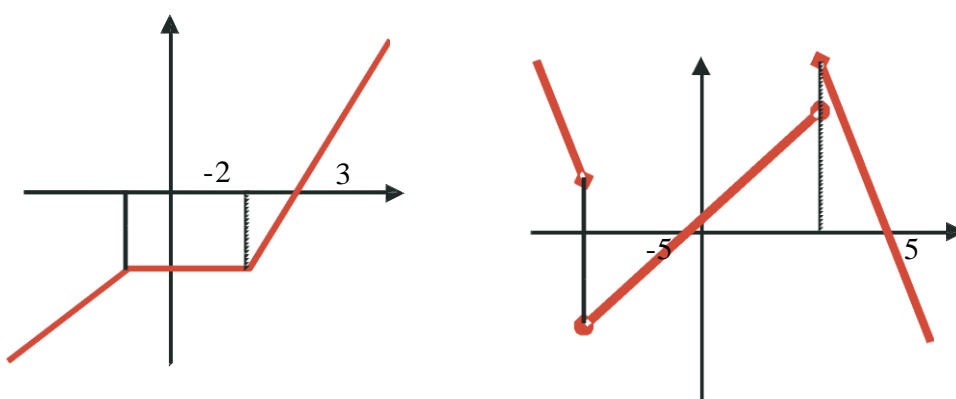


UNIDADE 7 :

LÍMITE E CONTINUIDADE DUNHA FUNCIÓN

1. Idea de continuidade e de descontinuidade

Ao tratar as funcións definidas a anacos atopamos exemplos de **funcións continuas** e de **funcións discontinuas** nun punto. Habitualmente dise que unha función é continua nun punto cando a súa gráfica se pode trazar sen ter que levantar o lapis do papel, mentres que dicimos que é discontinua ou non continua nun punto cando hai que levantar o lapis do papel para seguir trazando a gráfica:

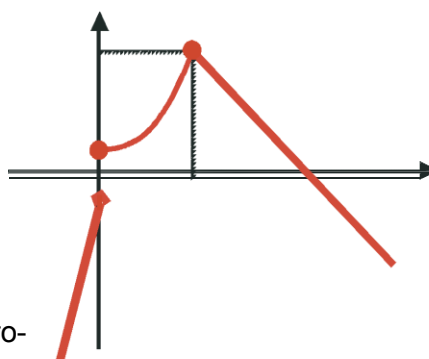


A función da esquerda é continua en todo \mathbb{R} ; podería presentar problemas en $x = -2$ e $x = 3$ que é, como se aprecia pola gráfica, onde hai cambios de definición, pero aí os anacos da función empalman perfectamente.

A función da dereita non é continua en $x = -5$ nin en $x = 5$, pois presentasen dous saltos nos que é necesario levantar o lapis.

Parece claro que podemos saber onde unha función é continua ou non mirando directamente a súa gráfica, pero debuxar unha gráfica non é sempre doado. No que respecta ás funcións definidas a anacos, os posibles puntos de discontinuidade adoitan ser normalmente aqueles nos que a función cambia de definición. Así, nestes casos o que faremos é ver se os anacos empalman con continuidade. Por exemplo, en

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & \text{se } x < 0 \\ 1 + \frac{x^2}{4}, & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 9 - x, & \text{se } x > 4 \end{cases}$$



os posibles puntos de discontinuidade son $x=0$ e $x=4$. Para ver se as definicións empalman os trozos con continuidade calculan o que vale f nas proximidades do 0, pola esquerda, $f(0^-)$ e pola dereita, $f(0^+)$:

$$f(0^-) = 4 \cdot 0 - 1 \qquad f(0^+) = 1 + \frac{0}{4} = 1$$

Como non coinciden ambos os dous valores, a función non será continua en $x=0$.

Dado que á esquerda de 0 a función está definida por $4x - 1$, o que facemos é calcular o valor que toma este polinomio en $x = 0$, ou mellor dito tan preto de cero como queiramos, pero á esquerda. Á dereita de 0 a función esta definida por $1 + \frac{x^2}{4}$ e por iso calculamos o valor que toma este outro polinomio tan preto de cero como queiramos.

Se facemos o mesmo en $x = 4$ teremos: $f(4^-) = 1 + \frac{4^2}{4} = 5$ e $f(4^+) = 9 - 4 = 5$
Ao coincidir os valores pola esquerda e pola dereita concluímos que a función é continua en $x = 4$.

Resumindo, afirmaremos que a función é continua en todo \mathbb{R} salvo en 0, que é discontinua. Ademais como os valores que toma a función á esquerda e á dereita do 0 son finitos, diremos que a **descontinuidade é de salto finito**.

Outro tipo de funcións que poden presentar discontinuidades son aquelas definidas como cocientes, pois se o denominador se fai cero a función pode presentar saltos infinitos. Por exemplo:

$$y = \frac{3}{x-5} \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-5} \longrightarrow -\infty & \text{cando } x \rightarrow 5^- \\ \frac{3}{x-5} \longrightarrow \infty & \text{cando } x \rightarrow 5^+ \end{cases}$$

Así a función será continua en $\mathbb{R} - \{5\}$, mentres que en $x = 5$ presenta unha discontinuidade de salto infinito. Neste caso non é necesario estudar o comportamento da función cerca de $x = 5$, pois directamente vemos que non existe. É imposible calcular $\frac{3}{0}$

Outra posible causa de discontinuidade é que non se definira a función no punto. Isto pode deberse a que se esquecera na definición (caso das funcións definidas a anacos), tal como acontece en:

$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 2 \\ 5 - x, & \text{se } x > 2 \end{cases} \Rightarrow$ O punto problemático é $x = 2$, porque non hai $f(2)$, xa que non está definido na función. Pero $f(2^-) = 2 + 1 = 3$ e $f(2^+) = 5 - 2 = 3$ polo que f sería continua en $x = 2$. Se tivésemos definida a función nese punto, así:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 2 \\ 5 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \text{ agora, } f \text{ se é continua en } \mathbb{R}$$

A discontinuidade pode aparecer porque resulte a fracción $\frac{0}{0}$. Calquera número é o cociente desta división, pois todos os números multiplicados por cero dan cero.

A este exceso de resultados chámasele **indeterminación**. Un modo de decidir se a función é continua consiste en resolver a indeterminación, que no caso de fraccións alxébricas redúcese a simplificalas, como vemos no exemplo seguinte:

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Se achamos o valor da función en $x = 1$ e $x = -1$ resulta: $g(1) = \frac{2}{0}$ é unha discontinuidade de salto infinito, pero $g(-1) = \frac{0}{0}$ é un indeterminación. Neste caso como numerador e denominador son polinomios e se anulan para $x = -1$, este valor é unha raíz de ambos os dous polinomios, polo que ambos os dous tendrán ao binomio $x + 1$ como factor.

Factorizamos o denominador porque o numerador xa está, e despois de simplificar obtemos:

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}, \text{ logo } g(-1) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

É dicir, substituímos a función $g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ por $g(x) = \frac{1}{x-1}$

Un último caso peséntase en $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 2 \\ 9, & \text{se } x = 2 \\ 5-x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$ Fixate que: $f(2) = 9 \neq f(2^-)$ e $f(2^+)$

polo que a función non sería continua en $x=2$, xa que habería que despegar o lapis para representar $f(2)$. Esta situación é doada de resolver redefinindo a función de modo que $f(2)$ sexa igual a 3.

Nestes tres últimos casos dise que a función presenta **descontinuidades evitables**, ou o que é o mesmo, que facendo un arranxo mínimo podemos redefinir a función para que sexa continua.

En resumo temos 3 posibilidades:

- I. Que a función presente unha **descontinuidade inevitable de salto finito** (adoita darse en funcións definidas a anacos).
- II. Que a función presente unha **descontinuidade inevitable de salto infinito** (logo veremos que a función terá asíntotas verticais nos puntos nos que presenta este tipo de descontinuidade).
- III. Que a función presente unha **descontinuidade evitable** e que se evita redefinindo a función.

Os exemplos e as actividades deste apartado van ao final do apartado 3 **Cálculo de límites**, pois é necesario saber calcular límites para poder estudar correctamente a continuidade.

2. Límite dunha función nun punto

O símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, que se le límite de $f(x)$ cando x tende á, é o valor ao que se achega f cando x aproxímase a a . Consideremos as seguintes táboas de valores para a función $f(x) = x^2 + 2x + 3$ na que demos valores próximos a 1, para calcular $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3)$:

x	0,9999	0,99999	0,999999	0,9999999	0,99999999	0,999999999
$f(x)$	5,9996	5,99996	5,999996	5,9999996	5,99999996	5,999999996

x	1,0001	1,00001	1,000001	1,0000001	1,00000001	1,000000001
$f(x)$	6,0004	6,00004	6,000004	6,0000004	6,00000004	6,000000004

Das táboas pode observarse que ao aproximarnos a 1, por un lado ou por outro, o valor da función aproxímase a 6, logo $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3) = 6$. Fagamos unas observacións á vista da táboa:

-Construímos dúas táboas: unha para achegarnos a 1 con valores menores que el e moi próximos. Esta táboa daríanos o **límite lateral pola esquerda**, que se representa por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$. Recorda que a^- indica que estamos á esquerda de a .

Na outra táboa usamos números maiores que 1 pero tamén moi próximos a el. Dela obtemos o **límite lateral pola dereita**, que se representa por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Con a^+ referímonos aos números maiores que a , que están ao seu dereita. Para que exista o límite da función no punto, han de existir e coincidir os límites laterais: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Normalmente son só as funcións definidas a anacos as que poden presentar problemas cos límites laterais, mentres que no resto das funcións se pode calcular o límite directamente, sen ter que recorrer aos límites laterais.

-Observa que $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3) = 6$. Isto é o que vai acontecer habitualmente: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ coincide con $f(a)$, polo que para calcular o límite abundará cos substituír o valor ao que tende x directamente na fórmula da función. Xa veremos que isto sucede porque traballamos habitualmente con funcións continuas.

-Fíxate que conforme nos achegabamos a 1, tanto pola esquerda coma por a dereita, a función íase achegando a 6. A definición rigorosa de límite baséase no feito de que se fixamos unha cota para a diferenza entre 1 e o número x co que nos achegamos a el, atopamos unha cota para a diferenza entre o límite 6 e $f(x)$. Por exemplo, cando $|1 - 0,999999| < 2 \cdot 10^{-6}$ temos que $|6 - 5,999996| < 7 \cdot 10^{-6}$. Non obstante, a definición rigorosa de límite non nos proporciona un método para calcular límites, senón que permite afirmar que o número que damos como límite de verdade o é. Vexamos algúns detalles curiosos e significativos:

Consideremos, en primeiro lugar a función $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 1 \\ 5 - 3x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Observa que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5 - 3x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

pero non existe $f(1)$, porque non está definida. Aínda que pareza estraño, recorda que o límite é o valor ao que se achega a función cando x tende ao punto, pero non é o valor da función no punto. Que coincidan o límite e o valor da función no punto é debido a que tratamos con funcións continuas, que verifican obrigatoriamente esta igualdade.

Observa outro detalle: escribimos límite lateral cando falamos da función $f(x)$ en xeral, e escribimos só límite cando substituímos $f(x)$ pola fórmula coa que calcularemos o límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Vexamos agora que sucede con $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{x-3}$. Observa que mentres que o numerador achégase a 8, o denominador cada vez aproxímase máis a cero, polo que o cociente será cada vez maior. Estamos tentados a escribir $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{x-3} = \infty$. Hai que evitar as tentacións, porque dependendo de como se achegue o denominador a cero, a función pode ir a 4 ou a -4, e a diferenza entre eles non é pouca. Así, sempre que o denominador tenda a cero descompoñemos o límite nos seus límites laterais, pois estes terán comportamentos diferentes. Obviamente, dicir que un límite é infinito, é dicir que non existe tal límite, pois a función crece sen que nada a pare.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+5}{x-3} = -\infty \text{ pois } 3^- < 3 \Rightarrow x-3 < 0 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+5}{x-3} = \infty \text{ pois } 3^+ < 3 \Rightarrow x-3 > 0$$

Un resultado importante, que convén non esquecer, é que o límite, se existe, é único.

Estamos en condicións agora de escribir a definición de continuidade nun punto: Dicimos que f é continua en $x = a$ cando se cumpren as tres condicións seguintes:

1. Existe $f(a)$.
2. Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ o que significa, no caso de funcións definidas a anacos, que existen os límites laterais e coinciden: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$:coinciden o valor do límite co valor da función no punto.

Todas as funcións que vimos ata o momento son continuas, unhas en todo R e outras nos seus dominios, polo que podemos escribir:

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k \text{ para toda constante } k$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \text{ para todo } n \text{ real. Aquí están incluídas tamén as raíces de calquera índice.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{f(a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln(f(x)) = \ln(f(a))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(f(x)) = \sin(f(a))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos(f(a))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}(f(a))$$

Neste apartado só vimos límites de funcións sinxelas, no apartado seguinte imos ampliar o tipo de funcións, e por iso situamos ao final do apartado 3 as actividades e os exemplos concernentes á continuidade e ao cálculo de límites.

3. Cálculo de límites sinxelos

3.1. Álgebra de límites

Cos resultados anteriores poucos límites poderemos calcular. Necesitamos algunhas propiedades máis, que se engloban baixo o nome de álgebra de límites:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ o límite dunha suma é a suma dos límites.}$$

Exemplos

Calcula os límites seguintes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} (4 + x^2) = \lim_{x \rightarrow 3} 4 + \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 4 + 3^2 = 13$$

En lugar de escribir tantas veces o termo límite, podemos facelo directamente, calculando o límite termo a termo e sumando os resultados:

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + x + 5) = (-2)^3 + (-2) + 5 = -8 - 2 + 5 = -5$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} (x^5 + x^4 + e^x) = 1^5 + 1^4 + e^1 = 1 + 1 + e = 2 + e$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - e^x) = \sin 0 - e^0 = 0 - 1 = -1$$

Co límite da suma tamén calculamos os da resta, recordando que restar é sumar o oposto, e o oposto non é máis que cambiar o signo.

$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$ o límite dun produto é o produto de límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 \cdot e^2) = (-2)^2 \cdot e^2 = \frac{4}{e^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} (5x^3) = 5 \cdot 4^3 = 5 \cdot 64 = 320$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} (7\sqrt{x} \cdot \ln x) = 7\sqrt{1} \cdot \ln 1 = 7 \cdot \ln 1 = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x \cdot \ln x) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \ln \frac{\pi}{2} = \ln \frac{\pi}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ o límite dun cociente é o cociente de límites.

E x e m p l o s

Calcula os seguintes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \frac{e^{5^2}}{5^2} = \frac{e^{25}}{25}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{\ln x} = \frac{\cos \pi}{\ln \pi} = \frac{1}{\ln \pi}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = \frac{\cos 0}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\lg(x+1)}{e^{x+2}} = \frac{\lg(-1+1)}{e^{-1+2}} = \frac{\lg(0)}{e^1} = \frac{0}{e} = 0$$

Cando o denominador se achegue a cero e o numerador a un número, habemos de proceder como o fixemos no apartado 1, calculando os límites laterais:

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{3(-2)+1}{-2+2} = \frac{-5}{0} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{-5}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty \end{array} \right.$$

Calcular o límite lateral non consiste máis que en descubrir o signo do denominador preto do valor do que tomamos o límite, pois o do numerador xa é coñecido. En e) para calcular o límite pola dereita de -2 podemos coller -1,99, quedando o denominador positivo (indicámolo con 0^+); para o límite pola esquerda usamos -2,01, quedando o denominador negativo (indicámolo con 0^-).

$$f) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1-x^2}{2x-14} = \frac{1-7^2}{2 \cdot 7-14} = \frac{-48}{0} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{1-x^2}{2x-14} = \frac{-48}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1-x^2}{2x-14} = \frac{-48}{0^+} = -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

o límite dunha función elevada a outra é igual ao límite da base elevada ao límite do expoñente.

Exemplos:

Calcula os seguintes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 1)^{x+2} = (1^2 + 1 - 1)^{1+2} = 1^3 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 4)^{\sin x} = (0 + 4)^{\sin 0} = 4^0 = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^{\tan x} = (2 - 2)^{\tan 2} = 0^{\tan 2} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x + 3)^{\sin x} = (\cos \pi + 3)^{\sin \pi} = (-1 + 3)^0 = 2^0 = 1$

3.2 Indeterminación 0/0

Para achar o límite dun cociente esiximos que o denominador non se anulase, porque se se anula a función tende a ∞ ou $-\infty$. Cando se anulan simultaneamente numerador e denominador estamos ante a indeterminación $\frac{0}{0}$, pois cualquier número sérvenos como resultado do cociente (recorda que calquera número por cero sempre é cero).

Imos estudar esta indeterminación no caso de que numerador e denominador sexan polinomios (a este tipo de funcións tamén se lles chama **fraccións alxébricas**) ou funcións con raíces cadradas. Para outro tipo de funcións hai que usar unha regra chamada Regra de L'Hôpital, o contido da cal escapa ao nivel deste curso.

Se nunha fracción alxébrica se anula o numerador e o denominador para un valor a , isto significa que son divisibles por $x - a$. O que faremos será factorizar ambos os dous polinomios e simplificar, co que desaparecerá a indeterminación.

Exemplos

Calcula os seguintes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \frac{3^2 - 9}{3^2 - 2 \cdot 3 - 3} = \frac{0}{0}$ indeterminación

Factorizamos numerador e denominador usando a **Regra de Ruffini** ou a ecuación de segundo grao (porque son polinomios de segundo grao) obtendo:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3); \quad x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{2-2}{\sqrt{2+7}-3} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación}$$

Cando temos raíces cadradas hai que multiplicar e dividir por o **conxugado** do termo que conteña as raíces.

Multiplicamos e dividimos polo conxugado do denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7})^2 - 3^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+7}+3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2+7}+3) = 3+3 = 6$$

Os exemplos e actividades seguintes versan sobre continuidade e cálculo de límites.

1. Calcula os seguintes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-5}{x+7} = \frac{2 \cdot 1 - 5}{1+7} = \frac{-3}{8}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ sendo } f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x-1 = 1$$

2. Estuda a continuidade de $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ 2x+6, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Representa a función.

Solución: O único punto onde pode presentar problemas para a continuidade é $x=0$, que é onde cambia de definición a función. Vexamos se cumpre as tres condicións esixidas para que a función sexa continua no devandito punto:

$$\text{Existe } f(0) = 2 \cdot 0 + 6 = 6.$$

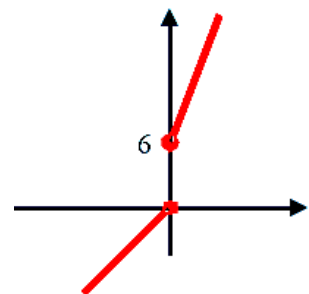
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+6) = 6 \Rightarrow \text{Como os límites laterais son distintos, non}$$

existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, polo que non é continua neste punto. Resumindo, f é continua

en $\mathbb{R} - \{0\}$, presentando unha discontinuidade de salto finito en $x=0$.

Para representala vemos que se trata de dúas semirectas polo que serán suficientes 4 puntos para facelo:

x	-3	0^-	0	3
$f(x)$	-3	0	6	12



3. Estuda a continuidade da función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Representaa graficamente.

Solución: O único punto problemático é $x=1$, que é onde cambia de definición a función. Estudamos as 3 condicións:

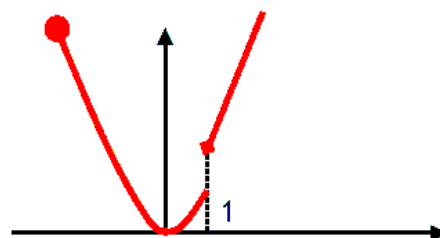
$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2 \Rightarrow \text{como non coinciden os límites laterais, non}$$

existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, polo que f non é continua no devandito punto. Resumindo, f é continua en

$\mathbb{R} - \{1\}$, e presenta unha descontinuidade de salto finito en $x=1$.

Agora hai que representar unha parábola e unha recta:



4. Calcula os seguintes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{9}{x - 5}$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = \frac{4^2 - 8 \cdot 4 + 16}{4 - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

Factorizamos numerador e denominador, sabendo que ambos os dous teñen un factor $x - 4$.

$$\text{O límite queda: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)^2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 4) = 4 - 4 = 0.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{9}{x - 5} = \frac{9}{0} \quad \text{Como queda un número partido por cero, hai que calcular os}$$

límites laterais: $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{9}{x - 5} = \frac{9}{0^-} = -\infty$ (proba con 4,99); $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{9}{x - 5} = \frac{9}{0^+} = \infty$ (proba con 5,01).

5. Calcula os seguintes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{4x - 8}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 3}{x^2 - x - 2}$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{4x - 8} = \frac{6}{0} \Rightarrow \text{calculamos os límites laterais ao quedar un número partido por}$$

$$\text{cero: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{6}{4x - 8} = \frac{6}{0^-} = -\infty \quad (\text{proba con 1,99}); \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6}{4x - 8} = \frac{6}{0^+} = \infty$$

(proba con 2,01)

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{x^2-x-2} = \frac{3(-1)+3}{(-1)^2-(-1)-2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Factorizamos o numerador e denominador, sabendo que $x+1$ é un factor, Obtendo $3(x+1)$, $(x+1)(x-2)$, respectivamente. O límite valerá:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{(x-2)} = \frac{3}{(-1-2)} = -1$$

4. Límites no infinito

4.1. Límites no infinito de funcións básicas

¿Que significan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ó $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$? Por ∞ e $-\infty$ representamos valores moi grandes

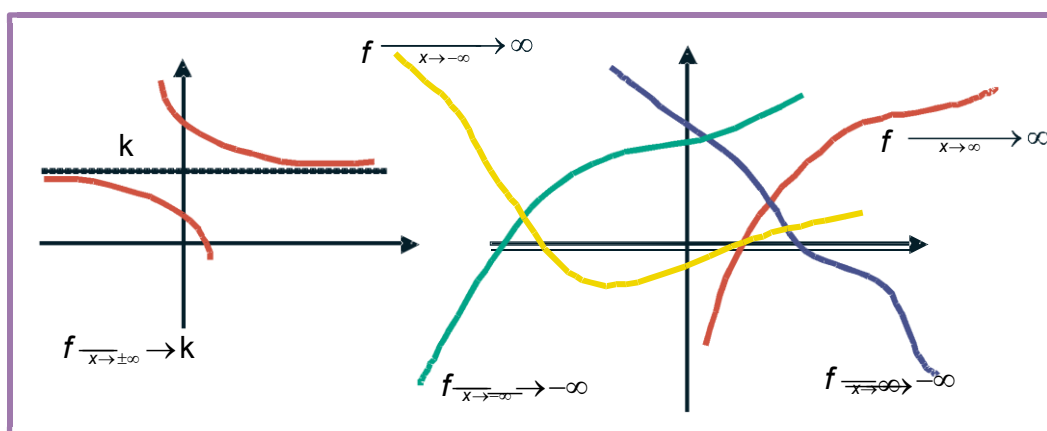
da variable (en valor absoluto no caso de $-\infty$, porque considerado co signo serían extraordinariamente pequenos). Graficamente, ∞ está á dereita e o límite pódenos indicar que lle acontece á función cando a variable independente crece indefinidamente, sen nada que a pare. Pola súa banda, $-\infty$ está á esquerda, e neste caso indícanos que lle acontece á función cando x decrece indefinidamente.

Pódense formular seis casos que recollen as gráficas en cores:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$, o que indica que a función está **acoutada** achegándose a un valor k .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, o que indica que f non está acoutada **superiormente** e aumenta

tanto se a variable independente crece, coma se diminúe.



$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$, que indica que f non está acoutada inferiormente e diminúe tanto se a x aumenta coma se diminúe.

Aínda que para calcular límites no **infinito** recorreremos a usar valores de x moi grandes, convén ter en conta que infinito non é un número, non segue as regras que debe cumprir calquera número, xa que, $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty^\infty = \infty$. En realidade, é unha convención matemática que indica a imposibilidade de deter algo que aumenta.

Os seguintes resultados son bastante evidentes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^r = \infty, r > 0$$

Isto permítenos calcular límites como $\lim_{x \rightarrow \infty} x^7 = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[7]{x} = \infty$ pois serve para calquera valor real do expoñente r .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^r = (-1)^r \cdot \infty, r > 0$$

Fíxate que o único que habemos de ter en conta é o expoñente da x , pois se é impar, como se trata de $-\infty$, o signo será $-$, e se é par o signo será $+$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0, \text{ se } r > 0$$

Agora podemos calcular límites como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^7} = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = 0$. Observa que agora o que sexa ∞ ou $-\infty$ é indiferente, pois 0 non ten signo.

Multiplicar por unha constante non cambia nin o valor nin o signo do límite se esta é positiva, e cambia o signo se é negativa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (7x^3) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^4) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = -(-\infty) = \infty$$

No caso de $\frac{1}{x^r}$ o multiplicar por unha constante, xa sexa positiva ou negativa, e aínda

que sexa moi grande, non cambia o valor do límite, verificándose que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^r} = 0$

$$\text{Podes ver que } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1899}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10^{20}}{x} = 0$$

¿Sorpréndete o último resultado? Recorda que calcular o límite cando x tende a infinito é poñer x moi grande, e sempre podemos atopar números maiores (e moito maiores) que 10^{20} (como 10^{200} , 10^{400} , 10^{1000} etc.), polo que o cociente tenderá a cero, independentemente do valor da constante, que é unha cantidade fixa, cousa que non acontece con x .

Este resultado é importante xa que nos vai permitir simplificar o cálculo de límites de polinomios;

abondará sacar en factor común o monomio de maior grao:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5 - 3x^2 + 6x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5) \left(1 - \frac{3x^2}{2x^5} + \frac{6x}{2x^5} - \frac{1}{2x^5} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5) \left(1 - \frac{3}{2x^3} + \frac{6}{2x^4} - \frac{1}{2x^5} \right) &\approx \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5) \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^5) \end{aligned}$$

Observa que ao sacar factor común o monomio de maior grao teremos que poñelo dividindo a todos os demais termos. O único termo do segundo paréntese que non se anula, ao calcular o límite, é o 1, co que o límite infinito dun polinomio queda reducido a calcular o límite do monomio de maior grao, que sempre será +infinito ou -infinito. Vexamos outro exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4 - 1000x + 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(3x^4) \left(1 - \frac{1000x}{3x^4} + \frac{2}{3x^4} \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(3x^4) \left(1 - \frac{1000}{3x^3} + \frac{2}{3x^4} \right) \right] \approx \lim_{x \rightarrow \infty} [(3x^4) \cdot 1] = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4) = \infty$$

Grazas a isto podemos escribir directamente que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - 2x + 4x^2) \approx \lim_{x \rightarrow \infty} (4x^2)$$

Polo que respecta á exponencial e o logaritmo vimos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

Non obstante, das funcións trigonométricas non podemos dicir que lles acontece nin en ∞ nin en $-\infty$, debido á periodicidade, polo que **non se poden calcular**

4.2 Indeterminacións $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$

Podemos aplicar as regras da álgebra de límites para o cálculo de límites no infinito de funcións máis complexas que as tratadas ata agora. Aínda que pareza un tanto estraño imos a empezar polo límite de cocientes de funcións:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^3 - 6x^2 + 1}{x^4 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^5}{\lim_{x \rightarrow \infty} x^4} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aparece a indeterminación, debido a que ∞ non é un número, pois se o fóra non teríamos indeterminación senón que escribiríamos que o resultado é 1.

Para resolver esta indeterminación simplificamos o cociente e logo calculamos o límite, obtendo:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^3 - 6x^2 + 1}{x^4 + 1} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x + 4x^3}{3x^3 - 15} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3} = \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminación}$$

Procedendo como antes obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x+4x^3}{3x^3-15} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x+4}{3x^2-5} \approx \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 7x}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^{\frac{1}{2}}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{\frac{1}{2}}}{3x^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Observa que no caso de polinomios, tanto no numerador coma no denominador (o que se denomina fraccións alxébricas), poden darse tres situacións:

A) Que o grao do numerador sexa maior que o grao do denominador: o cociente será

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6-x}{1-4x^3} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{6}{3}}}{-4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{-4} x^3 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6-x}{1-4x^3} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^{\frac{6}{3}}}{-4x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{-4} x^3 \right) = -(-\infty) = \infty$$

B) Que o grao do numerador sexa igual ao grao do denominador: o límite é o cociente dos coeficientes dos monomios de maior grao do numerador e do denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+7x^2}{2+3x-5x^2} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^{\frac{2}{2}}}{-5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{-5} \right) = -\frac{7}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3-18}{5x^3+4x-7} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^{\frac{3}{3}}}{5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{5} \right) = \frac{6}{5}$$

C) Que o grao do numerador sexa menor que o grao do denominador: o límite do cociente sempre é cero.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-4x^3}{3x^6-x} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^{\frac{3}{3}}}{3x^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-4}{3x^3} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-45}{x^3+1} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x^2} \right) = 0$$

Estes resultados poden usarse directamente, aínda que hai que ter precaución co primeiro deles, pois que o límite sexa ∞ ou $-\infty$ depende non só de cara a onde tenda x , senón dos coeficientes dos monomios de maior grao e do expoñente da x .

Esta forma de resolver a indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ só serve para as fraccións algebraicas e é necesario outro procedemento para cocientes doutro tipo de funcións.

Casos triviais de límites no infinito prodúcense cando se suma infinito con calquera número, cando se suman infinitos, cando se multiplica infinito por un número

ou cando se multiplican infinitos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3 \ln x + e^{-x}) = \infty + 0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + e^x) = \infty + \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 e^x) = \infty \cdot \infty = \infty$$

Tamén resulta unha indeterminación cando se obtén $\infty - \infty$

Se se trata da resta de fraccións alxébricas efectuaremos a resta das fraccións:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty - \infty$$

O porqué cada fracción sae infinito está explicado ao tratar a indeterminación

$\frac{\infty}{\infty}$

Non obstante, se restamos as fraccións:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x+1) - x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3 + x^2}{x^2 - 1} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} &= 2 \end{aligned}$$

Se se trata de funcións con raíces multiplicaremos e dividiremos por o conxogado do que teña a raíz. Vexamos algúns exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) &= \infty - \infty \text{ indeterminación} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3-x}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x) &= \infty - \infty \text{ indeterminación} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x) = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1 - x^2}{(\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{2x} &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Neste tipo de indeterminación con raíces hai que ter coidado cos graos de numerador e denominador, e co ou os polinomios que podamos ter dentro da raíz, polo que é aconsellable operar cos monomios de maior grao para simplificar antes de dar o resultado.

Outra indeterminación é $\infty \cdot 0$ que se converte en $\frac{\infty}{\infty}$ se escribimos 0 como $\frac{1}{\infty}$ ou en

$\frac{0}{0}$ se convertemos ∞ en $\frac{1}{0}$.

No nivel no que nos desenvolvemos no presente curso esta indeterminación é trivial:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 \right) = 0 \cdot \infty \text{ indeterminación} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \infty$$

Fíxate que para ter esta indeterminación separamos un cociente. Dado que esta indeterminación pode converterse en $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, no caso de que non sexan polinomios, hai que usar outro procedemento chamada Regra de L'Hôpital, que non se verá neste curso.

5. Asíntotas

Chámase **asíntota** á recta á que se achega a función cando a función non está acoutada nun punto (**asíntota vertical**), ou á recta á que se achega a función cando $x \rightarrow \pm\infty$ (**asíntota horizontal** e **asíntota oblicua**). Así, temos tres tipos de asíntotas que estudaremos seguidamente.

Unha **asíntota vertical** indica que a función tende a ∞ ou $-\infty$ conforme x se achega un punto. Este é o comportamento que vimos nas función $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x-5}$, $y = \ln x$ e dáse en funcións definidas como cocientes nos puntos que anulan o denominador, ou no caso do logaritmo, nos puntos que anulan o argumento. A ecuación dunha asíntota vertical é $x=a$, sendo a o número que anula ao denominador ou ao argumento dun logaritmo. Vexamos algúns exemplos:

$$y = \frac{1}{x} \text{ ten unha asíntota vertical de ecuación } x = 0 \text{ (eixe Y);}$$

$$y = \frac{3}{x-5} \text{ ten unha asíntota vertical de ecuación } x = 5;$$

$$y = \ln(x+4) \text{ ten unha asíntota vertical de ecuación } x = -4.$$

Para achar a ecuación das asíntotas verticais hai que resolver a ecuación:

DENOMINADOR = 0 ou, se a función é logarítmica, **ARGUMENTO = 0**.

Unha vez achada a ecuación da asíntota vertical, para debuxala, interesa saber que lle acontece á función preto da devandita asíntota. Para iso usaremos os límites laterais. Nos exemplos anteriores resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5}{3-x} = \frac{5}{0^+} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{3-x} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

No caso da función $\ln(x+4)$ non ten límite pola esquerda, porque non hai logaritmo de números negativos.

As **asíntotas horizontal** e **oblicua** indícanos onde achégase a función cando $x \rightarrow \pm\infty$. Son dúas rectas, unha delas horizontal, ten pendente cero, e outra oblicua, de pendente distinta de cero.

Unha función f ten unha **asíntota horizontal** cando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$, sendo k un número real. A ecuación da asíntota horizontal é $y_H = k$, onde escribimos o subíndice H para distinguilo da función, que moitas veces se chama y . Unha función non ten asíntota horizontal cando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Se a función ten asíntota horizontal, non terá asíntota oblicua, pois a horizontal é un caso particular da oblicua, coa pendente igual a cero. Vexamos algúns exemplos de asíntotas horizontais:

a) $y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y_H = 1$

b) $y = \frac{3}{8-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{8-x} = 0 \Rightarrow y_H = 0$ (eixe X)

c) $y = e^{-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty \Rightarrow y_H = 0$ cando $x \rightarrow \infty$

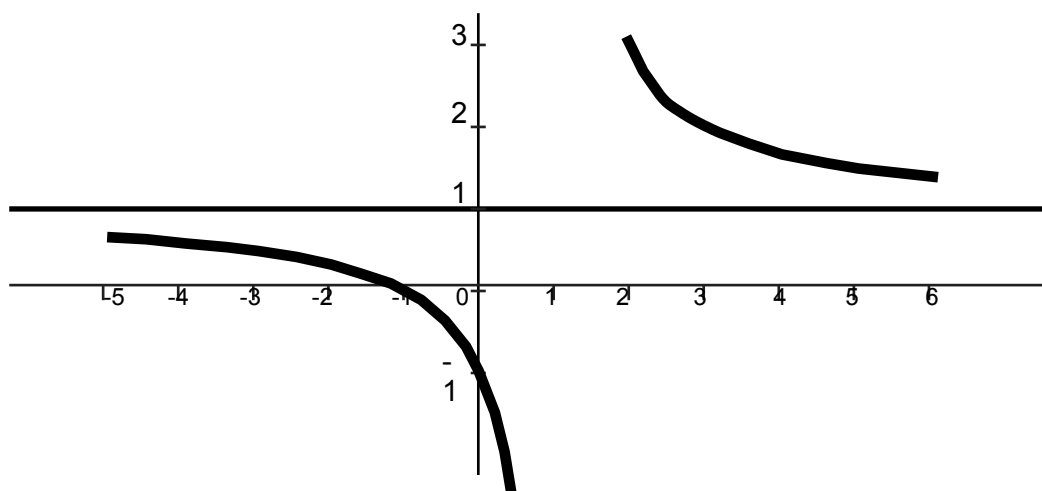
Neste último exemplo observamos que hai funcións que teñen distinta asíntota horizontal cando $x \rightarrow \infty$ que cando $x \rightarrow -\infty$, aínda que este non adoita ser o caso das fraccións alxébricas.

Para saber como se achega a función á asíntota horizontal (se o fai por encima ou o fai por debaixo), hai que estudar o signo da diferenza $y - y_H$ tanto en ∞ como en $-\infty$. Vexámolo nas funcións anteriores:

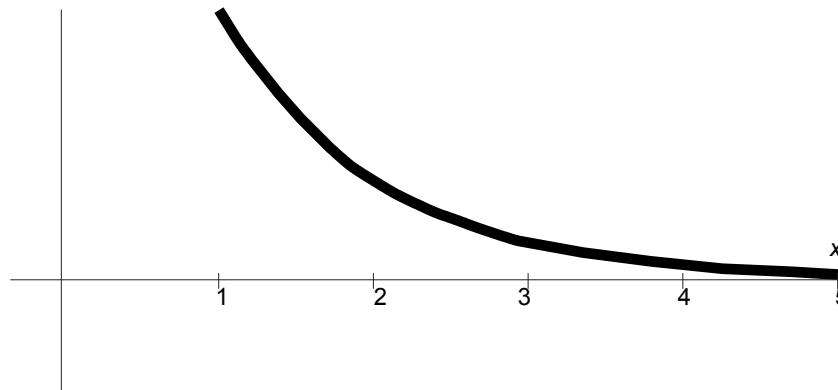
a) $y - y_H = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-(x-1)}{x-1} = \frac{2}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-1} > 0 \text{ cando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y - y_H > 0 \\ \frac{2}{x-1} < 0 \text{ cando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y - y_H < 0 \end{cases}$

De que $y - y_H > 0$ concluímos que a función y vai por enriba da asíntota y_H

Cando $x \rightarrow \infty$, e de $y - y_H < 0$ que a función y vai por debaixo da asíntota y_H $x \rightarrow -\infty$.
Graficamente:



- c) Non é necesario facer ningún cálculo porque a exponencial sempre é positiva, logo a función e^{-x} irá por enriba da asíntota y_H .



Unha **asíntota oblicua** é unha recta de ecuación: $y_{ob} = mx + n$ á que se aproxima a función f cando $x \rightarrow \pm\infty$.

¿Como calculamos m e n ?

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Observa que primeiro calculamos m , e debe dar un valor finito, pois en caso contrario non tería asíntota oblicua, e logo calculamos n . Igual que no caso da asíntota horizontal, para ver como se achega a curva á asíntota hai que calcular o signo da diferenza $y - y_{ob}$.

Recorda que **só buscaremos unha asíntota oblicua cando a función non teña asíntota horizontal**. Tamén pode darse o caso de que asíntota oblicua sexa distinta para $x \rightarrow \infty$ que para $x \rightarrow -\infty$, aínda que se produce en función máis complexas que as que trataremos aquí. Vexamos algúns exemplos:

$$y = \frac{x^2+1}{x-3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x-3} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty \text{ non ten asíntota horizontal}$$

Descubrimos se ten asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-3} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1-x(x-3)}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+1}{x-3} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

A asíntota oblicua ten por ecuación $e_{ob}=x+3$. Para representar a asíntota oblicua necesitamos dous puntos. Por exemplo $(-3, 0)$ e $(3, 6)$.

Para ver como se aproxima a función á recta estudamos o signo da diferenza $y - y_{ob}$:

$$y - y_{ob} = \frac{x^2+1}{x-3} - (x+3) = \frac{x^2+1-(x-3)(x+3)}{x-3} = \frac{x^2+1-(x^2-9)}{x-3} = \frac{10}{x-3}$$

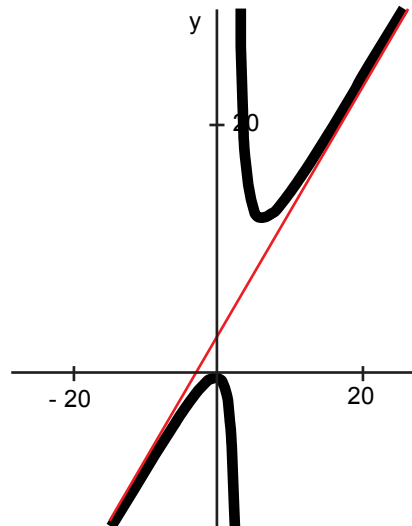
$$\frac{10}{x-3} > 0$$

cando $x \rightarrow \infty \Rightarrow y - y_{ob} > 0 \Rightarrow y > y_{ob} \Rightarrow e$ vai por enriba de e_{ob}

$$\frac{10}{x-3} < 0$$

cando $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y - y_{ob} < 0 \Rightarrow y < y_{ob} \Rightarrow e$ vai por debaixo de e_{ob}

Graficamente





XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
IES San Clemente



Plataforma educativa
da formación a distancia
www.iessanclemente.net