

Actividades de autoavaliación

1. No xogo ou experimento aleatorio de tirar un dado:

- a) cales son os elementos do suceso $A = \{ \text{saír un número menor ou igual que seis} \}$?
- b) cal é o suceso $B = \{ \text{saír un múltiplo de sete} \}$?
- c) como se chaman aos sucesos A e B deste xogo?

2. No xogo de lanzar un dado, cal é o contrario de $A = \{ \text{saír maior ou igual que 5} \}$?

Se $B = \{ \text{múltiplo de 3} \}$, ¿cal é o suceso $A \cap B$?

3. No xogo de lanzar dous dados describe os sucesos $A = \{ \text{sumar 7} \}$ e $B = \{ \text{saír polo menos un 6} \}$. Como son os sucesos $A \cup B$ e $A \cap B$? Cantos elementos ten o suceso A ?

4. No xogo de lanzar dous dados se $A = \{ \text{sumar 7} \}$, calcula a probabilidade do suceso A e do suceso A . ¿Cúmrese que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$?

5. Sexa $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ un espazo mostral e P unha medida de probabilidade en E definida por: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = 1/6$. Considéranse os sucesos $A = \{a, c, d, e\}$ e $B = \{d, e, f\}$. Calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ e $P(\bar{A})$

6. Calcula a) $\binom{6}{4}$ y $\binom{6}{2}$, b) $\binom{7}{2}$ y $\binom{7}{5}$ ¿Son os pares de números combinatorios iguais?

Comproba que a igualdade $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ é certa para cada valor que lle deamos a m e a n ($m > n$).

7. Escribe a táboa de distribución de probabilidade do xogo de tirar tres moedas e anotar o número de cruces. Calcula μ e σ .

8. A probabilidade de que un xogador de baloncesto faga canastra nos tiros libres é $1/4$. Se lanza 6 tiros libres, cal é a probabilidade de que faga polo menos 3 canastras?

9. Unha moeda tírase catro veces, cal é a probabilidade de que polo menos saian dúas caras?

10. Cal é a probabilidade de obter catro veces 5 se tiramos un dado sete veces?

11. Da experiencia acumulada sábese que un xogador de tenis A ten unha probabilidade de $1/3$ de gañar a outro B . Xogan un torneo a 5 partidos, ¿cal é a probabilidade de que A gañe máis de tres partidos?

12. Sábese que o 15% das lámpadas que produce unha máquina duran menos de 100 horas. Escóllense 4 lámpadas das que produce a máquina e se déixanse acendidas, cal é a probabilidade de que como máximo 3 se fundan antes de 100 horas?

- 13.** Segundo a herdanza xenética, a probabilidade de que un matrimonio teña un fillo con ollos azuis é $1/4$. Sabemos que un matrimonio ten 5 fillos, cal é a probabilidade de que como máximo haxa dous con ollos azuis?
- 14.** Unha enquisa revela que o 80% dos usuarios dunha liña de transporte público están satisfeitos do servizo. Elíxense 10 usuarios ao chou, cal é a probabilidade de que a metade deles estean descontentos co servizo?
- 15.** A probabilidade de que saia cara nunha moeda trucada é 0,45. Lánzase a moeda 7 veces. Calcular a probabilidade de que:
- a) saian exactamente 3 caras;
 - b) saian polo menos 3 caras;
 - c) saian como máximo 3 caras.
- 16.** A media anual de días de sol nunha cidade son 220 días, cunha desviación típica de 35 días. Supoñendo que a distribución sexa normal calcular a probabilidade de que nun ano non se superen os 200 días soleados.
- 17.** Nunha oposición necesítanse 30 puntos para aprobar. Sábese que as puntuacións obtidas polos alumnos seguen distribución normal con media 28 e desviación típica 8. Cal é a probabilidade de que un alumno aprobe? Se se presentaron 528 alumnos, cantos alumnos aprobarán?
- 18.** O tempo de atraso sobre o horario previsto nunha liña de autobuses segue unha distribución normal con media 8 minutos e desviación típica 3 minutos. Calcula: a) a probabilidade de que un autobús chegue con máis de 8 minutos de atraso, b) a probabilidade de que un autobús chegue sen atraso, c) a probabilidade de que chegue con menos de 5 minutos de atraso.
- 19.** Nun exame de Matemáticas cualificouse de 0 a 10 puntos, obtendo o 65% dos alumnos unha puntuación igual ou inferior a 6,5 puntos e o 10% dos alumnos puntuacións superiores a 7 puntos. Sabendo que a distribución das puntuacións é normal, calcular μ e σ .
- 20.** Para ascender a un posto de traballo mellor remunerado faise un exame a todos os empregados coa mesma cualificación dunha empresa. Sábese que as cualificacións seguen unha distribución normal de media 11,5 e desviación típica 3,75 puntos. Se só fixeron promoción de o 8% de presentados, que cualificación mínima obtiveron?
- 21.** Nunha empresa a porcentaxe de empregados con estudos superiores é a 35%. Elíxense 25 empregados ao chou para realizar un curso, cal é a probabilidade de que haxa polo menos 15 titulados superiores?; e a probabilidade de que haxa exactamente 10?



SOLUCIONS:

1. No xogo ou experimento aleatorio de tirar un dado:

- a) cales son os elementos do suceso $A = \{\text{saír un número menor ou igual que seis}\}$?
- b) cal é o suceso $B = \{\text{saír un múltiplo de sete}\}$?
- c) como se chaman aos sucesos A e B deste xogo?

Solución:

$$A = \{\text{menor o igual que } 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$$

$$B = \{\text{múltiplo } 7\} = \emptyset.$$

2. No xogo de lanzar un dado, cal é o contrario de $A = \{\text{saír maior ou igual que } 5\}$?
Se $B = \{\text{múltiplo de } 3\}$, ¿cal é o suceso $A \cap B$?

Solución:

$$A = \{5, 6\} \text{ y } \bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 6\} \text{ y } A \cap B = \{6\}.$$

3. No xogo de lanzar dous dados describe os sucesos $A = \{\text{sumar } 7\}$ e $B = \{\text{saír polo menos un } 6\}$. Como son os sucesos $A \cup B$ e $A \cap B$? Cantos elementos ten o suceso A ?

Solución:

$$A = \{\text{sumar } 7\} = \{(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)\}$$

$$B = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$$

$$\bar{A} \text{ ten } 36 - 6 = 30 \text{ elementos.}$$

4. No xogo de lanzar dous dados se $A = \{\text{sumar } 7\}$, calcula a probabilidade do suceso A e do suceso \bar{A} . ¿Cúmprese que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$?

Solución:

$$P(A) = 6/36 = 1/6, \quad P(\bar{A}) = 30/36. \text{ Si, porque } 1/6 + 30/36 = 1.$$

5. Sexa $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ un espazo mostral e P unha medida de probabilidade en E definida por: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = 1/6$. Considéranse os sucesos $A = \{a, c, d, e\}$ e $B = \{d, e, f\}$. Calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ e $P(\bar{A})$.

Solución:

$$P(A) = 4/6 = 2/3, \quad P(B) = 3/6 = 1/2, \quad P(A \cap B) = 2/6 = 1/3,$$

$$P(A \cup B) = 5/6, \quad P(\bar{A}) = 1/3.$$

6. Calcula a) $\binom{6}{4}$ y $\binom{6}{2}$, b) $\binom{7}{2}$ y $\binom{7}{5}$ ¿ Son os pares de números combinatorios iguais?

Comproba que a igualdade $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ é certa para cada valor que lle deamos a m e a n ($m > n$).

Solución:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15, \quad \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15, \quad \binom{7}{2} = 21, \quad \binom{7}{5} = 21,$$

7. Escribe a táboa de distribución de probabilidade do xogo de tirar tres moedas e anotar o número de cruces. Calcula μ e σ .

Solucion:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$, \quad \mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5,$$

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{0 + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - 1,5^2} = 0,87$$

8. A probabilidade de que un xogador de baloncesto faga canastra nos tiros libres é 1/4. Se lanza 6 tiros libres, cal é a probabilidade de que faga polo menos 3 canastras

Solucion:

Trátase dunha distribución B(6,14)

$$\begin{aligned} P[X \geq 3] &= P[X = 3] + P[X = 4] + P[X = 5] + P[X = 6] = \\ &= \binom{6}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^3 + \binom{6}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^2 + \binom{6}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75 + \binom{6}{6} \cdot 0,25^6 = 0,1694 \end{aligned}$$

Tambien podemos empregar o feito $P[X \geq 3] = 1 - P[X < 3]$.

9. Unha moeda tírase catro veces, ¿cal é a probabilidade de que polo menos saian dúas caras?

Solucion:

É unha distribución B(4, 1/2)

$$P[X \geq 2] = P[X = 2] + P[X = 3] + P[X = 4] = 0,6875$$

10. Cál é a probabilidade de obter catro veces 5 se tiramos un dado sete veces?

Solucion:

É unha distribución $B(7, 1/6)$

$$P[X = 4] = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,0156$$

11. Da experiencia acumulada sábese que un xogador de tenis A ten unha probabilidade de $1/3$ de gañar a outro B. Xogan un torneo a 5 partidos, ¿ cal é a probabilidade de que A gañe máis de tres partidos?

Solucion:

Trátase dunha $B(5, 1/3)$ e calculamos

$$P[X > 3] = P[X = 4] + P[X = 5] = 0,0453$$

12. Sábese que o 15% das lámpadas que produce unha máquina duran menos de 100 horas. Escóllense 4 lámpadas das que produce a máquina e se déixanse acendidas, cal é a probabilidade de que como máximo 3 se fundan antes de 100 horas?

Solucion:

É unha $B(4, 0,15)$ e calculamos $P[X \leq 3] = 1 - P[X = 4] = 1 - 0,0005 = 0,9995$

13. Segundo a herdanza xenética, a probabilidade de que un matrimonio teña un fillo con ollos azuis é $1/4$. Sabemos que un matrimonio ten 5 fillos, cal é a probabilidade de que como máximo haxa dous con ollos azuis?

Solucion:

É unha distribución $B(5, 1/4)$ e calculamos

$$P[X \leq 2] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] = 0,8965$$

14. Unha enquisa revela que o 80% dos usuarios dunha liña de transporte público están satisfeitos do servizo. Elíxense 10 usuarios ao chou, cal é a probabilidade de que a metade deles estean descontentos co servizo?

Solucion:

É unha distribución $B(10; 0,8)$ e queremos calcular $P[X = 5] = \binom{10}{5} (0,8)^5 \cdot (0,2)^5 = 0,0264$

15. A probabilidade de que saia cara nunha moeda trucada é 0,45. Lánzase a moeda 7 veces. Calcular a probabilidade de que:

- a) saian exactamente 3 caras;
- b) saian polo menos 3 caras;
- c) saian como máximo 3 caras

Solucion:

Trátase dunha distribución $B(7; 0,45)$ e queremos calcular

$$P[X = 3] = \binom{7}{3} (0,45)^3 \cdot (0,55)^4 = 0,2918, \quad P[X \geq 3] \quad \text{y} \quad P[X \leq 3]$$

16. A media anual de días de sol nunha cidade son 220 días, cunha desviación típica de 35 días. Supoñendo que a distribución sexa normal calcular a probabilidade de que nun ano non se superen os 200 días soleados.

Solucion:

É unha $N(220, 35)$ e calculamos $P[X \leq 200]$, tipificando

$$P\left[Z \leq \frac{200 - 220}{35}\right] = P[Z \leq -0,57] = 1 - P[Z \leq 0,57] = 1 - 0,7157 = 0,2843.$$

17. Nunha oposición necesítanse 30 puntos para aprobar. Sábese que as puntuacións obtidas polos alumnos seguen distribución normal con media 28 e desviación típica 8. Cal é a probabilidade de que un alumno aprrobe? Se se presentaron 528 alumnos, cantos alumnos aprobarán?

Solucion:

É unha $N(28,8)$ e calculamos $P[X \geq 30] = 0,4013$, $0,4013 \cdot 528 = 211,88$.

18. O tempo de atraso sobre o horario previsto nunha liña de autobuses segue unha distribución normal con media 8 minutos e desviación típica 3 minutos.

Calcula:

- a) a probabilidade de que un autobús chegue con máis de 8 minutos de atraso,
- b) a probabilidade de que un autobús chegue sen atraso,
- c) a probabilidade de que chegue con menos de 5 minutos de atraso.

Solucion:

Trátase dunha $N(8,3)$ e calculamos:

$$\text{a) } P[X > 8] = 0,5 \quad \text{b) } P[X \leq 0] = 0,0039 \quad \text{c) } P[X < 5] = 0,1587$$

19. Nun exame de Matemáticas cualificouse de 0 a 10 puntos, obtendo o 65% dos alumnos unha puntuación igual ou inferior a 6,5 puntos e o 10% dos alumnos puntuacións superiores a 7 puntos. Sabendo que a distribución das puntuacións é normal, calcular μ e σ .

Solucion:

É unha $N(\mu, \sigma)$ da que coñecemos $P[X \leq 6,5] = 0,65$ y $P[X > 7] = 0,1$. Tipificando:

$$P\left[Z \leq \frac{6,5 - \mu}{\sigma}\right] = 0,65, \quad P\left[Z > \frac{7 - \mu}{\sigma}\right] = 0,1$$

buscamos nas táboas os valores de z que cumpren estas condicións e obtemos o sistema

$$\frac{6,5 - \mu}{\sigma} = 0,39$$

$$\frac{7 - \mu}{\sigma} = 1,28$$

cuxas solucións $\mu = 6,28$, $\sigma = 0,56$.

20. Para ascender a un posto de traballo mellor remunerado faise un exame a todos os empregados coa mesma cualificación dunha empresa. Sábese que as cualificacións seguen unha distribución normal de media 11,5 e desviación típica 3,75 puntos. Se só fixeron promoción de o 8% de presentados, que cualificación mínima obtiveron?

Solucion:

En unha $N(11,5; 3,75)$ temos que achar o x tal que

$$P[X > x] = 0,08, \text{ tipificando } P\left[Z > \frac{x - 11,5}{3,75}\right] = 0,08, \text{ como } 0,08 < 0,5, \text{ entón } \frac{x - 11,5}{3,75} \text{ é}$$

$$\text{negativo e } P\left[Z > \frac{x - 11,5}{3,75}\right] = 1 - P\left[Z < -\frac{x - 11,5}{3,75}\right] = 0,08, \quad P\left[Z < -\frac{x - 11,5}{3,75}\right] = 1 - 0,08 = 0,92.$$

O valor mais próximo a 0,92 3s 0,9207 e corresponde a $z = 1,41$ De $-\frac{x - 11,5}{3,75} = 1,41$,

obtemos $x = 6,21$. A calificación mínima foi 6,21

21. Nunha empresa a porcentaxe de empregados con estudos superiores é a 35%. Elíxense 25 empregados ao chou para realizar un curso, cal é a probabilidade de que haxapolo menos 15 titulados superiores?; e a probabilidade de que haxa exactamente 10?

Solucion:

Nunha $B(25; 0,35)$ que aproximaremos por unha $N(25 \cdot 0,35, \sqrt{25 \cdot 0,35 \cdot 0,65}) = N(8,75; 2,38)$, temos que calcular

$$P[X < 15] = P[Y < 15 - 0,5] = P[Z < 2,41]$$

$$P[X = 10] = P[10 - 0,5 < Y < 10 + 0,5] = P[0,31 < Z < 0,73]$$