

9

Aplicacións da derivada

ÍNDICE DE CONTIDOS

1. CRECEMENTO E DECRECEMENTO DAS FUNCIÓNS.	1
2. EXTREMOS DAS FUNCIÓNS: MÁXIMOS E MÍNIMOS.	2
3. FUNCIÓNS DERIVABLES.	4
3.1. Crecemento e decrecemento para funcións derivables.	4
3.2. Máximos e mínimos para funcións derivables.	5
4. PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS.	7
5. CONCAVIDADE E CONVEXIDADE: PUNTOS DE INFLEXIÓN.	8
6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIÓNS POLINÓMICAS.	11
6.1. Funcións polinómicas de grao superior a dous.	12

Na presente Unidade estudamos a monotonía (crecemento e decrecemento das funcións), así como os seus máximos e mínimos, estes conceptos teñen moitas aplicacións en economía xa que aparecen ligados aos conceptos custo mínimo e máximo produción; o estudo da monotonía e dos máximos e mínimos das funcións realízase con facilidade despois do concepto de derivada estudado na Unidade anterior.

Utilizaranse os conceptos de máximos e mínimos para resolver problemas de optimación.

Unha vez adquiridos os coñecementos anteriores, aplicarémoslos á representación de funcións, xa que as gráficas nos achegan unha visión rápida e clara do comportamento das funcións

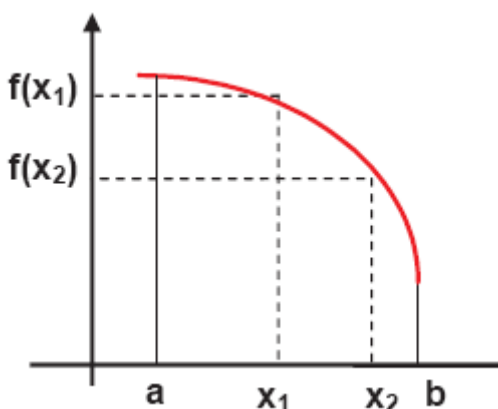
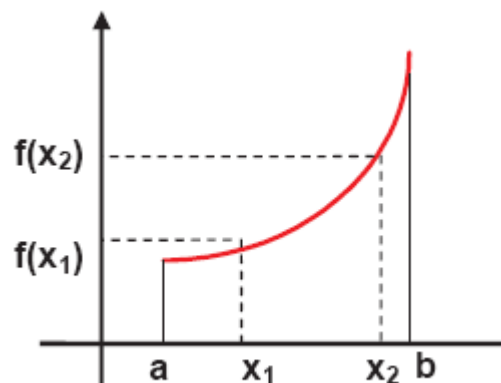
1. Crecemento e decrecemento das funcións

Ao percorrer de esquerda a dereita a gráfica da función representada debaixo do texto obsérvase que vai cara a arriba; é dicir, o valor da ordenada da función crece. É un exemplo de **función crecente**.

Unha función f é **crecente** nun intervalo (a, b) cando para calquera par de valores x_1 e x_2 do intervalo, tales que $x_1 < x_2$, cúmprese que $f(x_1) < f(x_2)$.

Se coas condicións para a variable $x_1 < x_2$, cúmprese a desigualdade estrita para a función; é dicir $f(x_1) < f(x_2)$ dise que a función é **estrictamente crecente**.

Na gráfica da función representada debaixo do texto, obsérvase o contrario; é dicir, ao percorrer a gráfica de esquerda a dereita o valor da ordenada da función decrece, é un exemplo de **función decrecente**.



Unha función f é **decrecente** nun intervalo (a, b) cando para calquera par de valores x_1 e x_2 do intervalo, tales que $x_1 < x_2$, cúmprese que $f(x_1) > f(x_2)$.

Como no caso anterior, se para $x_1 < x_2$ a desigualdade é estrita para os valores da función; é dicir $f(x_1) > f(x_2)$ dise que a función é **estrictamente decrecente**.

Cando as funcións son crecentes ou decrecentes en todo o dominio, chamámolas **funcións monótonas**. As funcións

representadas na gráficas anteriores son funcións monótonas.

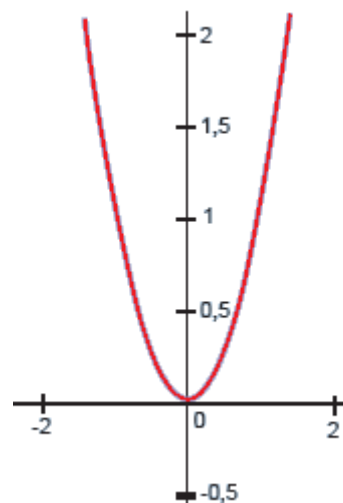
Exemplos

1. Estudar o crecemento e decrecemento da función $y = x^2$.

Solución:

Tomanse dous puntos $x_1 < x_2 < 0$ do intervalo $(-\infty, 0)$; elévase ao cadrado a desigualdade e tense en conta que os valores son negativos; polo tanto $x_1^2 > x_2^2$ o que indica que a función é decrecente no devandito intervalo.

Tómanse dous puntos $0 < x_1 < x_2$ do intervalo $(0, \infty)$; elévase ao cadrado a desigualdade e resulta $x_1^2 < x_2^2$; o que indica que a función é crecente no devandito intervalo.



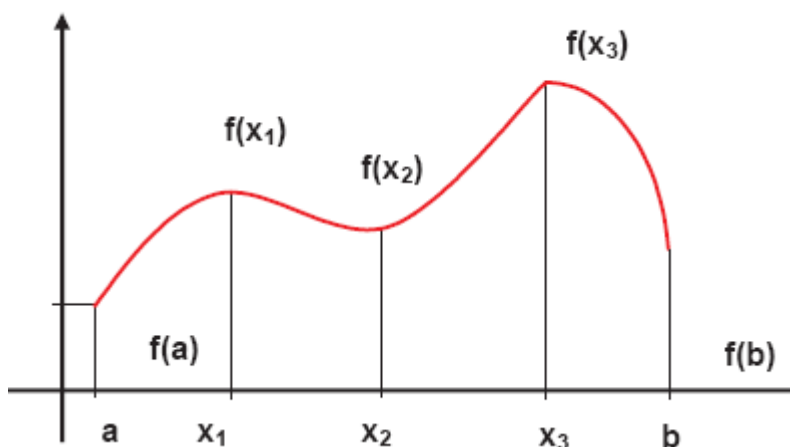
2. Extremos das funcións: máximos e mínimos

Ao percorrer de esquerda a dereita a gráfica a función f definida no intervalo pechado $[a, b]$ e representada aquí pódese observar:

O valor $f(a)$ é o menor valor que toma a función no intervalo $[a, b]$

O valor $f(x_3)$ é o maior valor que toma a función no intervalo $[a, b]$.

Os valores $f(a)$ e $f(x_3)$ son os **extremos absolutos** da función f no intervalo $[a, b]$; $f(a)$ é o **mínimo absoluto** e $f(x_3)$ é o **máximo absoluto** da función f . A partir destas observacións definimos:



Unha función presenta un **máximo absoluto** en x_0 se $f(x) < f(x_0)$ para calquera x que pertenza ao dominio.

Unha función presenta un **Mínimo absoluto** en x_0 se $f(x) > f(x_0)$ para calquera x que pertenza ao dominio.

Exemplo

2. Representa graficamente a función $y = x^2 - 2x - 8$ e calcula os seus máximos e mínimos absolutos no intervalo $[0, 5]$

Solución:

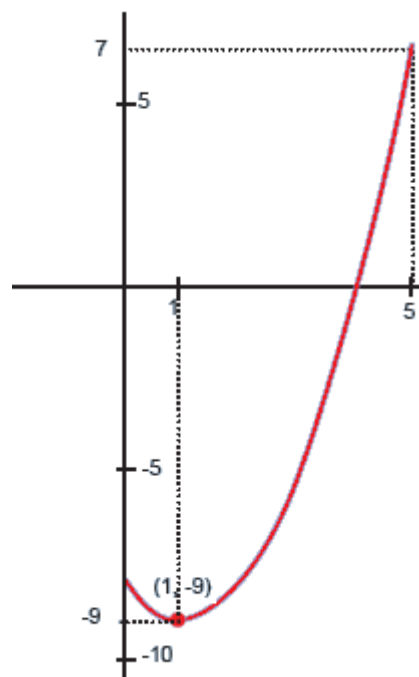
Represéntase a función, neste caso é unha parábola cuxo vértice é $x = 2/2 = 1$ e $y = -9$; o vértice é o punto $(1, -9)$

Danse valores a x para construír unha táboa

x	0	1	2	3
y	-8	-9	-8	-1

O máximo absoluto atópase en $x=5$ e o seu valor é $y=7$.

O mínimo absoluto atópase no vértice e dicir en $x = 1$ e o seu valor é $y = -9$



Outras observacións da primeira figura deste apartado son:

O valor $f(x_1)$ é maior que todos os valores próximos a el.

O valor $f(x_2)$ é menor que todos os valores próximos a el.

O valor $f(x_3)$ é maior que todos os valores próximos a el.

Os valores $f(x_1)$, $f(x_2)$ e $f(x_3)$ son **extremos relativos** da función f no intervalo $[a, b]$.

Os valores $f(x_1)$ e $f(x_3)$ son **máximos relativos** e o valor $f(x_2)$ é un **mínimo relativo** de A a partir destas observacións definimos:

Unha función f presenta un **máximo relativo** en x_0 se existe un intervalo aberto I que contén a x_0 ; tal que o valor $f(x_0)$ é maior que o valor que toma a función no intervalo citado I .

Unha función f presenta un **mínimo relativo** en x_0 se existe un intervalo aberto I que contén a x_0 ; tal que o valor $f(x_0)$ é menor que o valor que toma a función no intervalo citado I .

Exemplo

3. Calcula os máximos e mínimos relativos da función $y = -x^2 - x + 6$ no intervalo $[-2, 3]$. Indica se algún deles é absoluto.

Solución:

Debúxase a función, neste caso é unha parábola de vértice $x = -1/2$ e $y = 25/4$; o vértice é o punto $(-1/2, 25/4)$

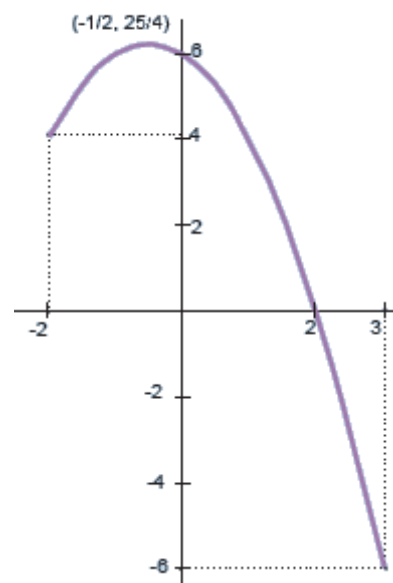
Danse valores a x para construír unha táboa.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	6	6	4	0

Ten un máximo relativo que é o vértice en $(-1/2, 25/4)$

Non ten mínimo relativo.

O máximo relativo é tamén máximo absoluto.



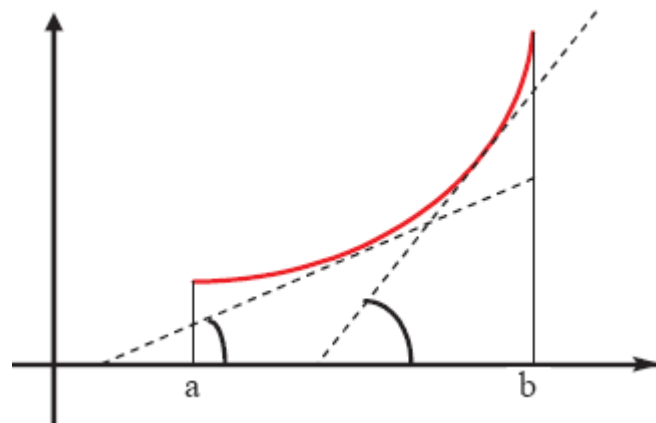
3. Funcións derivables

Se as funcións obxecto de estudo admiten derivada, o comportamento da función derivada facilita o estudo da monotonía, e dos extremos da función.

3.1. Crecemento e decrecemento para funcións derivables

A gráfica da figura adxunta corresponde a unha función crecente e derivable no intervalo (a, b) ; sobre ela aparecen debuxadas algunhas tanxentes; obsérvase que todas as rectas tanxentes forman un ángulo agudo coa dirección positiva do eixe de abscisas, o que indica que as súas pendentes son positivas, e tamén a derivada da función, o que nos permite afirmar:

Unha función **f crecente e derivable** nun intervalo **(a, b)** ten a súa derivada positiva.



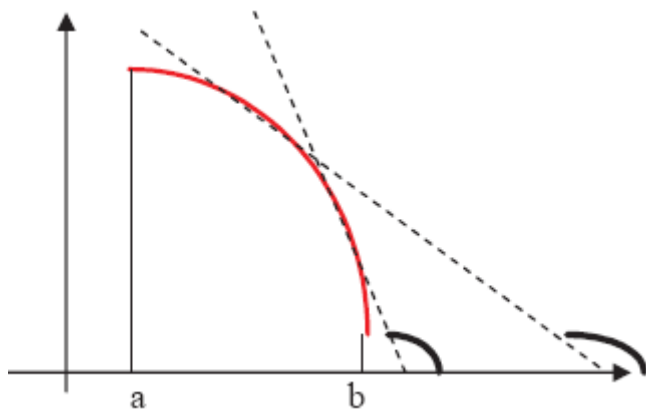
Por outra parte, se para un punto da curva de abscisa $x = x_0$ de (a, b) cúmprese

que $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ debe acontecer que o cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sexa

positivo para valores suficientemente pequenos de Δx e como $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ e $\Delta x = x_0 + h - x_0 > 0$, a función f ten que ser crecente; polo que podemos afirmar:

Se a derivada $f'(x) > 0$ nun intervalo (a, b) , a función $f(x)$ será crecente no devandito intervalo.

Análogo estudo pódese facer sobre unha función f derivable e decrecente no intervalo (a, b) ; para concluír:



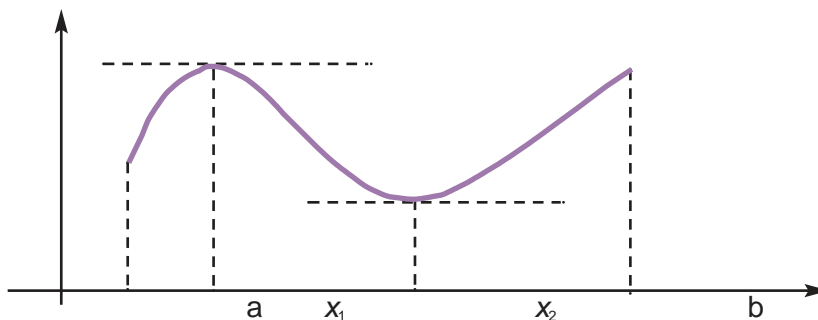
Unha función **f decrecente e derivable** nun intervalo **(a, b)** ten a súa **derivada negativa**.

Reciprocamente:

Se a derivada $f'(x) < 0$ nun intervalo (a, b) , a función $f(x)$ será decrecente no devandito intervalo.

3.2. Máximos e mínimos para funcións derivables

A figura seguinte representa unha función f cun máximo en $x = x_1$ e un mínimo en $x = x_2$, ambos os dous relativos. Neles obsérvase que a tanxente é horizontal e polo tanto a derivada é nula, que é a **condición necesaria de extremo**.



- No caso do máximo a función pasa de crecente en (a, x_1) (derivada positiva) a decrecente en (x_1, x_2) (derivada negativa), que é a **condición suficiente de máximo**.
- No mínimo a función pasa de ser decrecente en (x_1, x_2) (derivada negativa) a crecente en (x_2, b) (derivada positiva), que é a **condición suficiente de mínimo**.

Isto permítenos afirmar:

- Se f é derivable e admite un extremo relativo nun punto entón a derivada nese punto é nula.
- Se o punto é un máximo, a derivada á esquerda é positiva e á dereita é negativa.
- Se o punto é un mínimo, a derivada á esquerda é negativa e á dereita é positiva.

Desta forma, a derivada dunha función proporciona un estudo rápido da función como se indica no exemplo seguinte.

Se ben é certo que coa derivada primeira se pode realizar o estudo de extremos relativos; convén ás veces aplicar a derivada segunda, con ela a regra para determinar os extremos relativos é a seguinte:

1º. Cálculanse os valores que anulan a derivada primeira e estes valores substitúense na derivada segunda:

2º. Se $y'' > 0$ atopámonos ante un **mínimo**; se $y'' < 0$ o punto é un **máximo**.

Exemplos

4. Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento; os máximos e mínimos relativos da función: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Solución: Función derivada: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.

Puntos onde se anula a primeira derivada: $6x^2 + 6x - 12 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$

Solucións: $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$.

Constrúese unha táboa na que se divide a recta real en intervalos que teñen como extremos os valores que anulan a derivada $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$. Collendo un punto arbitrario destes intervalos e substituíndoo en $f'(x)$ calculamos o signo de $f'(x)$.

x	$\leftarrow -2 \rightarrow$	$0 \rightarrow$	$1 \rightarrow$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	crecente	decrecente	crecente

A función pasa de crecente en $(-\infty, -2)$ a decrecente en $(-2, 1)$; polo tanto en $x = -2$ a función presenta un máximo relativo de valor $f(-2) = 4$.

Mediante a segunda derivada: $f''(x) = 12x + 6$; $f''(-2) = -18 < 0$ (máximo)

A función pasa de decrecente en $(-2, 1)$ a crecente en $(1, \infty)$; polo tanto a función presenta un mínimo relativo en $x = 1$ de valor $f(1) = -7$.

Mediante a segunda derivada: $f''(x) = 12x + 6$; $f''(1) = 18 > 0$ (mínimo)

Función é crecente en $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ e decrecente en $(-2, 1)$.

5. Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento; os máximos e mínimos relativos da función:

Solución:

Resolvemos a ecuación $1 - x^2 = 0$ para calcular o dominio da función.

Dominio da función: $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Función derivada:
$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Puntos onde se anula a primeira derivada: $2x = 0 \rightarrow x = 0$

Constrúese unha táboa na que se divide a recta real en intervalos con extremos os valores onde a función non está definida e os valores que anulan a derivada.

x	$\leftarrow -1 \rightarrow$	$0 \rightarrow$	$1 \rightarrow$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	decrecente	decrecente	crecente

A función pasa de ser decrecente en $(-1, 0)$ a crecente en $(0, 1)$; polo tanto en $x = 0$ a función presenta un mínimo.

O criterio da derivada segunda neste caso non é demasiado útil. Función é crecente en $(0, 1) \cup (1, \infty)$ e decrecente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

4. Problemas de máximos e mínimos

Os máximos e mínimos teñen aplicación nos problemas de optimización que se presentan con frecuencia tanto en matemáticas coma noutras ciencias. Paga a pena destacar a súa aplicación en economía para determinar os mínimos de custo en produción e os máximos en beneficios.

Exemplos

6. Calcular as dimensións do rectángulo de área máxima o perímetro do cal sexa de 40 cm. Calcular dita área.

Solución:

Neste problema temos que atopar o máximo da función área .

Se x é a base e y a altura dun rectángulo a súa área será: $A(x, y) = xy$

Como estamos ante unha función de dúas variables, intentamos atopar unha relación entre as dúas variables neste caso é o perímetro dos rectángulos:

$$40 = x + 2y$$

$$\text{de onde: } y = 20 - x$$

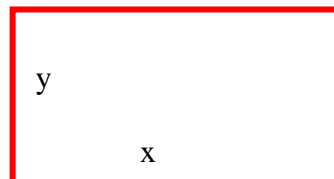
Substitúese este valor na función área: $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$

Trátase de atopar os máximos desta función; para a que se calcula a función derivada: $A'(x) = 20 - 2x$.

Iguálase a cero: $20 - 2x = 0$; solución $x = 10$

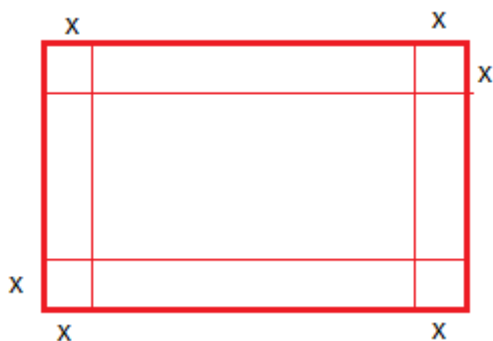
Derivada segunda: $A''(x) = -2$, como é negativa a área será máxima para $x = 10$ e $y = 10$

Resulta que, de todos os rectángulos con igual perímetro, o que ten maior área é o cadrado: $A = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$



7. Recortando cadradiños de cada esquina de cartóns rectangulares de dimensións 12 e 16 cm. pódense construír caixas sen tapa. Calcular as dimensións deses cadradiños, para que o volume das caixas sexa máximo. Canto vale o devandito volume?

Solución:



Estratexia: Cando estamos ante problemas xeométricos convén realizar debuxos.

Da figura dedúcese que a caixa é unha paralelepípedo; o seu volume é área da base pola altura, no noso caso:

$$V = (16 - 2x)(12 - 2x)x$$

$$\text{Opérase: } V = 4x^3 - 56x^2 + 192x$$

Neste caso, a función a maximizar unicamente contén unha variable, polo que non se necesita **buscar unha relación**.

$$V' = 12x^2 - 112x + 192.$$

Os ceros da derivada primeira serán os posibles máximos ou mínimos da función volume: $12x^2 - 112x + 192 = 0$; simplificando, queda, $3x^2 - 28x + 48 = 0$

Solucións: $x_1 = 7,21$ e $x_2 = 2,26$

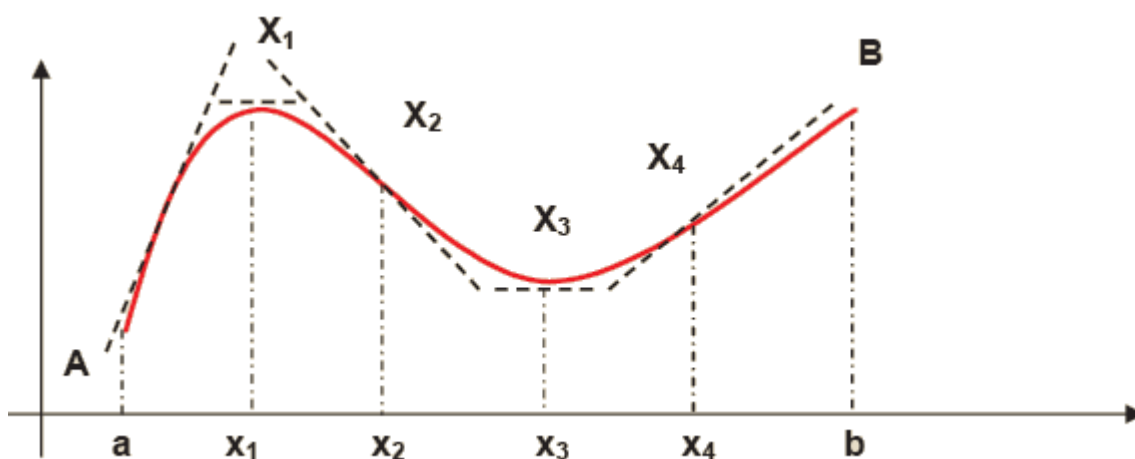
Dadas as condicións do problema, a única solución válida é 2,26, posto que non se poden cortar cadrados de 7,21 cm en cartóns rectangulares de 12 cm de altura.

$V' = 24x - 112$. Para $x = 2,26$, $V' = 24 \cdot 2,26 - 112 < 0$, logo para este valor de x o volume é máximo.

$$\text{Valor do máximo: } V = (16 - 2 \cdot 2,26)(12 - 2 \cdot 2,26) \cdot 2,26 = 194,06 \text{ cm}^3$$

5. Concavidade e convexidade: puntos de inflexión:

Se se observa na figura situada abaixo a variación das derivadas, é dicir, as pendentes das tanxentes á curva ao percorrela de esquerda a dereita, pódese afirmar que:



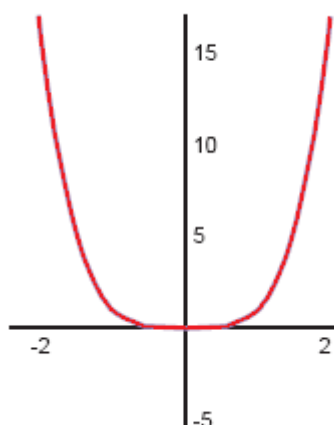
- Entre **A** e X_1 as pendentes son positivas e decrecentes ata anularse en X_1 , a partir deste punto, as pendentes son negativas e decrecentes ata X_2 onde alcanza o valor negativo máis pequeno (un mínimo).

- A partir de X_2 as pendentes sendo negativas crecen de novo ata anularse en X_3 , a partir deste punto faise positivo e crecente ata X_4 onde alcanza o valor máximo, a partir deste valor a pendente volve a decrecer ata **B**.

A partir das observacións realizadas estúdase a curvatura das funcións, que pode ser de dous tipos diferentes:

- No arco **AX_2** , a derivada primeira decrece e a curva dise que é **cóncava**.

- Os puntos X_2 e X_4 onde a curva cambia de curvatura e a función derivada primeira alcanza un mínimo e un máximo respectivamente chámanse puntos de inflexión.



O crecemento e o decrecemento da derivada primeira f' permitiunos caracterizar a curvatura; o signo da función derivada segunda f'' , como derivada da función f' nos permite afirmar:

- Se f'' é **positiva**, a función f' será crecente e a curva **convixa**.

- Se f'' é **negativa**, a función f' será decrecente e a curva **cóncava**.

Para que haxa puntos de inflexión, é condición necesaria que se anule a derivada segunda; esta condición non é suficiente. Por exemplo a función $y = x^4$ representada ao lado; ten a derivada primeira e segunda nula en $x = 0$ e non ten punto de inflexión nel.

Exemplos

8. Estudar a curvatura e os puntos de inflexión da función $y = x^2 - 1$.

Solución:

Función derivada primeira: $y' = 2x$. Función derivada segunda: $y'' = 2$.
A derivada primeira é crecente; a curva é convixa en todo \mathbb{R} e non ten puntos de inflexión.

9. Estudar puntos de inflexión da función $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$

Solución:

Función derivada primeira: $y' = 3x^2 + 6x - 9$

Función derivada segunda: $y'' = 6x + 6$

A función derivada segunda anúlase en: $6x + 6 = 0$; a solución $x = -1$ será unha posible punto de inflexión. Collendo un punto arbitrario nos intervalos $(-4, -1)$ e $(-1, -4)$ e substituíndo en y'' , calculamos o signo de y'' .

x	$\leftarrow -1 \rightarrow$
y''	$- \quad \quad \quad +$
y	cóncava $\quad \quad \quad$ convixa

A función é cóncava en $(-\infty, -1)$ e convixa $(-1, \infty)$

A función presenta en $x = -1$ un punto de inflexión cóncavo - convixo. De pendente $y' = 3(-1)^2 + 6(-1) - 9 = 12$ e valor $y = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 9(-1) + 8 = 19$; $I = (-1, 19)$

10. Estudar a curvatura e os puntos de inflexión da función $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

Solución:

Dominio da función: $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Función derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2(1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

Derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)(x+2) - (x^2+4x)2}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}$$

A derivada segunda non se anula en ningún punto, posto que o numerador é 8, por iso a función non ten puntos de inflexión, aínda que na táboa consideremos o -2 nel a función non existe.

x	$\leftarrow -2 \rightarrow$	
y''	-	+
y	cóncava	convixa

A curva é cóncava en $(-\infty, -2)$ e convixa $(-2, \infty)$

6. Representación gráfica de funcións polinómicas

As funcións polinómicas son da forma $y = p(x)$, onde $p(x)$ indica un polinomio. As seguintes funcións son polinómicas:

a) $y = 3x + 4$, b) $y = x^2 - x - 6$; c) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 1$; d) $y = x^4 - 4x^2$

Os dous primeiros exemplos xa se representaron en unidades anteriores.

O primeiro $y = 3x + 4$ é unha función lineal, a súa gráfica é unha recta; para representala determináanse dous dos seus puntos.

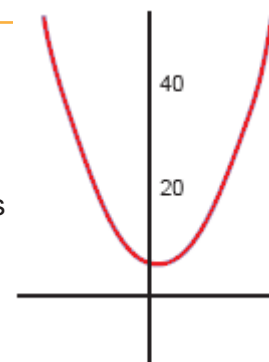
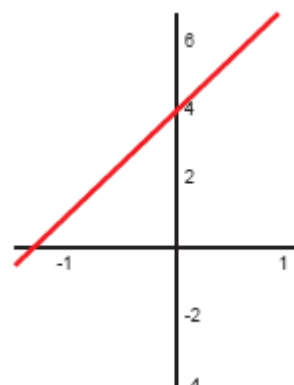
O segundo $y = x^2 - x - 6$ é unha función polinómica de segundo grao e a súa gráfica é unha parábola; para representala debes recordar que o máis cómodo é determinar o vértice da parábola e para iso, cos coñecementos que se adquiriron, calcúlase anulando a primeira derivada:

$$y' = 2x - 1 = 0; \quad x = 1/2 \quad y = -25/4$$

O vértice máximo ou mínimo atópase en **V(1/2; 25/4)**

x	$\leftarrow 1/2 \rightarrow$	
y'	-	+
y	decrecente	crecente

Como a función pasa de decrecente a decrecente o vértice é un mínimo. Outros valores para representala obtéñense a partir dos cortes cos eixes ou con valores simétricos á abscisa do vértice.



6.1. Funcións polinómicas de grao superior a dous

Para representar as funcións polinómicas $p(x)$ de grao superior a dous débese ter en conta:

- Que son funcións continuas en toda a recta real.
- Que teñen dúas ramas infinitas, unha en $+\infty$ e a outra en $-\infty$

- Débense localizar os extremos relativos.
- Se é posible atopar os puntos de cortes cos eixes.

Cos datos anteriores pódese realizar un esbozo da curva con bastante precisión.

En consecuencia, para debuxar unha función polinómica $y = p(x)$ de grao superior a dous débense dar os seguintes pasos:

- Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$
- Calcúlase a función derivada $y' = p'(x)$ e resólvese a ecuación $p'(x) = 0$; as súas solucións son posibles extremos relativos. Realízase o estudo do crecemento e decrecemento de $y = p(x)$ para ver que valores dos obtidos son extremos e se son máximos ou mínimos relativos. Calcúlanse os valores que toman as ordenadas.
- Debúxanse e únense coas ramas do infinito e o resultado é a gráfica da función.
- Pódese determinar se existen cortes cos eixes.

Exemplos

11. Debuxar a gráfica da función $y = (x - 2)^3$

Solución:

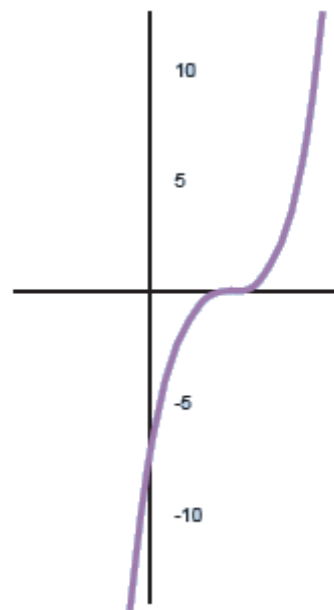
Ramas do infinito: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2)^3 = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2)^3 = +\infty$

Derivada da función: $y' = 3(x-2)^2$

$$y' = 0 \rightarrow 3(x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Como a derivada primeira é positiva en todo a recta real $x = 2$ non é extremo.

Cortes cos eixes: $(x - 2)^3 = 0$ $x = 2$



12. Debuxar a gráfica da función $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Solución: Ramas do infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = +\infty$$

Derivada da función: $y' = 3x^2 - 4x - 5$

Os posibles extremos son as solucións da ecuación: $3x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{3} = \begin{cases} \frac{2 + \sqrt{19}}{3} \approx 2,12 \\ \frac{2 - \sqrt{19}}{3} \approx -0,78 \end{cases}$$

Os posibles extremos atópanse nos puntos A(-0,78, 8,25) e B(2,12, -4,06).

x	← - 0,78 → 0 → 2,12 →		
y'	+	-	+
y	crecente	decrecente	crecente

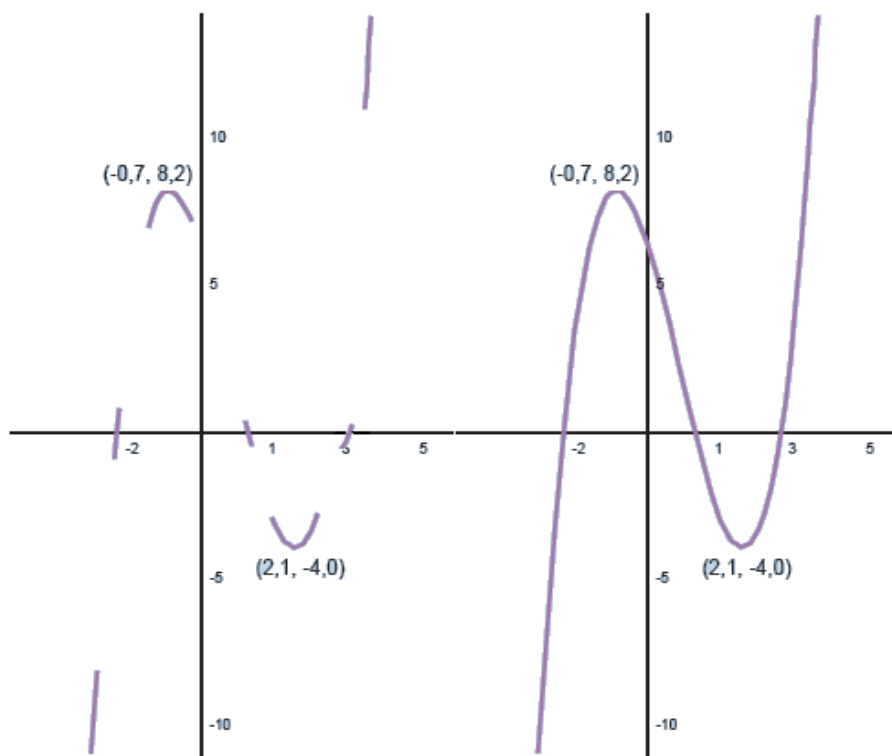
A partir da táboa dedúcese que o punto A é un máximo relativo e o B é un mínimo relativo.

Os puntos de corte co eixe de abscisas obtéñense ao resolver a ecuación:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0;$$

aplícase Ruffini e como as solucións son enteiras obtense que a curva corta ao eixe de abscisas en: $x = -2$; $x = 1$ $x = 3$.

Representáanse estes datos e ao unilos obtense a gráfica.



13. Debuxar a gráfica da función $y = x^4 - 9x^2$

Solución: Ramas do infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 9x^2) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 9x^2) = \infty$$

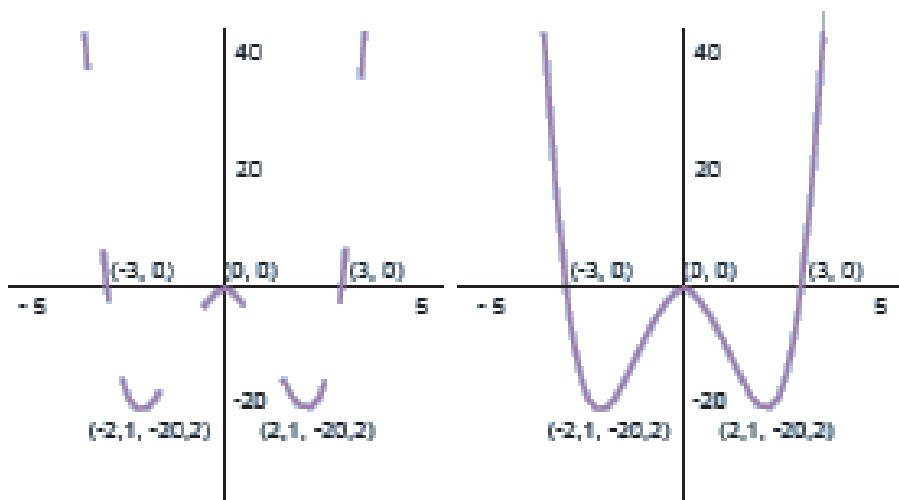
Derivada da función: $y' = 4x^3 - 18x$

Os posibles extremos son as solucións da ecuación: $4x^3 - 18x = 0$; $2x(2x^2 - 9) = 0$;
de onde, $x_1 = 0$, $x_2 \approx -2,1$ e $x_3 \approx 2,1$.

Os posibles extremos son A(-2,1, -20,2); O(0, 0) e B(2,1, -20,2)

x	← - 2,1 →		0 →	2,1
y'	-	+	-	+
y	decrecente	crecente	decrecente	crecente

Dedúcese que A é un *mínimo*, O é un máximo e B é un mínimo, todos eles relativos.
A curva corta ao eixe dos x nas solucións da ecuación: $x^4 - 9x^2 = 0$; as solucións da cal son $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ e $x_3 = 3$.
Representáanse estes datos e ao unilos obtense a gráfica.



14. Debuxar a gráfica da función $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 4$

Solución: Ramas do infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 4 \right) = \infty ; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 4 \right) = \infty$$

Derivada da función: $y' = x^3 - x^2 - 6x$

Posibles extremos son as solucións da ecuación: $x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6)$,
onde, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 3$.

Os posibles extremos son $A(-2, -1, 2)$; $O(0, 4)$ e $B(3, -11, 7)$

x	$\leftarrow -2 \rightarrow$	$0 \rightarrow$	$3 \rightarrow$
y'	-	+	-
y	decrecente	crecente	decrecente

Dedúcese que A é un *mínimo*, O é un máximo e B é un mínimo, todos eles relativos

