

UNIDADE 8- DERIVADA DUNHA FUNCIÓN

1. Taxa de variación media

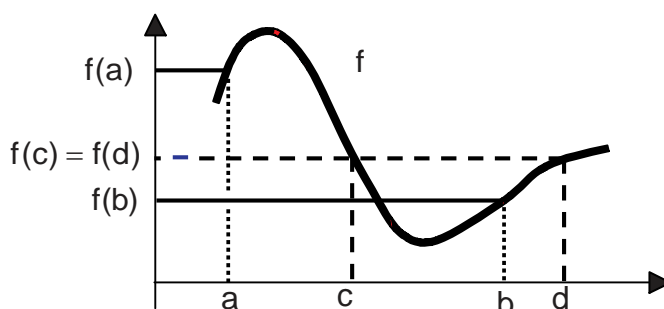
Cando vimos a función lineal destacamos que a pendente nos proporcionaba a Taxa de Variación Media (TVM) da función e escribiamos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, onde o símbolo Δ se chama incremento e nos mide a variación (que pode ser crecemento, se hai un aumento, ou decrecemento, se hai unha diminución) do que vén á súa dereita: Δy é o incremento de y (a función) e Δx o do x (a variable independente).

No caso da función lineal, a representación gráfica da cal é unha recta, m ou a TVM proporcionáanos toda a información sobre o crecemento da función, de modo que se $m > 0$ a función é crecente, se $m < 0$ é decrecente e é constante cando $m = 0$.

Podemos estender o concepto de TVM ás demais funcións sen máis que definila como:

$$TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ou} \quad TVM = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{ou} \quad TVM = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Non obstante, a TVM para funcións que non son lineais non proporciona a mesma información que no caso lineal, podendo mesmo inducir a erro como se deduce do seguinte gráfico



Está claro que a TVM vai ser negativa no intervalo $[a, b]$, pois $f(b) < f(a)$, o que nos levaría a concluir que a función decrece en $[a, b]$, o cal non é de todo certo. Observa que crece alcanzando un máximo e despois decrece ata un mínimo, volvendo a crecer tras este. Tamén notamos que a TVM vale cero no intervalo $[c, d]$, porque $f(c) = f(d)$, polo que concluiríamos que a función é constante no intervalo $[c, d]$, o que está moi lonxe de ser verdade, tal e como podes ver na gráfica. Toda a información anterior non a recolle a TVM debido a que abrangue un intervalo moi amplo no que a función pode sufrir moitas variacións, indetectables pola TVM.

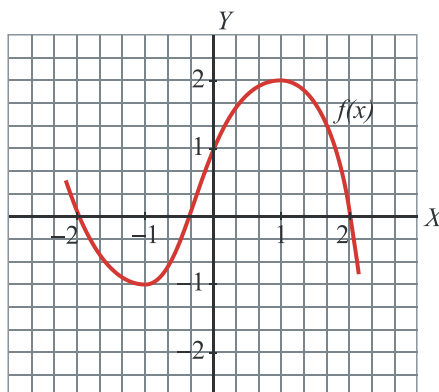
Podemos arranxar as insuficiencias da TVM? Si; o que debemos de facer é reducir o intervalo, facendo que a súa anchura sexa cada vez menor. Para iso recurrimos ao límite do cociente cando a anchura do intervalo tende a cero, polo que podemos escribir $TVI = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ sendo TVI a **taxa de variación instantánea**, máis coñecida como **derivada** dunha función nun punto. No seguinte apartado seguiremos falando da derivada.

Exemplos

- 1 Calcula a taxa da variación media desta función, $f(x)$, nos intervalos seguintes e indica se a función crece ou decrece en cada un de ditos intervalos:

a) $[-1, 0]$

b) $[1, 2]$



$$a) \text{ T.V.M. } [-1, 0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Como a taxa de variación media é positiva, a función es crecente en $[-1, 0]$. (Podese afirmar por ter a gráfica diante senón non se podería afirmar con certeza).

$$b) \text{ T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 2}{1} = -2$$

A función decrece neste intervalo. (Vale a mesma observación do apartado anterior)

- 2 Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = \frac{3}{x}$ no intervalo $[-3, -1]$

$$\text{T.V.M. } [-3, -1] = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{-3 - (-1)}{-1 + 3} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

2. Derivada dunha función nun punto

Rematamos o apartado anterior mencionando a taxa de variación instantánea, que nos permite estudar o crecemento da función punto por punto, ao facer que a anchura do intervalo da TVM tenda a cero. Habitualmente esta taxa recibe un nome especial: chámase **derivada dunha función** nun punto e defínese como:

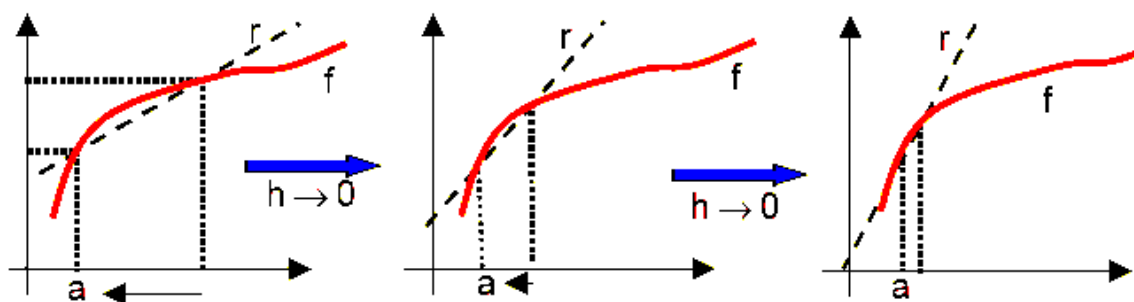
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Decataraste dunhas pequenas diferenzas con respecto á TVM:

- a) Na TVM falábase do intervalo $[a, b]$ e na derivada facémolo do intervalo $[a, a+h]$, é dicir, cambiamos b por $a+h$, polo que a anchura do intervalo será agora $a+h - a = h$, que é o que aparece no denominador.

- b) Na primeira definición da derivada, no apartado anterior cando a chamamos TVI, dixemos que $TVI = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ que parece moi diferente a nosa segunda definición de derivada. Pois non, coinciden: recorda que $\Delta y = f(b) - f(a) = f(a+h) - f(a)$, e que $\Delta x = b - a = a + h - a = h$. A vantaxe que ten esta forma de escribir a derivada dunha función nun punto é a brevidade. O inconveniente: hai que saber o que significa cada termo para poder calcular a derivada correctamente. A derivada escríbese con esta notación (que se debe a Leibnitz como $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e lese derivada de y respecto de x ou diferencial de y (dy) partido por diferencial de x (dx). Esta última lectura procede de consideralo como o cociente dos límites dos incrementos, o que permite escribir $\frac{dy}{dx} = y'$ e despois $dy = y' \cdot dx$). Esta notación non é moi usada actualmente a estes niveis, aínda que presenta vantaxes cando se trata a integral (que veremos en 2º de Bacharelato). Nós usaremos a notación de f'

Podemos facernos unha idea gráfica da derivada mirando a seguinte secuencia para unha mesma función f . Por claridade omitimos escribir $a + h$, que irá cambiando conforme h tenda a 0, e tamén omitimos o valor de f para cada un dos puntos que aparece.



Observa a recta r : en principio corta á función f en dous puntos distintos (é unha recta secante), puntos que conforme h tende a cero aproxímanse cada vez máis, verificándose que no límite cando h tende a 0 corta á función nun único punto, polo que a recta r se converte na **recta tanxente** e a derivada no punto será a pendente da devandita recta tanxente. Tendo en conta este resultado podemos escribir a fórmula para calcular a ecuación da recta tanxente a unha función f nun punto (x_0, y_0) calquera: $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$ na que substituímos a pendente m polo seu valor, que é a derivada no punto.

Atopar un método que permitise calcular a ecuación da recta tanxente a calquera curva foi un das orixes da derivada. A outra orixe foi buscar un método que permitise atopar a velocidade instantánea que leva un móbil. Recordamos que a velocidade media é o espazo percorrido partido polo tempo e a velocidade (instantánea) é o límite do espazo percorrido partido polo tempo cando o tempo tende a cero $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Este último camiño é o que leva ao concepto de taxa de variación instantánea.

Unha vez vista a definición e as interpretacións da derivada queda ver como se calcula. Imos usar un procedemento coñecido como a **Regra dos catro pasos**, que consiste en analizar paso a paso a definición. Vexámolo cun exemplo:

Exemplo

Calcula a derivada de $f(x) = x^2 + 3x - 1$ en $x = 2$.

Por definición $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

1º paso: cálculo das imaxes $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 9$; $f(2+h) = (2+h)^2 + 3(2+h) - 1 =$
 $= 4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 1 = h^2 + 7h + 9$

2º paso: cálculo da diferenza $f(2+h) - f(2) = h^2 + 7h + 9 - 9 = h^2 + 7h = h(h+7)$

3º paso: cálculo do cociente $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h(h+7)}{h} = h + 7$

4º paso: cálculo do límite do cociente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 7) \Rightarrow f'(2) = 7$

Unha observación: se no paso 3º non simplificásemos e eliminásemos h de numerador e denominador, ao tomar o límite obtivésemos a indeterminación $\frac{0}{0}$. Este é un resultado necesario para que exista a derivada no punto porque o denominador, que é h , sempre valerá cero, e o único resultado que non nos dará infinito é que o numerador tamén sexa cero.

Para que o numerador sexa cero hai de verificarse que $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = 0$

$\Rightarrow f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) \Rightarrow$ **o que significa que se hai derivada da función é porque a función é continua**. De aí importancia da continuidade, pois é unha condición necesaria para que a función teña derivada (aínda que non suficiente).

3. Función derivada

No apartado anterior calculamos a derivada dunha función nun punto $x = a$. Non obstante, dado o tedioso que é seguir o procedemento usado para calculala, é lóxico que nos formulemos se podemos atopar unha fórmula ou unha función que nos proporcione a derivada dunha función en calquera punto x , e que poida ser particularizado para certo punto a . Xorde entón o concepto de función derivada, derivada primeira ou, simplemente, de derivada, definíndose a derivada dunha función nun punto calquera x como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A forma de proceder é análoga á anterior (regra dos catro pasos), pero ao tratarse dun valor xenérico x podemos dar fórmulas que nos servirán para as funcións que xa coñecemos.

Exemplos

1. Dada a función $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, descobre a súa derivada.

Definición $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

1º paso: cálculo das imaxes $f(x+h) = k$

2º paso: cálculo da diferenza $f(x+h) - f(x) = k - k = 0$

3º paso: cálculo do cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0$

4º paso: cálculo do límite do cociente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \Rightarrow f'(x) = (k)' = 0$

A derivada dunha (función) constante é cero. Se pensas un pouco, non tería sido necesario aplicar ningunha definición, pois unha función constante nunca cambia, polo que a súa taxa de variación, xa sexa media, xa sexa instantánea, será cero.

2. Dada $f(x) = x^2$ calcula a súa derivada.

1º paso: cálculo das imaxes $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

2º paso: cálculo da diferenza $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h)$

3º paso: cálculo do cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = (2x+h)$

4º paso cálculo do límite do cociente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2)' = 2x$$

3. Descubre a derivada da función $f(x) = \frac{1}{x}$

1º paso: cálculo das imaxes $f(x) = \frac{1}{x+h}$

2º paso: cálculo da diferenza $f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{x \cdot (x+h)} = \frac{-h}{x(x+h)}$

3º paso: cálculo do cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$

4º paso: cálculo do límite do cociente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

Onde está a vantaxe con respecto ao que fixemos no apartado 2? Pois a vantaxe é que se quero calcular a derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$, aprendo que $f'(x) = (x^2)' = 2x \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, ou que se quero calcular o valor da derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = -2$, terei que $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}$ é dicir coñecendo a derivada dunha función non teño máis que substituír cando me interese.

Todas as derivadas que aparecen na táboa que vén a continuación poden obterse como as tres anteriores. Non obstante, o que nos interesa é que aprendas a derivar, é dicir, que aprendas as derivadas das funcións máis importantes e que entendas que teñen a súa orixe na definición que manexamos nos tres exemplos anteriores.

táboa de derivadas das funcións usuais	
Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n, n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{-1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2(x)$

Unha observación ao 2º caso: sérvenos para x elevado a calquera expoñente, xa sexa enteiro ou fraccionario. Por exemplo:

Enteiro: $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$

escribimos o expoñente como negativo e aplicámoslle a fórmula. De igual modo, aínda que xa

a coñecemos, podemos calcular a derivada de $\frac{1}{x} : \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

¹ Fraccionario: $\left(\sqrt[7]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{7}}\right)' = \frac{1}{7} \cdot x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7} \cdot x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7 \cdot x^{\frac{6}{7}}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$. Como \sqrt{x} adoita aparecer con certa frecuencia, separámola do caso xeral, aínda que podemos descubrir a súa derivada mediante a fórmula xeral: $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} =$

$$\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Agora, o máis importante é aprender a táboa anterior.

4. Cálculo de derivadas

Imos ver a continuación a **álgebra de derivadas** ou conxunto de regras para derivar. Todas elas proceden de combinar a definición de derivada coa álgebra de límites que vimos na Unidade 7.

4.1. Derivada da suma de funcións

$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x) \Leftrightarrow$ A derivada dunha suma (ou resta) das derivadas é a suma (o resta) das derivadas.

Exemplos

$$1. (x^2 + \cos x)' = (x^2)' + (\cos x)' = 2x - \operatorname{sen} x$$

$$2. (x - \operatorname{sen} x)' = (x)' - (\operatorname{sen} x)' = 1 - \cos x$$

$$3. \left(\frac{1}{x} + \operatorname{tg} x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' + (\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{x^2} + 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Dada a sinxeleza da fórmula adoita escribirse directamente o resultado:

$$4. (x^3 + 5)' = 3x^2$$

$$5. (x^4 + x)' = 4x^3 + 1$$

$$6. (x^5 - x^2 + x - 7)' = 5x^4 - 2x + 1$$

e, claro está, podemos poñer todos os sumandos que queiramos e o que deberemos facer é ir derivando sumando sumando.

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \operatorname{sen} x + e^x - \ln x + \operatorname{tg} x - \cos x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \cos x + e^x - \frac{1}{x} + 1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{sen} x$$

(Recorda que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ polo que $-(\cos x)' = \operatorname{sen} x$).

4.2. Derivada do produto de funcións

$(f \cdot g)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ A derivada dun produto é igual á derivada do primeiro factor polo segundo sen derivar máis o primeiro factor pola derivada do segundo.

Exemplos

$$1. (x^2 \cdot \cos x)' = (x^2)' \cdot \cos x + x^2 \cdot (\cos x)' = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \operatorname{sen} x$$

$$2. (x^5 \cdot \ln x)' = (x^5)' \cdot \ln x + x^5 \cdot (\ln x)' = 5x^4 \cdot \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^4 \cdot \ln x + x^4 = x^4(5\ln x + 1)$$

$$3. \quad (\sqrt{x} \cdot \text{sen } x)' = (\sqrt{x})' \cdot \text{sen } x + \sqrt{x} (\text{sen } x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{sen } x + \sqrt{x} \cdot \cos x$$

Un caso especial desta fórmula é cando unha das funcións é constante, pois como a derivada dunha constante é cero, só nos quedará un dos termos da dereita:

$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$, **k constante** (a constante multiplicativa non se deriva):

$$5. \quad (5x^3)' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3 \cdot x^2 = 15x^2$$

$$6. \quad (3 \text{sen } x)' = 3 \cdot (\text{sen } x)' = 3 \cos x$$

$$7. \quad (7x^5)' = 7 \cdot (x^5)' = 7 \cdot 5 \cdot x^4 = 35x^4$$

Deixamos a constante e derivamos a función, multiplicando polo valor da constante. Podemos mesturar sumas, restas e produtos, derivando cada unha destas operacións como lles corresponde:

$$8. \quad (x^4 + x^2 e^x)' = (x^4)' + (x^2 e^x)' = 4x^3 + (x^2)'(e^x) + x^2(e^x)' = 4x^3 + 2xe^x + x^2 e^x$$

4.3. Derivada do cociente de funcións

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0 \Rightarrow$ a derivada dun cociente é igual á derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador pola derivada do denominador, partido todo polo denominador ao cadrado.

Fíxate que para que poidamos calcular a derivada do cociente, o denominador ha de ser distinto de cero, pois non podemos dividir por cero.

Exemplos

$$\left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \frac{(x)' \cdot \cos x - x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x - x(-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + \text{sen } x}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)' = \frac{(x^2 + 1)' \cdot (x^2 - 1) - (x^2 + 1)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Os denominadores non se adoitan desenvolver, senón que se deixan indicados.

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \frac{(e^x - 1)' \cdot (e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x + \text{sen } x}{\cos x}\right)' &= \frac{(2x + \text{sen } x)' \cdot \cos x - (2x + \text{sen } x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{(2 + \cos x) \cdot \cos x - (2 + \cos x) \cdot (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + 2x\text{sen } x + \text{sen }^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{2\cos x + 2x\text{sen } x + 1}{\cos^2 x} \quad \text{pois } \cos^2 x + \text{sen }^2 x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{xe^x}{\ln x}\right)' &= \frac{(xe^x)' \cdot \ln x - xe^x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{(x+xe^x)\ln x - xe^x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x(1+x)\ln x - e^x}{(\ln x)^2} = \\ &= \frac{e^x((1+x)\ln x - 1)}{(\ln x)^2} \end{aligned}$$

Como podes comprobar, hai que simplificar ao máximo para obter a derivada; non serve con deixala indicada. Como dixemos a derivada úsase para estudar as funcións e por iso hai que saber o que vale, algo que non podemos coñecer se só a deixamos indicada.

Dentro da derivada dun cociente, podemos considerar o caso particular con k constante

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{k}{f}\right)'(x) = -\frac{k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Observa que o resultado obtense porque a derivada do numerador é cero, ao ser constante (o 1 é unha constante), polo que no numerador só queda a parte do numerador pola derivada do denominador.

$$\left(\frac{3}{\text{sen} x}\right)' = -\frac{3 \cos x}{\text{sen}^2 x} \qquad \left(\frac{3}{x^7}\right)' = -\frac{3 \cdot 7x^6}{x^{14}} = -\frac{21}{x^8}$$

4.4. Derivada da composición de funcións. Regra da cadea

Definimos a derivada da composición de funcións como:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

É dicir, **a derivada dunha composición de funcións é igual ao produto da derivada da primeira función, particularizada na segunda función, pola derivada da segunda función, particularizada en x.**

A dificultade estriba en descubrir cal é a primeira e cal é a segunda función. Para iso, hai que recordar o visto ao falar da composición de funcións, e recordar que **g** era a primeira que actuaba e **f** a segunda. Comparando coa fórmula (tamén coñecida como **regra da cadea**, porque imos derivando elo a elo), vemos que primeiro derivamos **f** (a última que actúa) e despois **g** (a primeira que actúa).

Exemplos

1. Calcula a derivada de a) $y = \text{sen} 2x$; b) $y = \text{sen}^2 x$.

a) Temos dúas funcións seno e $2x$. Primeiro calcularíamos $2x$ e despois o seno, polo que derivamos primeiro o seno (e avaliámolo en $2x$) e despois derivamos $2x$:

$$(\text{sen } 2x)' = \underbrace{\cos 2x}_{\text{derivada del seno}} \cdot \underbrace{2}_{\text{derivada de } 2x} = 2 \cos 2x$$

b) Temos as funcións seno e x^2 (elevar ao cadrado). Primeiro calcularíamos o seno e despois elevaríamos ao cadrado, polo que primeiro derivamos o cadrado e despois o seno

$$(\text{sen}^2 x)' = \underbrace{2 \text{sen} x}_{\text{derivada del cuadrado}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{derivada del seno}} = 2 \text{sen} x \cdot \cos x$$

2. Calcula a derivada de a) $f(x) = (7x+1)^3$ $y = \cos x^2$.

- a) Temos as funcións $7x+1$ e x^3 (elevator ao cubo). Primeiro operariamos $7x+1$ e despois elevariamos ao cubo, polo que derivamos primeiro o cubo e despois $7x+1$:

$$\left((7x+1)^3\right)' = \underbrace{3(7x+1)^2}_{\text{derivada do cubo}} \cdot \underbrace{7}_{\text{derivada de } 7x+1} = 21(7x+1)^2$$

- b) Temos a función coseno e x^2 (elevator ao cadrado). Primeiro calculariamos o cadrado e despois o coseno, polo que primeiro derivamos o coseno e despois x^2 :

$$\left(\cos x^2\right)' = \underbrace{-\sin x^2}_{\text{derivada do coseno}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivada de } x^2} = -2x \sin x^2$$

3. Descubre as derivadas da) $y = e^{-x}$

Temos as funcións exponencial e $-x$. Primeiro cambiariamos o signo ($-x$) e despois a exponencial. Así, derivamos primeiro a exponencial e despois $-x$:

$$\left(e^{-x}\right)' = \underbrace{e^{-x}}_{\text{derivada da exponencial}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{derivada de } -x} = -e^{-x}$$

4. Deriva as seguintes funcións: a) $y = \ln(x^2 - 5x + 1)$; b) $y = \ln(\text{tg} x)$.

- a) Teñen as funcións $x^2 - 5x + 1$ (primeira que se calcularía) e \ln (segunda que se calcularía). Derívase primeiro o \ln e despois o polinomio:

$$\left(\ln(x^2 - 5x + 1)\right)' = \underbrace{\frac{1}{x^2 - 5x + 1}}_{\text{derivada del ln}} \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{\text{derivada de } x^2 - 5x + 1} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 1}$$

- b) Temos as funcións $\text{tg} x$ (a primeira que se calcula) e \ln (a última que se calcula). Así, derívase primeiro \ln e despois a tanxente:

$$\left(\ln(\text{tg} x)\right)' = \underbrace{\frac{1}{\text{tg} x}}_{\text{derivada del ln}} \cdot \underbrace{(1 + \text{tg}^2 x)}_{\text{derivada de la tangente}} = \frac{1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg} x}$$

Nalgúns textos detállase máis a regra da cadea, ampliando a táboa de derivadas que hai que aprender. Aínda que a regra da cadea só esixe pararse a pensar a orde de execución das funcións, tamén pode ser de utilidade a seguinte táboa:

$(f(x))^n$	$n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x), n \in \mathbb{R}$
$e^{f(x)}$	$f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\text{sen}(f(x))$	$f'(x) \cdot \cos(f(x))$
$\cos(f(x))$	$-f'(x) \cdot \text{sen}(f(x))$
$\text{tg}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = f'(x)(1 + \text{tg}^2(f(x)))$

Observa que na táboa só temos dúas funcións e que os seus resultados se obteñen da regra da cadea, que deberemos usar cando aparezan máis de dúas funcións.

Exemplos

1. Descobre a derivada de a) $y = e^{5x+3}$; b) $y = \ln(x^2 + x - 1)$.

a) $(e^{5x+3})' = 5e^{5x+3}$, pois $(5x+3)' = 5$.

b) $(\ln(x^2 + x - 1))' = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$ pois $(x^2 + x - 1)' = 2x + 1$

2. Calcula a derivada de a) $(3x^5 - 5x^2 + 7)^8$ b) $\sqrt[3]{(9x - 5)^2}$

a) $((3x^5 - 5x^2 + 7)^8)' = 8(3x^5 - 5x^2 + 7)^7 (15x^4 - 10x)$, pois $(3x^5 - 5x^2 + 7)' = 15x^4 - 10x$.

b) $(\sqrt[3]{(9x - 5)^2})' = ((9x - 5)^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}(9x - 5)^{-\frac{1}{3}} \cdot 9 = \frac{6}{\sqrt[3]{9x - 5}}$, pois $(9x - 5)' = 9$

3. Deriva as seguintes funcións: a) $f(x) = (x^2 - 4)^2$; b) $y = \text{sen}(x^2 - 3x)$.

a) $[(x^2 - 4)^2]' = 2(x^2 - 4)2x = 4x(x^2 - 4)$ pois $(x^2 - 4)' = 2x$

b) $(\text{sen}(x^2 - 3x))' = \cos(x^2 - 3x) (2x - 3) = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x)$, pois $(x^2 - 3x)' = 2x - 3$

5. Derivadas sucesivas

Pódenos servir para algo resolver a taxa de variación instantánea da derivada? Fíxate que a derivada é unha función, polo que podemos calcular o seu TVI, que será a derivada da derivada. A derivada da derivada dunha función recibe o nome de **derivada segunda** e na unidade seguinte usarala para estudar a curvatura (concavidade e convexidade) dunha función. Defínese como:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Este proceso podémolo prolongar indefinidamente e así teremos a derivada terceira f''' (que é derivar a derivada segunda), a derivada cuarta f^{IV} (que é derivar a derivada terceira), a derivada quinta f^V (derivar a derivada cuarta), ..., a derivada n-sima ou enésima f^n . Observa a notación: úsanse números romanos para as primeiras e unha paréntese co grao para as de orde superior co fin de non as confundir coas potencias. Estas **derivadas sucesivas ou de ordens superiores** calcúlanse coas mesmas regras que vimos para a derivada, que agora se chama derivada primeira (e simplemente derivada cando non hai confusión posible).

Exemplos

1. Calcula a derivada segunda, terceira e cuarta das seguintes funcións:

a) $y = x^3$; b) $f(x) = \sin x$; c) $y = \cos x$.

a) $y' = 3x^2$; $y'' = 3 \cdot 2x = 6x$; $y''' = 6$; $y^{IV} = 0$.

b) $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{IV}(x) = \sin x$.

c) $y' = -\sin x$; $y'' = -\cos x$; $y''' = \sin x$; $y^{IV} = \cos x$.

2. Calcula a derivada segunda, terceira e cuarta das seguintes funcións:

a) $y = 6x^7 - 5x^2 + 4$; b) $f(x) = \ln x$; c) $y = e^{2x}$.

a) $y' = 6 \cdot 7 x^6 - 5 \cdot 2x = 42 x^6 - 10x$; $y'' = 42 \cdot 6 x^5 - 10 = 252 x^5 - 10$; $y''' = 252 \cdot 5x^4 = 1260x^4$;
 $y^{IV} = 1260 \cdot 4x^3 = 5040x^3$.

b) $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$; $f'''(x) = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f^{IV}(x) = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$

c) $y' = 2e^{2x}$; $y'' = 2 \cdot 2e^{2x} = 4e^{2x}$; $y''' = 4 \cdot 2e^{2x} = 8e^{2x}$; $y^{IV} = 8 \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}$.

3. Calcula a derivada segunda, terceira e cuarta de:

a) $y = \cos 3x$; b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; c) $f(t) = t^3 - 2t + 1$.

a) $y' = -\sin 3x \cdot 3 = -3 \sin 3x$; $y'' = -3 \cdot 3 \cos 3x = -9 \cos 3x$

$y''' = -9 \cdot (-3) \sin 3x = 27 \sin 3x$; $y^{IV} = 27 \cdot 3 \cos 3x = 81 \cos 3x$.

b) $f(x) = (x+2)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -(x+2)^{-2} = -\frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x) = -(-2)(x+2)^{-3} = 2(x+2)^{-3} = \frac{2}{(x+2)^3}$;

$f'''(x) = 2(-3)(x+2)^{-4} = -6(x+2)^{-4} = \frac{-6}{(x+2)^4}$; $f^{IV}(x) = -6(-4)(x+2)^{-5} = \frac{24}{(x+2)^5}$

c) $f'(t) = 3t^2 - 2$; $f''(t) = 6t$; $f'''(t) = 6$; $f^{IV}(t) = 0$.

4. Calcula a derivada segunda de $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2};$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-1)^2 - (-x^2-1) \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \stackrel{(1)}{=} \frac{(x^2-1)[-2x(x^2-1)-4x(-x^2-1)]}{(x^2-1)^4} =$$

$$\frac{-2x^3+2x+4x^3+4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

En (1) sacamos factor común no numerador. Fíxate que coincide co denominador, polo que poderemos simplificar. Deste modo o denominador non queda elevado a 4 senón a 3 e tamén diminúe o grao do numerador, quedando unha fracción alxébrica máis sinxela. Este procedemento podémolo realizar sempre que derivemos fraccións alxébricas, e é a razón de non desenvolver o cadrado que aparece no denominador.