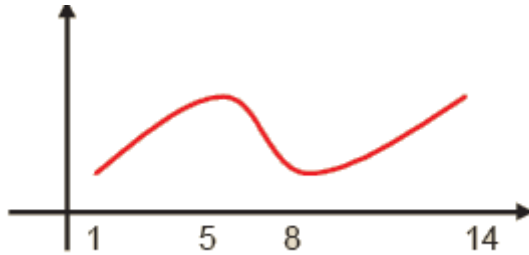


## Actividades de autoavaliación sección 9

1. Determinar os intervalos de crecemento e decrecementos da función  $f$  representada na gráfica seguinte:



2. Debuxa a gráfica da función  $y = x^2 - 4x + 4$  e determina os intervalos de crecemento e decrecemento.

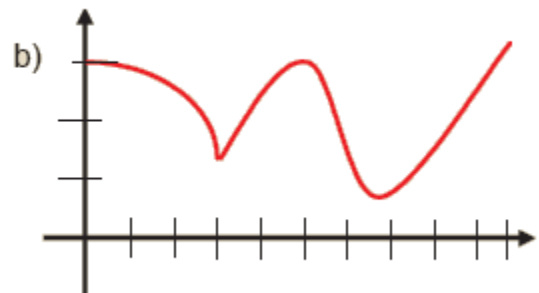
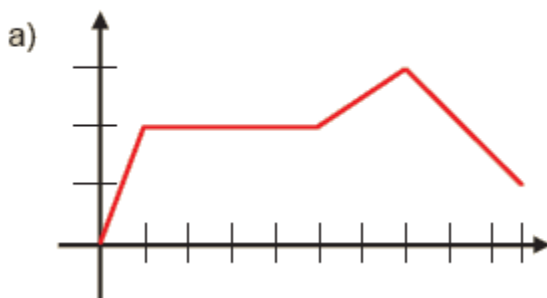
3. Dada a función  $y = -x^2 + 6x - 9$ ; determinar o crecemento e decrecemento nos intervalos  $(-\infty, 3)$  y  $(3, \infty)$ .

4. As funcións seguintes alcanzan nos intervalos que se indican máximos e mínimos absolutos. Utiliza as gráficas para calculalos aproximadamente.

- a)  $y = 2x - 6$ , no intervalo  $[0, 4]$ .
- b)  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$  no intervalo  $[-3, 3]$
- c)  $y = 3/(x-1)$  no intervalo  $[2, 5]$

Indica se algúns dos valores obtidos son relativos

5. Calcula os máximos e mínimos relativos da funciones seguintes nos intervalos que aparecen debuxadas.



6. Estudar a monotonía das funcións: a)  $f(x) = x^2 - 4$ ; b)  $g(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 3$ .

7. Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e mínimos relativos das funcións:

a)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ ,

b)  $y = x/(x-1)$

8. Determinar os intervalos de crecemento e decrecemento; os máximos e mínimos relativos das funcións.

a)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ,    b)  $y = x^4 - 2x^2$

9. Calcular o valor de  $a$  para que o máximo da función  $y = -x^2 + 4x + a$  valga 8.

10. Calcula  $a$  e  $b$  para que a función  $f(x) = x^3 + a^2 + bx + 1$  teña un mínimo no punto  $(2, -15)$

11. Calcular dous números a suma dos cales sexa 30 de forma que o seu produto sexa máximo.

12. Deséxase valar un terreo rectangular con 6000 metros de valado de forma que a superficie pechada sexa máxima.

13. Descompoñer o número 50 en dous sumandos de modo que a suma do dobre do cadrado dun deles e o triplo do cadrado do outro sexa mínima.

14. Un envase de cartón para envasar leite ten forma de paralelepípedo con base rectangular, cun lado de dobre lonxitude que o outro e con dobre espesor de cartón nestas dúas bases. Se a capacidade debe ser de  $1\,000\text{ cm}^3$ , cales son as dimensións do recipiente máis económico?

15. O dono dun manancial de auga chega á seguinte conclusión: se o prezo ao que vende a botella é  $x$  euros, os seus beneficios serán  $-x^2 + 10x - 21$  miles de euros diarios. Representa a función prezo-beneficio, e indica: a) a que prezo debe vender a botella para que o beneficio sexa máximo? b) cal será ese beneficio?

16. Con listóns de madeira de 3 m. de longo queremos fabricar marcos de cadros; se a base mide 50 cm., canto mide a altura e a superficie do cadro? Busca unha relación funcional entre a base do cadro e a superficie do cadro. Para que valor da base a superficie é máxima?

17. O beneficio dunha empresa de automóviles vén dado por  $B(x) = -200\,000\,00 + 800\,000x - 0,2x^3$ , onde  $x$  é o número de vehículos producidos semanalmente. Calcular a produción que fai máximo o beneficio no suposto de que a empresa poida fabricar semanalmente: a) ata 800 vehículos; b) menos de 1200 vehículos.

18. Estudar a curvatura das funcións: a)  $y = x^2$ ; c)  $y = x^4$

19. Estudar a curvatura das funcións:

a)  $y = -\frac{1}{2x}$ ;    b)  $y = \frac{1}{x^2}$

**20.** Determina os intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión da función seguinte:  $f(x) = x^2 - 6x + 2$

**21.** Estudar puntos de inflexión da función  $y = x^4 - 6x^2 + 2$

**22.** Debuxar as gráficas das funcións:

a)  $y = 2 - 4x - x^2$

b)  $y = x^3 - 4x$ ,

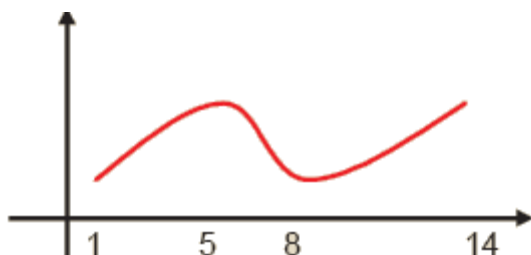
**23.** Representa graficamente as seguintes funcións:

a)  $y = x^3 - 2x^2 + 1$ ,

b)  $y = x^4 - x^2$ ,

## Solucions:

1. Determinar os intervalos de crecemento e decrecementos da función  $f$  representada na gráfica seguinte:



**Solucion:**

A función é **crecente** nos intervalos  $(1,5)$  e  $(8,14)$  e **decrecente** no  $(5,8)$

2. Debuxa a gráfica da función  $y = x^2 - 4x + 4$  e determina os intervalos de crecemento e decrecemento.

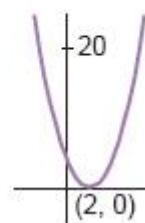
**Solucion:**

Trátase dunha parabola; calcúlase o vertice:  $x = 4/2$  ;  $y = 4 - 8 + 4 = 0$

Vértice:  $V(2,0)$

Constrúese un cadro de valores simétrico respecto ao vertice e represéntase a parabola

A función é decrecente en  $(-\infty, 2)$  e crecente en  $(2, \infty)$

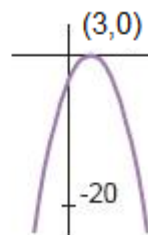


3. Dada a función  $y = -x^2 + 6x - 9$ ; determinar o crecemento e decrecemento nos intervalos  $(-\infty, 3)$  y  $(3, \infty)$ .

**Solucion:**

Trátase dunha parabola de vértice  $V(3,0)$

A función é crecente en  $(-\infty, 3)$  e decrecente en  $(3, \infty)$

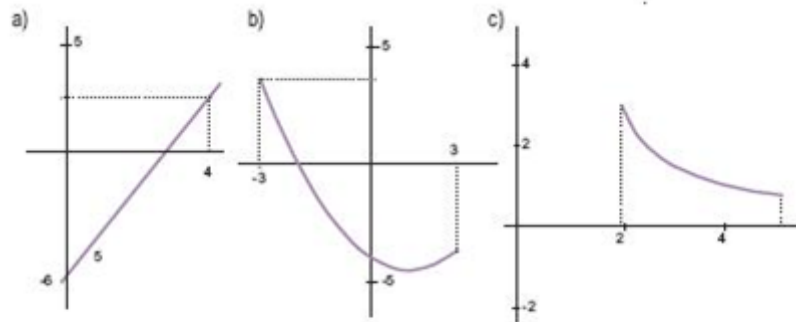


4. As funcións seguintes alcanzan nos intervalos que se indican máximos e mínimos absolutos. Utiliza as gráficas para calculalos aproximadamente.

- a)  $y = 2x - 6$ , no intervalo  $[0, 4]$ .
- b)  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$  no intervalo  $[-3, 3]$
- c)  $y = 3/(x-1)$  no intervalo  $[2, 5]$

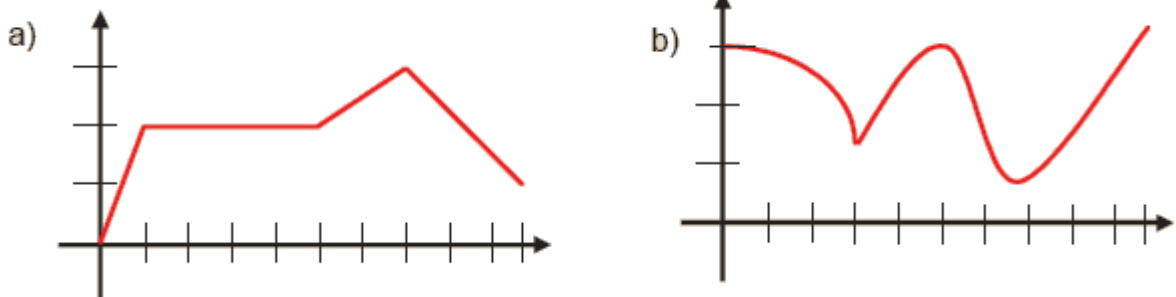
Indica se algúns dos valores obtidos son relativos

**Solucion:**



- a) Máx (4,2) ; Mín (0, -6)
- b) Máx (-3, 3,5); Mín (1,-4,5) e é relativo
- c) Máx (2,3) ; Mín (5, 3/4)

5. Calcula os máximos e mínimos relativos da funcións seguintes nos intervalos que aparecen debuxadas.



**Solucion:**

- a) Ten un máximo no punto (7,3) e un mínimo no (0,0)
- b) Ten un máximo no punto (10,3,3) e un mínimo no (7,1)

6. Estudar a monotonía das funcións: a)  $f(x) = x^2 - 4$ ; b)  $g(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 3$ .

**Solucion:**

a) Función derivada:  $f'(x) = 2x$

Os puntos onde se anula a derivada  $2x = 0 \Rightarrow x=0$ . Collendo un punto arbitrario no intervalo  $(-\infty, 0)$  e  $(0, \infty)$  e substituíndolo en  $f'(x)$  calculamos o signo de  $f'(x)$ .

A función é decreciente no intervalo  $(-\infty, 0)$  e crecente  $(0, \infty)$  polo tanto téñ un mínimo no punto  $(0, -4)$

b) Funcion derivada  $g'(x) = 3x^2 - 14x + 6$

Os puntos onde se anula a derivada  $3x^2 - 14x + 6 = 0 \Rightarrow x=2/3$  e  $x = 4$

Constrúese a táboa

x	$\leftarrow \frac{2}{3} \rightarrow$		$\leftarrow 4 \rightarrow$
g(x)	+	—	+
g'(x)	creciente	decreciente	creciente

A función é crecente en  $(-\infty, 2/3)$ , decreciente en  $(2/3, 4)$  e crecente en  $(4, \infty)$

A función ten un máximo no punto  $x=2/3$  e un mínimo en  $x=4$ .

E que son os puntos seguintes: **A(2/3, -13/27) y B(4, -19)**

7. Calcular os intervalos de crecemento e decrecemento e os máximos e mínimos relativos das funcións:

a)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ ,

b)  $y = x/(x-1)$

**Solucion:**

a) Funcion derivada  $y' = 6x^2 - 6x - 12$

Os puntos onde anullase a derivada son:  $6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x=2$  e  $x = -1$

Constrúese a táboa:

x	← -1 →	← 2 →	
y'	+	-	+
y	crecente	decreciente	crecente

A función é crecente en  $(-\infty, -1)$ ; decreciente en  $(-1, 2)$  e crecente en  $(2, \infty)$

A función ten un máximo en  $x=-1$  e un mínimo en  $x=2$ .

Estes puntos atopanse en A  $(-1, 11)$  e B  $(2, -16)$ .

b) Funcion derivada  $-\frac{1}{(x-1)^2}$

A derivada non se anula, polo que a función non téñ extremos relativos

Constrúese a táboa:

x	← 1 →	
y'	—	—
y	decreciente	decreciente

A función é decreciente en  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

8. Determinar os intervalos de crecemento e decrecemento; os máximos e mínimos relativos das funcións.

a)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ,                      b)  $y = x^4 - 2x^2$

**Solucion:**

a) Función derivada  $y' = 3x^2 - 6x - 9$

Os puntos onde anullase a derivada son:  $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$  e  $x = -1$

Constrúese a táboa:

x	← -1	→ 3	→
y'	+	-	+
y	crecente	decrecente	crecente

A función é crecente en  $(-\infty, -1)$ ; decrecente en  $(-1, 3)$  e crecente en  $(3, \infty)$

A función ten un máximo en  $x = -1$  e un mínimo en  $x = 3$

Estes puntos atopanse en A  $(-1, 10)$  e B  $(3, -22)$ .

b) Función derivada  $y' = 4x^3 - 4x$

Os puntos onde anullase a derivada son:  $4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = -1$

Constrúese a táboa:

x	← -1	→ 0	→ 1	→
y'	-	+	-	+
y	decrecente	crecente	decrecente	crecente

A función é decrecente en  $(-\infty, -1)$ ; crecente en  $(-1, 0)$ ; decrecente en  $(0, 1)$  e crecente en  $(1, \infty)$

A función ten un mínimo en  $x = -1$ , un máximo en  $x = 0$  e outro mínimo en  $x = 1$ .

Os puntos atopanse en A  $(-1, -1)$ , B  $(0, 0)$  e C  $(1, -1)$

9. Calcular o valor de a para que o máximo da función a función  $y = -x^2 + 4x + a$  valla 8

**Solucion:**

A función derivada é:  $y' = -2x + 4$

Os valores que anulan a derivada:  $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Neste punto trátase dun máximo xa que  $y'' = -2 < 0$

O valor do máximo debe ser 8, polo tanto:  $8 = 2^2 + 4 \cdot 2 + a \Rightarrow a = 4$

10. Calcula a e b para que a función  $f(x) = x^3 + a^2 + bx + 1$  teña un mínimo no punto  $(2, -15)$

**Solucion:**

A función derivada é :  $y' = 3x^2 + 2ax + b$

Para  $x=2$  débese cumprir

a) A derivada anúlase por ser mínimo :  $0 = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + b$

b) Debe valer -15 para  $x=2 \Rightarrow -15 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1$

Entón, fórmase o sistema: 
$$\begin{cases} 4a + b = -12 \\ 4a + 2b = -24 \end{cases}$$

cuxas solucións son  $a=0$  e  $b=-12$

**11.** Calcular dous números a suma dos cales sexa 30 de forma que o seu produto sexa máximo.

**Solucion:**

Sexa  $x$  un número, e o outro será  $30-x$ .

O produto será:  $P = x(30-x)$

Deséxase que o produto sexa máximo, entón  $P' = 30 - 2x$ , igualamos a 0 e a solución é:

$x=15$  e o outro número será  $30 - 15 = 15$

Derivada segunda  $P''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$  Máximo

**12.** Deséxase valar un terreo rectangular con 6000 metros de valado de forma que a superficie pechada sexa máxima.

**Solucion:**

Sexa  $x$  a base do rectángulo, como o perímetro son 6000 entón a metade do perímetro é 3000 polo tanto a altura será  $3000 - x$ .

A superficie será:  $S = (3000-x) \cdot x = 3000x - x^2$

A función derivada  $S' = 3000 - 2x$ ; anúlase para  $3000 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1500$

A derivada segunda:  $S'' = -2 < 0 \Rightarrow$  trátase dun máximo cando a base sexa 1500 m. e a altura tamén 1500 m.

**13.** Descompoñer o número 50 en dous sumandos de modo que a suma do dobre do cadrado dun deles e o triplo do cadrado do outro sexa mínima.

**Solucion:**

Sexa  $x$  un número, e o outro será  $50-x$ .

O enunciado di que  $S = 2x^2 + 3 \cdot (50-x)^2$

A función derivada é :  $S' = 4x - 6(50-x)$ ; anúlase para  $4x - 6(50-x) = 0$ ;  $4x - 300 + 6x = 0$ ;

$10x = 300 \Rightarrow x = 30$  será uns dos números e o outro  $50 - 30 = 20$

A derivada segunda  $S'' = 10 > 0 \Rightarrow$  a suma será mínima.



**14.** Un envase de cartón para envasar leite ten forma de paralelepípedo con base rectangular, cun lado de dobre lonxitude que o outro e con dobre espesor de cartón nestas dúas bases. Se a capacidade debe ser de  $1\,000\text{ cm}^3$ , cales son as dimensións do recipiente máis económico?

**Solucion:**

Sexa  $x$  a anchura,  $2x$  será a profundidade e  $h$  a altura

As condicións do problema indican que como o cartón que se precisa é dobre nas bases será:  $A = 2x \cdot x \cdot 4 + 2 \cdot xh + 2 \cdot 2x \cdot h = 2x^2 + 6xh$

Dado que aparecen dúas variables, a relación entre ambas nola dá o volumen:

$1000 = 2x^2h \Rightarrow h = 1000 / 2x^2$ ; e substituído na área  $A$  temos:

$$A = 2x^2 + 6x \cdot 1000 / 2x^2 = 2x^2 + 3000/x$$

A función derivada:  $A' = 4x - 3000/x^2$ ; sexa nula para,  $4x - 3000/x^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{5\sqrt{12}}{2} \text{ cm. de ancho; } 5\sqrt[3]{12} \text{ cm. de profundidade y } h = \frac{10}{\sqrt[3]{18}}$$

A derivada pasa de negativa a positiva polo que a función pasa de decrecente a crecente o que implica un mínimo.

**15.** O dono dun manancial de auga chega á seguinte conclusión: se o prezo ao que vende a botella é  $x$  euros, os seus beneficios serán  $-x^2 + 10x - 21$  miles de euros diarios. Representa a función prezo-beneficio, e indica: a) a que prezo debe vender a botella para que o beneficio sexa máximo? b) cal será ese beneficio?

**Solucion:**

A función a maximizar é:  $B(x) = -x^2 + 10x - 21$

A función derivada  $B'(x) = -2x + 10$ ; Anúlase para  $x = 5$  euros

A derivada segunda  $B'' = -2 < 0$ ; trátase dun máximo

$B(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 - 21 = 4$  miles; polo tanto o beneficio máximo será de 4000 €

**16.** Con listóns de madeira de 3 m. de longo queremos fabricar marcos de cadros; se a base mide 50 cm., canto mide a altura e a superficie do cadro? Busca unha relación funcional entre a base do cadro e a superficie do cadro. Para que valor da base a superficie é máxima?

**Solucion:**

Se a base mide 0,50 m. a altura será  $1,50 - 0,50 = 1$  m.

A área será:  $A = 0,50 \cdot 1 = 0,50\text{ m}^2$

A base faise variable polo tanto, sexa  $x$  a base e a altura será  $1,5 - x$

A área será:  $A = x(1,5 - x) = 1,5x - x^2$

A función derivada:  $A' = 1,5 - 2x$ , a derivada anúlase:  $1,5 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,75$  m. a base e a altura  $1,5 - 0,75 = 0,75$  m.

A derivada segunda é  $A'' = -2 < 0$  polo tanto trátase dun máximo.

17. O beneficio dunha empresa de automóviles vén dado por  $B(x) = -200\,000\,00 + 800\,000x - 0,2x^3$ , onde  $x$  é o número de vehículos producidos semanalmente. Calcular a produción que fai máximo o beneficio no suposto de que a empresa poida fabricar semanalmente: a) ata 800 vehículos; b) menos de 1200 vehículos.

**Solucion:**

Funcion a maximizar:  $B(x) = -20.000.000 + 800.000x - 0,2x^3$

Función derivada:  $B'(x) = 800.000 - 0,6x^2$ ;

a derivada anulase para  $x = \sqrt{\frac{800000}{0,6}} = 1154,77$

A derivada primeira pasa de positiva a negativa polo que a función pasa de crecente a decrecente. Polo tanto:

a) Se a fabrica pode producir ata 800 vehiculos, o beneficio máximo obtense fabricandolos todos.

b) No caso de poder producir ata 1200 vehiculos o beneficio máximo obtense fabricando 1155 vehiculos.

18. Estudar a curvatura das funcións: a)  $y = x^2$ ; b)  $y = x^4$

**Solucion:**

a) A derivada primeira  $y' = 2x$ ; derivada segunda  $y'' = 2 > 0$  a funcion é convexa

b) Derivada primeira  $y' = 4x^3$ , derivada segunda  $y'' = 12x^2$ , a derivada segunda é sempre positiva polo que a función será convexa.

19. Estudar a curvatura das funcións:

$$a) y = -\frac{1}{2x}; b) y = \frac{1}{x^2}$$

**Solucion:**

a) Derivada primeira  $y' = -\frac{1}{2x^2}$ ; derivada segunda  $y'' = \frac{1}{x^3}$

A derivada segunda é positiva en  $(-\infty, 0)$  polo tanto a función é convexa. A derivada segunda é negativa en  $(0, \infty)$  polo tanto a función é concava.

b) Derivada primeira  $y' = -\frac{2}{x^3}$ ; derivada segunda  $y'' = \frac{6}{x^4}$

. A derivada segunda é positiva en  $(-\infty, \infty)$  polo tanto a función é convexa

**20.** Determina os intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión da función seguinte:  $f(x) = x^4 - 6x + 2$

**Solucion:**

Derivada primeira  $f'(x) = 4x^3 - 6$ , derivada segunda  $f''(x) = 12x^2$ ,  
A derivada segunda anúlase para  $x=0$ , pero a derivada segunda é positiva para o resto dos valores polo tanto a función é convexa e non existen puntos de inflexión.

**21.** Estudar puntos de inflexión da función  $y = x^4 - 6x^2 + 2$

**Solucion:**

Derivada primeira  $y' = 4x^3 - 12x$ , derivada segunda  $y'' = 12x^2 - 12$   
A función derivada segunda anúlase en:  $12x^2 - 12 = 0$ : solucións  $x = -1$  y  $x = 1$ ; estes serán os posibles puntos de inflexión.

x	← -1	← 0 →	1 →
y''	+	—	+
y	convexa	concava	convexa

A función é concava en  $(-1, 1)$

A función é convexa en  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

A función presenta en  $x = -1$  un punto de inflexión convexo-concavo. A pendente  $y' = 8$  e o valor de  $y = -5$ , logo o **punto de inflexión será  $(-1, -5)$** .

A función presenta en  $x = 1$  un punto de inflexión concavo-convexo. A pendente é  $y' = -8$  e o da  $y = -5$  logo o **punto de inflexión será  $(1, -5)$**

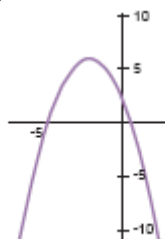
**22.** Debuxar as gráficas das funcións:

a)  $y = 2 - 4x - x^2$

b)  $y = x^3 - 4x$

**Solucion:**

a) Ramas do infinito:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 4x - x^2) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - 4x - x^2) = -\infty$



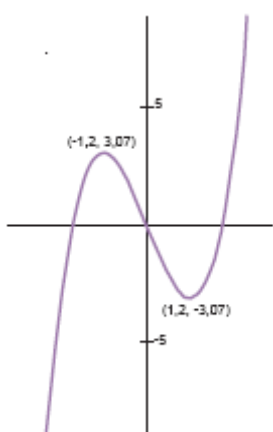
Derivada da función:  $y' = -4 - 2x = -2(2+x) \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow -4 - 2x = 0 \Rightarrow x = -2$ ;

A derivada é positiva en  $(-\infty, -2)$  e negativa en  $(-2, \infty)$ ; polo tanto o punto  $x = -2$  é un máximo, de valor  $y = 2 - 4(-2) - (-2)^2 = 6 \Rightarrow (-2, 6)$  é o máximo relativo

Os puntos de corte co eixo OX son as raíces da ecuación  $2 - 4x - x^2 = 0$  e co eixo OY,  $x = 0 \Rightarrow y = 2$

b) Ramas do infinito:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 4x) = \infty$

Derivada da función:  $y' = 3x^2 - 4$



Os posibles extremos son as solucións da ecuación  $3x^2 - 4 = 0$   
 $\Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

A derivada segunda  $y'' = 6x \Rightarrow$  substituímos os valores que fan nula a derivada primeira e temos, para  $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$  a derivada segunda é negativa polo tanto a función presenta un máximo relativo de valor  $y = 3,07$

Para  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$  a derivada segunda é positiva polo tanto a función presenta un mínimo relativo de valor  $y = -3,07$

Os puntos de corte co eixo de abscisas obteñense coa solución da ecuación  $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$  e  $x = -2$ .

Representanse estes datos e obtense a gráfica correspondente.

23. Representa graficamente as seguintes funcións.

- a)  $y = x^3 - 2x^2 + 1$ ,  
b)  $y = x^4 - x^2$ ,

**Solucion:**

a) Ramas do infinito  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + 1) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x^2 + 1) = \infty$

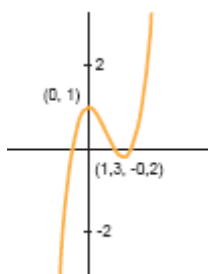
Derivada da función:  $y' = 3x^2 - 4x$

Os posibles extremos son as solucións da ecuación  $3x^2 - 4x = 0$ ; as solucións son  $x = 0$  e  $x = 4/3$ ;  $x = 0$  é un máximo e  $x = 4/3$  é un mínimo

Derivada segunda  $y'' = 6x - 4$

Os puntos de corte co eixo de abscisas obteñense coas raíces da ecuación

$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$  e o punto de corte co eixo de ordenadas é  $y = 1$



b) Ramas do infinito  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^2) = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - x^2) = \infty$

Derivada da función:  $y' = 4x^3 - 2x$

Os posibles extremos son as solucións da ecuación  $4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 1) = 0$  as solucións son  $x = 0$  e  $x = \pm\sqrt{1/2}$ ;  $x = -\sqrt{1/2}$  é un mínimo;  $x = 0$  é un máximo e  $x = \sqrt{1/2}$  é un mínimo.

Derivada segunda  $y'' = 12x^2 - 2$ ; os puntos de inflexión obteñense da ecuación  $12x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1/6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1/6}$

Os puntos de corte co eixo de abscisas obteñense coas raíces da ecuación

$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$  e  $x = \pm 1$  o punto de corte co eixo de ordenadas é  $y = 0 \Rightarrow (0, 0)$

