	$x$	...	0,4	...
...	...	...	↓	...
6	0	...	...	...
	1	...	...	...
	2	...	...	...
	3	→	0,27648	...

Comprobar os resultados dos exemplos coa táboa da distribución binomial.



## 5. Distribucións de probabilidade dunha variable aleatoria continua. A distribución normal

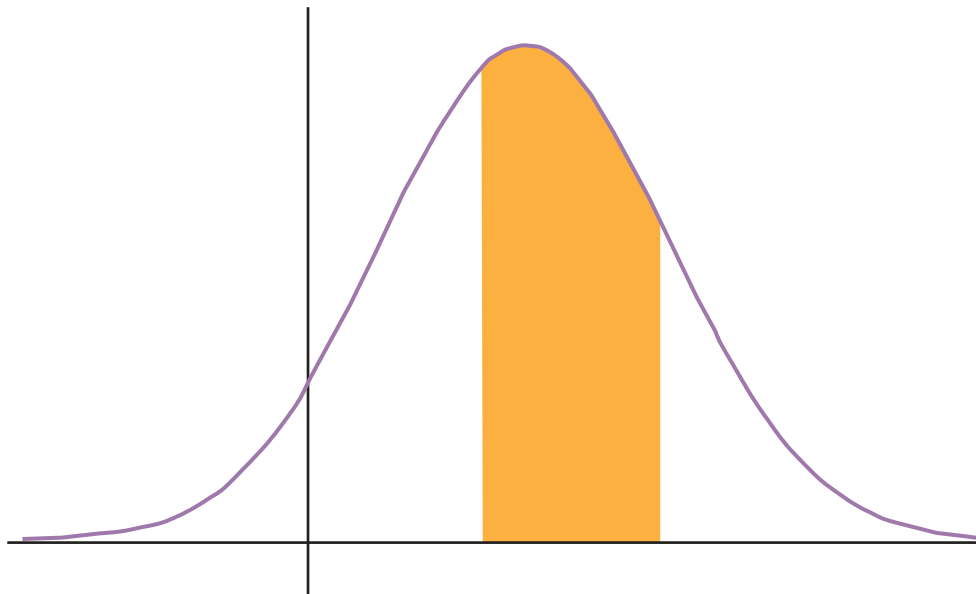
### 5.1. Funcións de densidade

Ao igual que as variables estatísticas continuas, as variables aleatorias continuas toman valores reais en certo intervalo. As variables aleatorias continuas teñen asociadas unha función de probabilidade que se chama función de densidade. Aínda que desempeñan o mesmo labor, existe unha gran diferenza entre a función de probabilidade dunha variable aleatoria discreta e a función densidade dunha variable aleatoria continua.

Se  $f(x)$  é unha **función de densidade** dunha variable  $X$ , entón ten as seguintes características:

- 1º)  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x$
- 2º) A área entre a gráfica de  $f(x)$  e o eixe de abscisas é 1.
- 3º) A probabilidade  $P[X = x] = 0$ , para calquera valor,  $x$ , da variable aleatoria  $X$ .
- 4º) A función densidade só permite calcular probabilidades de intervalos  
 $P[a < X < b] = \text{área limitada por } f(x) \text{ e } [a, b]$  e como  $P[X = a] = P[X = b] = 0$ , entón  
 $P[a < X < b] = P[a \leq X \leq b]$

Por este procedemento, calcular probabilidades equivale a calcular áreas como a da rexión sombreada da figura



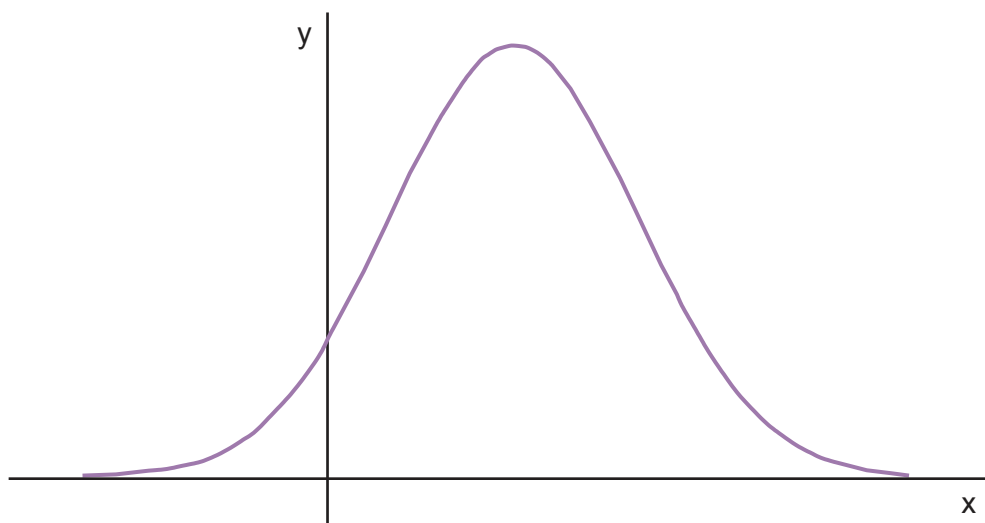
e isto obríganos a resolver integrais, o que excede o nivel deste curso.

## 5.2. A distribución normal

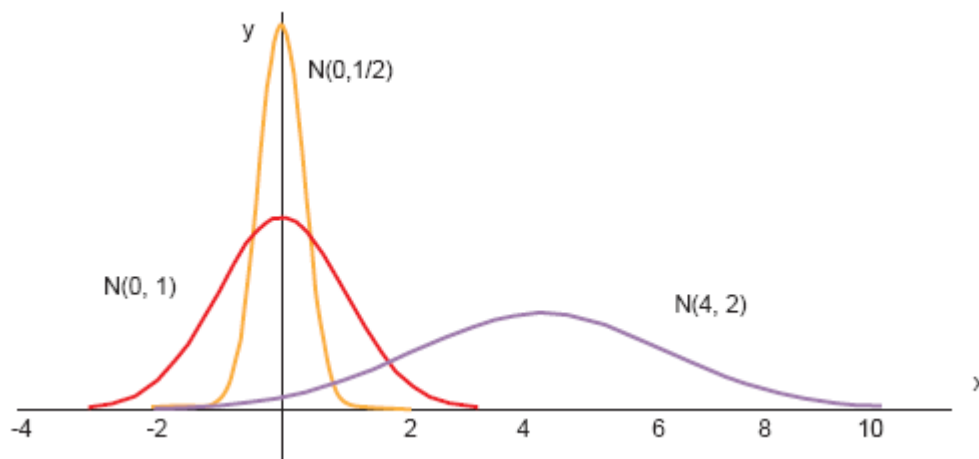
Unha variable aleatoria continua,  $X$ , dise que está normalmente distribuída ou que segue unha distribución normal de **media**  $\mu$  e **desviación típica**  $\sigma$ , e simbolízase por  $N(\mu, \sigma)$ , se a súa función densidade ten esta aparencia:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ con } -\infty < x < \infty$$

A pesar da súa aparencia temible, a gráfica desta función ten a forma dunha campá, chamada campá de Gauss, e é como a da figura:



Na fórmula de  $f(x)$  observamos que depende de  $\mu$  e de  $\sigma$ ; e un cambio nestes parámetros provoca unha deformación da campá. Cando  $\sigma$  aumenta a curva é máis achatada, ao estar máis dispersos os valores da variable; pola contra, cando  $\sigma$  é pequeno a dispersión é menor e a gráfica é máis esvelta, dado que os valores concéntranse arredor da media. Na figura debuxamos as funcións de densidade de  $N(0,1)$ ,  $N(0,1/2)$  e  $N(4,2)$ .



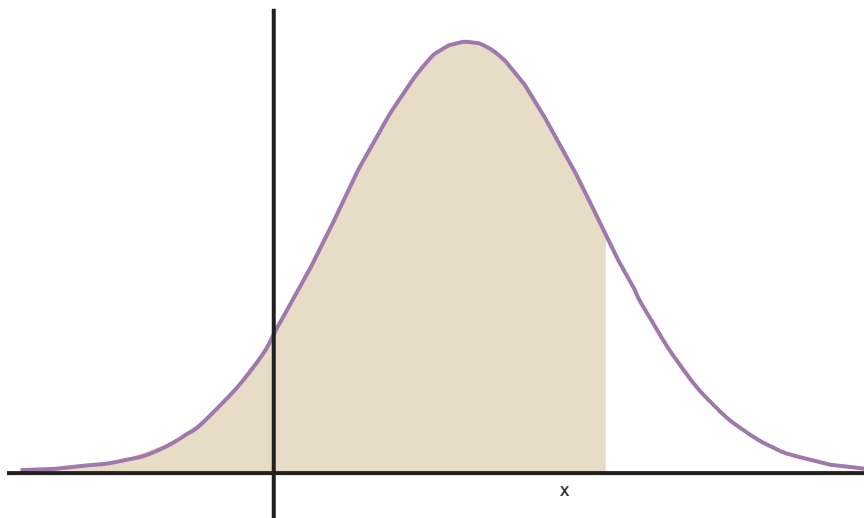
Esta función densidade ten algunhas características interesantes:

- 1º) Alcanza un **máximo** no punto  $\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$   
2º) É **simétrica** respecto á recta  $x = \mu$   
3º) Ten dous **puntos de inflexión** en  $x = \mu - \sigma$  e  $x = \mu + \sigma$   
4º) A **área limitada pola gráfica de  $f(x)$  e o eixe de abscisa é 1**, e como é simétrica respecto á recta  $x = \mu$ ; á dereita de  $\mu$  limita unha área de 0,5 e á esquerda de  $\mu$ , tamén.

## 5.3. Tipificación da variable

Se  $X$  está normalmente distribuída, a probabilidade de que  $X$  tome un valor menor ou igual que  $x$  é a área da rexión sombreada na figura

$$P[X \leq x] = \text{área sombreada na figura}$$



O cálculo desa área faise mediante unha integral, pero afortunadamente os valores destas integrais están tabulados; naturalmente non hai unha táboa para cada  $N(\mu, \sigma)$ , que son infinitas. Pero si hai unha táboa para  $N(0,1)$ .

Entón para achar  $P[X \leq x]$ , con  $X, N(\mu, \sigma)$ , transformamos a variable  $X$  noutra, que simbolizaremos por  $Z$ , que sexa  $N(0,1)$ . Esta transformación chámase **tipificación da variable**. En realidade, consiste en dúas operacións:

- 1º) Trasladar a gráfica de  $f(x)$  ata que o eixe de ordenadas sexa o eixe de simetría.
- 2º) Achar ou estirar a gráfica ata que  $\sigma$  sexa 1.

Estas operacións redúcense a cambiar a variable  $X$  por  $Z$ , onde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Esta transformación chámase tipificación da variable, e cúmprese que:

$$P[X \leq x] = P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right] = P\left[Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right]$$

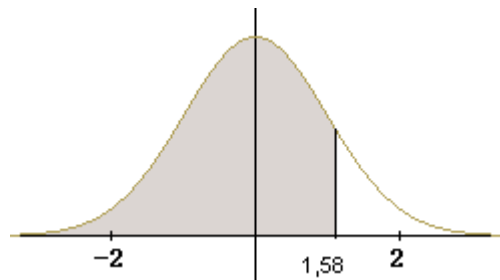


Veremos primeiro as táboas de Z,  $N(0,1)$ , e logo nos exemplos como calculamos probabilidades nunha normal calquera.

## 5.4. Cálculo de probabilidades coa táboa $N(0,1)$

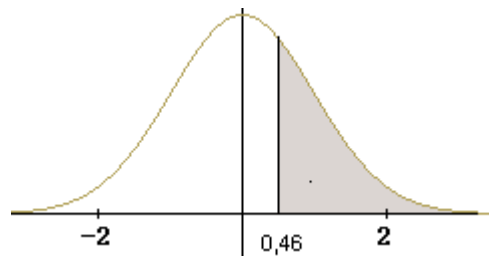
Estudaremos os diferentes casos que se poden presentar no manexo das táboas da  $N(0,1)$ , que aparecen ao final da unidade.

1.  $P[Z \leq 1,58] = 0,9429$



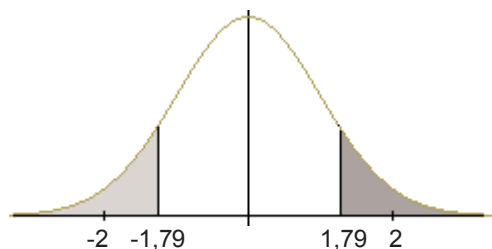
O número **0,9429** aparece na táboa na intersección da fila que empeza por 1,5 e a columna que encabeza 0,08; e significa que o 94,29% dos valores de Z están comprendidos entre  $-\infty$  y 1,58.

2.  $P[Z \geq 0,46] = 1 - P[Z \leq 0,46] = 1 - 0,6772 = 0,3228$



Na gráfica vemos que a probabilidade buscada corresponde á área sombreada e é igual á área total, 1, menos a área de  $P[Z \leq 0,46]$

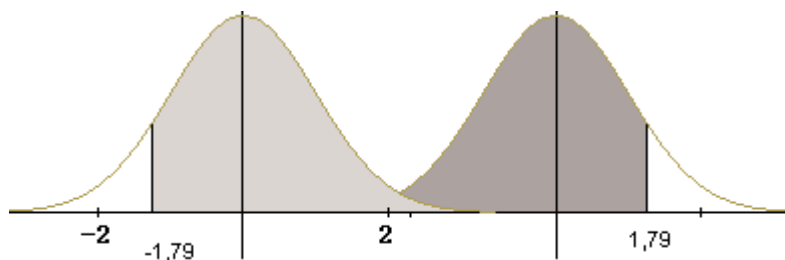
3.  $P[Z \leq -1,79] = P[Z \geq 1,79] = 1 - P[Z < 1,79] = 1 - 0,9633 = 0,0367$



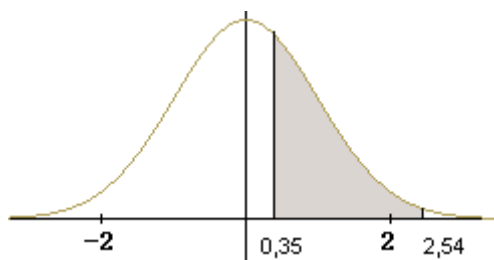
Na gráfica observamos que por simetría a área  $P[Z < -1,79]$  é igual que  $P[Z > 1,79]$

4.  $P[Z \geq -1,79] = P[Z \leq 1,79] = 0,9633$

Por simetría a área de  $P[Z > -1,79]$  é igual que  $P[Z < 1,79]$

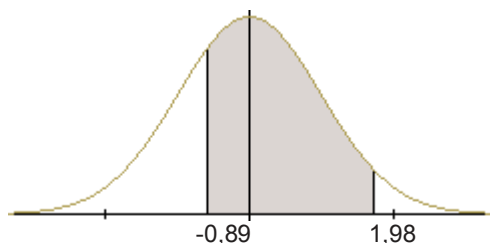


5.  $P[0,35 \leq Z \leq 2,54] = P[Z \leq 2,54] - P[Z \leq 0,35] = 0,9945 - 0,6368 = \mathbf{0,3577}$

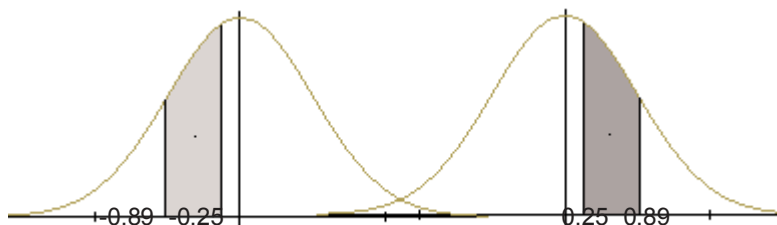


A área de  $P[0,35 < Z < 2,54]$  é a diferenza entre a área  $P[Z < 2,54]$  e a área  $P[Z < 0,35]$

6.  $P[-0,89 < Z < 1,98] = P[Z < 1,98] - P[Z < -0,89] = P[Z < 1,98] - (1 - P[Z < 0,89]) = 0,9761 - (1 - 0,8133) = \mathbf{0,7894}$



7.  $P[-0,89 < Z < -0,25] = P[0,25 < Z < 0,89] = P[Z < 0,89] - P[Z < 0,25] = 0,8133 - 0,5987 = \mathbf{0,2146}$



simetría, as áreas do intervalo negativo e do positivo son iguais.

## Exemplos

14. Calcula a)  $P[Z \leq 0,75]$ , b)  $P[Z \leq -0,75]$ , c)  $P[Z > 0,75]$  y d)  $P[Z > -0,75]$

**Solución:**

- a)  $P[Z < 0,75] = 0,7734$ , b)  $P[Z < -0,75] = P[Z < -0,75] = 1 - P[Z < +0,75]$   
 $= 1 - 0,7734 = 0,2266$ , c) Por simetría  $P[Z > 0,75] = 0,2266$ ,  
d)  $P[Z > -0,75] = P[Z < 0,75] = 0,7734$

15. Calcula a)  $P[0,75 < Z < 2,12]$ , b)  $P[-0,75 < Z < 2,12]$

**Solución:**

- a)  $P[0,75 < Z < 2,12] = P[Z < 2,12] - P[Z < 0,75] = 0,9830 - 0,7734 = 0,2096$ ,  
b)  $P[-0,75 < Z < 2,12] = P[Z < 2,12] - (1 - P[Z < +0,75]) = 0,9830 - 0,2266 = 0,7564$ .

16. Se  $X$  é unha variable aleatoria que segue unha distribución  $N(60,12)$ , calcula: a)  $P[X < 65]$ ,  
b)  $P[X > 65]$ , c)  $P[45 < X \leq 65]$

**Solución:**

Os números que aparezan ao tipificar, redondeámoslos a dúas cifras decimais.

$$a) P[X < 65] = P\left[\frac{X-60}{12} \leq \frac{65-60}{12}\right] = P\left[Z \leq \frac{5}{12}\right] = P[Z \leq 0,42] = 0,6628,$$

$$b) P[X > 65] = P\left[\frac{X-60}{12} > \frac{65-60}{12}\right] = P\left[Z > \frac{5}{12}\right] = P[Z > 0,42] = 1 - P[Z < 0,42] = 1 - 0,6628 = 0,3372.$$

$$c) P[45 < X \leq 65] = P\left[\frac{45-60}{12} < \frac{X-60}{12} \leq \frac{65-60}{12}\right] = P[-1,25 < Z \leq 0,42] =$$

$$= P[Z \leq 0,42] - P[Z < -1,25] = P[Z \leq 0,42] - (1 - P[Z < 1,25]) = 0,6628 - 0,1056 = 0,5572.$$

17. Sabendo que  $X$  é unha variable aleatoria que segue unha distribución  $N(10,3)$ , calcula o valor de  $x$  en cada caso: a)  $P[X < x] = 0,9761$ , b)  $P[X < x] = 0,5714$

**Solución:**

- a) Como  $P[X < x] = 0,9761 = P[(X-10)/3 < (x-10)/3] = P[Z < z]$ ; de  $P[Z < z] = 0,9761$ , descubrimos o valor de  $z$  con axuda das táboas e resulta que a 0,9761 correspóndelle 1,98, logo  $z = 1,98$ . Dado que  $z = (x-10)/3 = 0,98$ , despexando  $x$  obtemos  $x = 3 \cdot 1,98 + 10 = \mathbf{15,94}$   
b) Como  $P[X < x] = 0,5714 = P[(X-10)/3 < (x-10)/3] = P[Z < z]$ ; de  $P[Z < z] = 0,5714$ , descubrimos o valor de  $z$  con axuda das táboas e resulta que a 0,5714 correspóndelle 0,18, logo  $z = 0,18$ . Dado que  $z = (x-10)/3 = 0,18$  despexando  $x$  obtemos  $x = 3 \cdot 0,18 + 10 = \mathbf{10,54}$

18. As estaturas de 600 alumnos dun colexio distribúense normalmente con media 148 cm e desviación típica 12 cm. Calcular cantos alumnos non alcanzan os 160 cm e cantos hai cuxo talle está comprendida entre os 140 e os 160 cm. Que intervalo centrado en 148 contén o 60% dos alumnos?

### Solución:

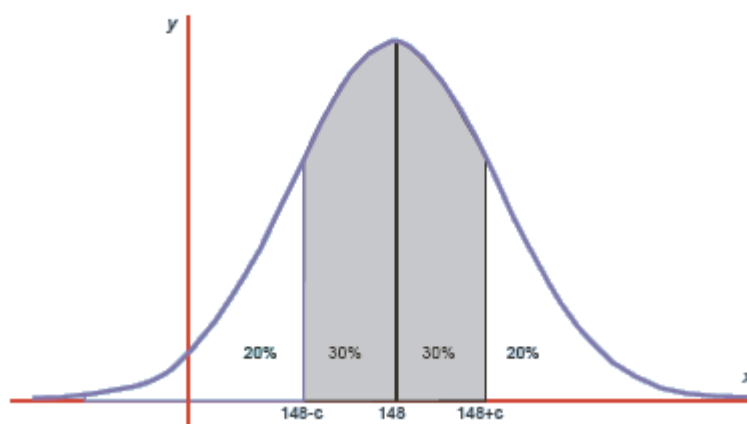
As estaturas distribúense segundo unha  $N(148, 12)$ . En primeiro lugar pídennos:  $P[X < 160]$  e  $P[X < 160] = P[(X - 148)/12 < (160 - 148)/12] = P[Z < 1] = 0,8413$  é dicir, o 84,13% dos alumnos non chega aos 160 cm. Como o 84,13% de 600 é  $0,8413 \cdot 600 = 504,7$  truncada a parte decimal, podemos dicir que **504 alumnos** non chegan aos 160 cm de altura.

En segundo lugar,  $P[140 < X < 160] = P[X < 160] - P[X < 140] = 0,8413 - P[Z < -0,66] = 0,8413 - (1 - 0,7454) = 0,5867$ .

É dicir, o 58,67% ten unha altura no intervalo  $[140, 160]$  e como  $0,5867 \cdot 600 = 352,02$ , hai 352 alumnos cuxo talle dos cales está comprendida entre os 140 e os 160 cm.

Por último, temos que calcular un número  $c$  tal que  $P[148 - c < X < 148 + c] = 60\% = 0,6$

### Graficamente



En consecuencia,  $P[X < 148 + c] = 60\% + 20\% = 0,6 + 0,2 = 0,8$

E tipificando  $P[Z < (148+c-148)/12] = P[Z < c/12] = 0,8$

Nas táboas  $N(0,1)$  vemos que o máis próximo a 0,8 é 0,7995 e corresponde  $z = 0,84$ , polo tanto despegando  $c = 0,84 \cdot 12 = 10,08$ . O intervalo que contén ao 60% dos alumnos é polo tanto  $[148 - 10,08, 148 + 10,08] = [137,92; 158,08]$ .

## 5.5. Aproximación da binomial por a normal

Se  $n$  é grande o cálculo de probabilidades nunha distribución binomial  $B(n, p)$  pode ser demasiado laborioso. Cando isto acontece a distribución binomial pódese aproximar por unha normal, pero cales son os parámetros desta distribución normal?

Pódese demostrar que cando  $n$  é suficientemente grande a distribución binomial  $B(n, p)$  pódese aproximar pola normal

$$N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p(1 - p)})$$

É evidente que estas condicións acontecen canto maior sexa  $n$  e canto máis preto estea  $p$  de 0,5.



## Exemplos

**19.** Sábese que un determinado fármaco produce efectos secundarios no 20% dos enfermos que se tratan con el. Tómase unha mostra de 50 enfermos aos que se lles administra o fármaco. Cal é a probabilidade de que haxa como máximo 8 enfermos que sufran efectos secundarios?

**Solución:**

A probabilidade buscada é

$$P[X \leq 8] = \binom{50}{0} 0,8^{50} + \binom{50}{1} 0,2 \cdot 0,8^{49} + \dots + \binom{50}{8} 0,2^8 \cdot 0,8^{42}$$

É obvio que calcular os oito sumandos e logo sumar é traballoso.

Como  $n \cdot p = 50 \cdot 0,2 = 10 > 5$  e  $n \cdot (1 - p) = 50 \cdot 0,8 = 40 > 5$ , podemos aproximar a  $B(50; 0,2)$

pola variable aleatoria  $Y$  que segue unha distribución

$$N(50 \cdot 0,2; \sqrt{50 \cdot 0,2 \cdot 0,8}) = N(10, 2,82)$$

entón, como a variable  $X$  é discreta e  $Y$  continua facemos unha corrección de 0,5, e resulta de modo aproximado que

$$P[X \leq 8] = P[Y \leq 8 + 0,5] = P\left[\frac{Y - 10}{2,82} \leq \frac{8,5 - 10}{2,82}\right] = P[Z \leq -0,53] = 1 - 0,7019 = 0,2981.$$

Cando sexa necesario calcular unha probabilidade puntual, que si é posible facer nunha binomial, procedemos así:

$$P[X = k] = P[k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5]$$



### Táboa da distribución binomial

n	x	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	0	0.99000	0.95000	0.90000	0.85000	0.80000	0.75000	0.70000	0.65000	0.60000	0.55000	0.50000
	1	0.01000	0.05000	0.10000	0.15000	0.20000	0.25000	0.30000	0.35000	0.40000	0.45000	0.50000
2	0	0.98010	0.90250	0.81000	0.72250	0.64000	0.56250	0.49000	0.42250	0.36000	0.30250	0.25000
	1	0.01980	0.09500	0.18000	0.25500	0.32000	0.37500	0.42000	0.45500	0.48000	0.49500	0.50000
	2	0.00010	0.00250	0.01000	0.02250	0.04000	0.06250	0.09000	0.12250	0.16000	0.20250	0.25000
3	0	0.97030	0.85738	0.72900	0.61413	0.51200	0.42188	0.34300	0.27463	0.21600	0.16638	0.12500
	1	0.02940	0.13538	0.24300	0.32513	0.38400	0.42188	0.44100	0.44363	0.43200	0.40838	0.37500
	2	0.00030	0.00713	0.02700	0.05738	0.09600	0.14063	0.18900	0.23888	0.28800	0.33413	0.37500
	3	0.00000	0.00013	0.00100	0.00338	0.00800	0.01563	0.02700	0.04288	0.06400	0.09113	0.12500
4	0	0.96060	0.81451	0.65610	0.52201	0.40960	0.31641	0.24010	0.17851	0.12960	0.09151	0.06250
	1	0.03881	0.17148	0.29160	0.36848	0.40960	0.42188	0.41160	0.38448	0.34560	0.29948	0.25000
	2	0.00059	0.01354	0.04860	0.09754	0.15360	0.21094	0.26460	0.31054	0.34560	0.36754	0.37500
	3	0.00000	0.00048	0.00360	0.01148	0.02560	0.04688	0.07560	0.11148	0.15360	0.20048	0.25000
	4	0.00000	0.00001	0.00010	0.00051	0.00160	0.00391	0.00810	0.01501	0.02560	0.04101	0.06250
5	0	0.95099	0.77378	0.59049	0.44371	0.32768	0.23730	0.16807	0.11603	0.07776	0.05033	0.03125
	1	0.04803	0.20363	0.32805	0.39150	0.40960	0.39551	0.36015	0.31239	0.25920	0.20589	0.15625
	2	0.00097	0.02143	0.07290	0.13818	0.20480	0.26367	0.30870	0.33642	0.34560	0.33691	0.31250
	3	0.00001	0.00113	0.00810	0.02438	0.05120	0.08789	0.13230	0.18115	0.23040	0.27565	0.31250
	4	0.00000	0.00003	0.00045	0.00215	0.00640	0.01465	0.02835	0.04877	0.07680	0.11277	0.15625
	5	0.00000	0.00000	0.00001	0.00008	0.00032	0.00098	0.00243	0.00525	0.01024	0.01845	0.03125
6	0	0.94148	0.73509	0.53144	0.37715	0.26214	0.17798	0.11765	0.07542	0.04666	0.02768	0.01563
	1	0.05706	0.23213	0.35429	0.39933	0.39322	0.35596	0.30253	0.24366	0.18662	0.13589	0.09375
	2	0.00144	0.03054	0.09842	0.17618	0.24576	0.29663	0.32414	0.32801	0.31104	0.27795	0.23438
	3	0.00002	0.00214	0.01458	0.04145	0.08192	0.13184	0.18522	0.23549	0.27648	0.30322	0.31250
	4	0.00000	0.00008	0.00122	0.00549	0.01536	0.03296	0.05954	0.09510	0.13824	0.18607	0.23438
	5	0.00000	0.00000	0.00005	0.00039	0.00154	0.00439	0.01021	0.02048	0.03686	0.06089	0.09375
	6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00006	0.00024	0.00073	0.00184	0.00410	0.00830	0.01563

7	0	0.93207	0.69834	0.47830	0.32058	0.20972	0.13348	0.08235	0.04902	0.02799	0.01522	0.00781
	1	0.06590	0.25728	0.37201	0.39601	0.36700	0.31146	0.24706	0.18478	0.13064	0.08719	0.05469
	2	0.00200	0.04062	0.12400	0.20965	0.27525	0.31146	0.31765	0.29848	0.26127	0.21402	0.16406
	3	0.00003	0.00356	0.02296	0.06166	0.11469	0.17303	0.22689	0.26787	0.29030	0.29185	0.27344
	4	0.00000	0.00019	0.00255	0.01088	0.02867	0.05768	0.09724	0.14424	0.19354	0.23878	0.27344
	5	0.00000	0.00001	0.00017	0.00115	0.00430	0.01154	0.02500	0.04660	0.07741	0.11722	0.16406
	6	0.00000	0.00000	0.00001	0.00007	0.00036	0.00128	0.00357	0.00836	0.01720	0.03197	0.05469
	7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00006	0.00022	0.00064	0.00164	0.00374	0.00781
8	0	0.92274	0.66342	0.43047	0.27249	0.16777	0.10011	0.05765	0.03186	0.01680	0.00837	0.00391
	1	0.07457	0.27933	0.38264	0.38469	0.33554	0.26697	0.19765	0.13726	0.08958	0.05481	0.03125
	2	0.00264	0.05146	0.14880	0.23760	0.29360	0.31146	0.29648	0.25869	0.20902	0.15695	0.10938
	3	0.00005	0.00542	0.03307	0.08386	0.14680	0.20764	0.25412	0.27859	0.27869	0.25683	0.21875
	4	0.00000	0.00036	0.00459	0.01850	0.04588	0.08652	0.13614	0.18751	0.23224	0.26266	0.27344
	5	0.00000	0.00002	0.00041	0.00261	0.00918	0.02307	0.04668	0.08077	0.12386	0.17192	0.21875
	6	0.00000	0.00000	0.00002	0.00023	0.00115	0.00385	0.01000	0.02175	0.04129	0.07033	0.10938
	7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00008	0.00037	0.00122	0.00335	0.00786	0.01644	0.03125
	8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00007	0.00023	0.00066	0.00168	0.00391
9	0	0.91352	0.63025	0.38742	0.23162	0.13422	0.07508	0.04035	0.02071	0.01008	0.00461	0.00195
	1	0.08305	0.29854	0.38742	0.36786	0.30199	0.22525	0.15565	0.10037	0.06047	0.03391	0.01758
	2	0.00336	0.06285	0.17219	0.25967	0.30199	0.30034	0.26683	0.21619	0.16124	0.11099	0.07031
	3	0.00008	0.00772	0.04464	0.10692	0.17616	0.23360	0.26683	0.27162	0.25082	0.21188	0.16406
	4	0.00000	0.00061	0.00744	0.02830	0.06606	0.11680	0.17153	0.21939	0.25082	0.26004	0.24609
	5	0.00000	0.00003	0.00083	0.00499	0.01652	0.03893	0.07351	0.11813	0.16722	0.21276	0.24609
	6	0.00000	0.00000	0.00006	0.00059	0.00275	0.00865	0.02100	0.04241	0.07432	0.11605	0.16406
	7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00029	0.00124	0.00386	0.00979	0.02123	0.04069	0.07031
	8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00010	0.00041	0.00132	0.00354	0.00832	0.01758
	9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00008	0.00026	0.00076	0.00195
10	0	0.90438	0.59874	0.34868	0.19687	0.10737	0.05631	0.02825	0.01346	0.00605	0.00253	0.00098
	1	0.09135	0.31512	0.38742	0.34743	0.26844	0.18771	0.12106	0.07249	0.04031	0.02072	0.00977
	2	0.00415	0.07463	0.19371	0.27590	0.30199	0.28157	0.23347	0.17565	0.12093	0.07630	0.04395
	3	0.00011	0.01048	0.05740	0.12983	0.20133	0.25028	0.26683	0.25222	0.21499	0.16648	0.11719
	4	0.00000	0.00096	0.01116	0.04010	0.08808	0.14600	0.20012	0.23767	0.25082	0.23837	0.20508
	5	0.00000	0.00006	0.00149	0.00849	0.02642	0.05840	0.10292	0.15357	0.20066	0.23403	0.24609
	6	0.00000	0.00000	0.00014	0.00125	0.00551	0.01622	0.03676	0.06891	0.11148	0.15957	0.20508
	7	0.00000	0.00000	0.00001	0.00013	0.00079	0.00309	0.00900	0.02120	0.04247	0.07460	0.11719
	8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00007	0.00039	0.00145	0.00428	0.01062	0.02289	0.04395
	9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0.00014	0.00051	0.00157	0.00416	0.00977
	10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00003	0.00010	0.00034	0.00098

### Táboa da distribución normal, $N(0,1)$

[illegible]