

Exercicios de apoio sección 9

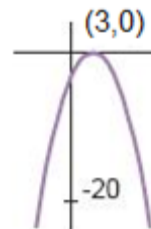
1. Dada a función $y = -x^2 + 6x - 9$; determinar o crecemento e decrecemento nos intervalos $(-\infty, 3)$ y $(3, \infty)$.
2. Estudar a monotonía da función: $f(x) = x^2 - 4$
3. Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e mínimos relativos das funcións:
 - a) $y = x^2 - 2x + 5$,
 - b) $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$,
4. Determinar os intervalos de crecemento e decrecemento; os máximos e mínimos relativos das funcións.
 - a) $y = x^3 + x + 3$,
 - b) $y = 2/(x^2 - 4)$
5. Calcular o valor de **a** para que o máximo da función $y = -x^2 + 4x + a$ valla 8.
6. Deséxase valar un terreo rectangular con 6000 metros de valado de forma que a superficie pechada sexa máxima.
7. O dono dun manancial de auga chega á seguinte conclusión: se o prezo ao que vende a botella é x euros, os seus beneficios serán $-x^2 + 10x - 21$ miles de euros diarios. Representa a función prezo-beneficio, e indica: a) a que prezo debe vender a botella para que o beneficio sexa máximo? b) cal será ese beneficio?
8. Estudar a curvatura das funcións: a) $y = x^3$; b) $y = x^5$
9. Estudar a curvatura das funcións: a) $y = \sqrt{x}$; b) $y = 2^x$
10. Debuxar as gráficas das funcións:
 - a) $y = x^3 - 6x + 9$
 - b) $y = x^4 + 2x^3$.
11. Representa graficamente as seguintes funcións.
 - a) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$
 - b) $y = x^4 - 2x^2$

Solucions:

1. Dada a función $y = -x^2 + 6x - 9$; determinar o crecemento e decrecemento nos intervalos $(-\infty, 3)$ y $(3, \infty)$.

Solucion:

Trátase dunha parábola de vértice $V(3,0)$
A función é crecente en $(-\infty, 3)$ e decrecente en $(3, \infty)$



2. Estudar a monotonía da función: $f(x) = x^2 - 4$

Solucion:

a)

Función derivada: $f'(x) = 2x$

Os puntos onde se anula a derivada $2x = 0 \Rightarrow x=0$. Collendo un punto arbitrario no intervalo $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ e substituíndolo en $f'(x)$ calculamos o signo de $f'(x)$.

A función é decrecente no intervalo $(-\infty, 0)$ e crecente $(0, \infty)$ polo tanto téñ un mínimo no punto $(0, -4)$

3. Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e mínimos relativos das funcións:

a) $y = x^2 - 2x + 5$,

b) $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$,

Solución:

a) Función derivada $y' = 2x - 2$

Os puntos onde anullase a derivada son: $2x-2=0 \Rightarrow x = 1$

Constrúese a táboa:

x	$\leftarrow 1 \rightarrow$	
y'	—	+
y	decrecente	crecente

A función é decrecente en $(-\infty, 1)$: crecente en $(1, \infty)$ polo tanto o punto de abcisa $x=1$ é un mínimo de valor $y = 4$.

b) Función derivada $y' = 3x^2 - 10x + 8$

Os puntos onde anullase a derivada son: $3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x=4/3$ e $x=2$.

Constrúese a táboa:

x	$\leftarrow 4/3 \rightarrow$	$\leftarrow 2 \rightarrow$	
y'	+	-	+
y	crecente	decrecente	crecente

A función é crecente en $(-\infty, 4/3)$; decrecente en $(4/3, 2)$ e crecente en $(2, \infty)$

A función ten un máximo en $x=4/3$ e un mínimo en $x=2$.

Estes puntos atopanse en $A(4/3, 4/27)$ y $B(2, 0)$

4. Determinar os intervalos de crecemento e decrecemento; os máximos e mínimos relativos das funcións.

a) $y = x^3 + x + 3$, b) $y = 2/(x^2-4)$

Solucion:

a) función derivada $y' = 3x^2 + 1$

A derivada non se anula e é positiva para todos os valores de x , polo tanto a función é crecente e non ten extremos.

b) Función derivada: $y' = \frac{-4x}{(x^2-4)^2}$

Os puntos onde se anula a derivada: $-4x = 0 \Rightarrow x = 0$

Constrúese a táboa cos valores que anulan a derivada e nos que a función non existe

x	$\leftarrow -2 \rightarrow$	$\leftarrow 0 \rightarrow$	$2 \rightarrow$
y'	+	+	—
y	crecente	crecente	decrecente decrecente

5. Calcular o valor de a para que o máximo da función $y = -x^2 + 4x + a$ valla 8.

Solucion:

A función derivada é $y' = -2x + 4$

Os valores que anulan a derivada: $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Neste punto trátase dun máximo xa que $y'' = -2 < 0$

O valor do máximo debe ser 8, polo tanto: $8 = 2^2 + 4 \cdot 2 + a \Rightarrow a = -4$

6. Deséxase valar un terreo rectangular con 6000 metros de valado de forma que a superficie pechada sexa máxima.

Solucion:

Sexa x a base do rectángulo, como o perímetro son 6000 entón a metade do perímetro é 3000 polo tanto a altura será **$3000 - x$** .

A superficie será: $S = (3000-x) \cdot x = 3000x - x^2$

A función derivada $S' = 3000 - 2x$; anulase para $3000 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1500$

A derivada segunda: $S'' = -2 < 0 \Rightarrow$ trátase dun máximo cando a base sexa 1500 m. e a altura tamén 1500 m.

7. O dono dun manancial de auga chega á seguinte conclusión: se o prezo ao que vende a botella é x euros, os seus beneficios serán $-x^2 + 10x - 21$ miles de euros diarios. Representa a función prezo-beneficio, e indica: a) a que prezo debe vender a botella para que o beneficio sexa máximo? b) cal será ese beneficio?

Solucion:

A función a maximizar é: $B(x) = -x^2 + 10x - 21$

A función derivada $B'(x) = -2x + 10$; Anulase para $x = 5$ euros

A derivada segunda $B'' = -2 < 0$; trátase dun máximo

$B(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 - 21 = 4$ miles; polo tanto o beneficio máximo será de 4000 €

8. Estudar a curvatura das funcións:: a) $y = x^3$; b) $y = x^5$

Solucion:

a) Derivada primeira $y' = 3x^2$; derivada segunda $y'' = 6x$

A derivada segunda é negativa en $(-\infty, 0)$ polo tanto a función é concava. En $(0, \infty)$ a función é convexa.

b) Derivada primeira $y' = 5x^4$, derivada segunda $y'' = 20x^3$

A derivada segunda é negativa en $(-\infty, 0)$ polo tanto a función é concava. A derivada segunda é positiva en $(0, \infty)$ polo tanto a función é convexa.

9. Estudar a curvatura das funcións:

$$a) y = \sqrt{x}; b) y = 2^x$$

a) Derivada primeira $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; derivada segunda $y'' = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$

.O dominio da función é $(0, \infty)$ e nese intervalo a derivada segunda é negativa polo que a función é concava.

b) Derivada primeira $y' = 2^x \ln 2$; derivada segunda $y'' = 2^x (\ln 2)^2$

A derivada segunda é positiva en $(-\infty, \infty)$, polo tanto a función é convexa

10. Debuxar as gráficas das funcións:

a) $y = x^3 - 6x + 9$

b) $y = x^4 + 2x^3$.

Solucion

a) Ramas do infinito $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x + 9) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x + 9) = \infty$
Derivada da función $y' = 3x^2 - 6$.

Os posibles extremos son as solucións da ecuación $3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

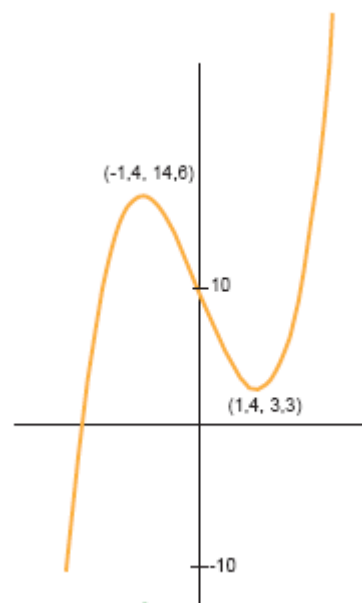
Derivada segunda $y'' = 6x$; para $x = -\sqrt{2}$ a derivada segunda é negativa e a función presenta un máximo de valor aproximado $y \approx 14,65$

Para $x = \sqrt{2}$ a derivada segunda é positiva e a función presenta un mínimo de valor aproximado $y \approx 3,34$

Os puntos de corte co eixo de abscisas obteñense coa solución da ecuación

$x^3 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ é a única solución real o o punto de corte co eixo de ordenadas obteñese facendo $x = 0 \Rightarrow y = 9$.

Representáanse estes datos e ao unilos obtense a gráfica correspondente



b) Ramas do infinito $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 2x^3) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + 2x^3) = \infty$

Derivada da función $y' = 4x^3 + 6x^2 = x^2(4x+6)$

Os posibles extremos son as solucións da ecuación $x^2(4x+6) = 0$; as solucións son $x=0$ e $x = -3/2$

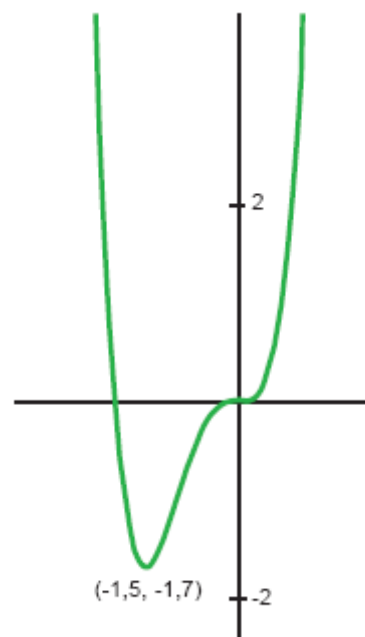
Derivada segunda $y'' = 12x^2 + 12x$

Os posibles puntos de inflexión son as solucións de $y'' = 12x^2 + 12x = 0$; é dicir $x=0$ e $x = -1$. Para $x=0$ a derivada segunda é nula e polo tanto non é extremo;

para $x = -3/2$ a derivada segunda é positiva e a función presenta un mínimo.

Os puntos $x=0$ e $x = -1$ son os puntos de inflexión.

Representáanse estes datos e ao unilos obtense a gráfica correspondente



11. Representa graficamente as seguintes funcións.

a) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$ b) $y = x^4 - 2x^2$

a) Ramas do infinito $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) = -\infty$

Derivada da función: $y' = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3)$

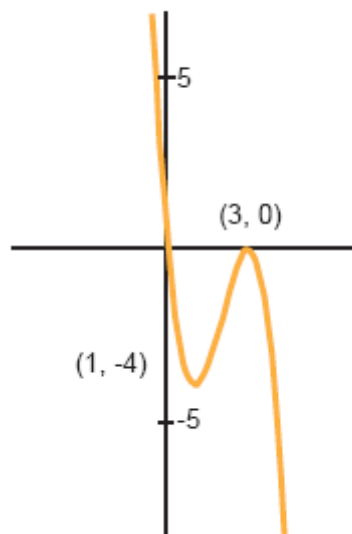
Os posibles extremos son as solucións da ecuación $-3(x^2 - 4x + 3) = 0$ as solucións son $x=1$ e $x=3$; $x=1$ é un mínimo; $x=3$ é un máximo

Derivada segunda $y'' = -6x + 12$; os puntos de inflexión obteñense da ecuación

$-6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

Os puntos de corte co eixo de abscisas obteñense co as raíces da ecuación

$-x^3 + 6x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(-x^2 + 6x - 9) = 0 \Rightarrow x=0$ e $x=3$ o punto de corte co eixo de ordenadas é $y=0 \Rightarrow (0,0)$



b) Ramas do infinito $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x^2) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 2x^2) = \infty$

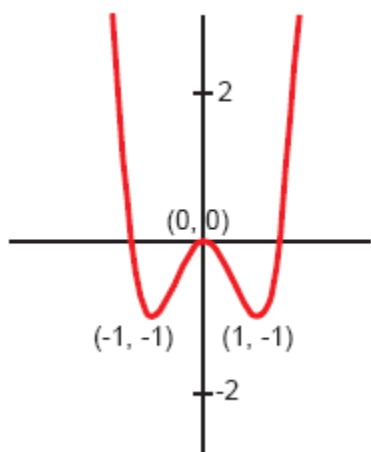
Derivada da función: $y' = 4x^3 - 4x$

Os posibles extremos son as solucións da ecuación $4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ as solucións son $x=0$ e $x=\pm 1$; $x=-1$ é un mínimo; $x=0$ é un máximo e $x=1$ é un mínimo.

Derivada segunda $y'' = 12x^2 - 4$; os puntos de inflexión obteñense da ecuación $12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1/3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1/3}$

Os puntos de corte co eixo de abscisas obteñense co as raíces da ecuación

$x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x=0$ e $x = \pm \sqrt{2}$ o punto de corte co eixo de ordenadas é $y=0 \Rightarrow (0,0)$



nquis