

UNIDADE 6 – OPERACIONES CON FUNCIONES.

FUNCIONES TRANSCENDENTES

1. Operacións con funcións

O conxunto de operacións que podemos realizar coas funcións, así como as regras que permiten efectuar as devanditas operacións, recibe o nome de **álgebra de funcións**. As funcións, sempre que compartan o dominio, podemos sumalas, restalas, multiplicalas, dividilas e, cando o dominio dunha conteña a imaxe doutra, compoñelas. O obxectivo deste apartado é estudar as catro primeiras, reservándolle a quinta un apartado completo. A continuación estudamos as catro primeiras operacións.

1.1 Suma de funcións $f + g$

A suma das funcións f e g é outra función que simbolizamos por $f + g$ e definimos por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

É dicir, para sumar dúas funcións sumamos os valores que toman as funcións en cada punto; en Matemáticas é equivalente falar de puntos ou de números reais, pois son considerados sinónimos.

Exemplos

1. Dadas: $f(x) = 4x-5$ e $g(x) = x^2+7 \Rightarrow (f+g)(x) = 4x-5 + x^2+7 = x^2+4x+2$
2. Dadas: $f(x) = \frac{3}{x}$ e $g(x) = x+1 \Rightarrow (f+g)(x) = \frac{3}{x} + x+1 = \frac{x^2+x+3}{x}$

Parece claro que a adición é conmutativa $f + g = g + f$.

1.2. Resta de funcións $f - g$

A resta das funcións f e g é outra función que simbolizamos por $f - g$ e definimos por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Igual que antes, hai que restar as dúas funcións punto a punto.

Exemplos

1. Dadas: $f(x) = 4x-5$ e $g(x) = x^2+7 \Rightarrow (f-g)(x) = 4x-5 - (x^2+7) = -x^2+4x-12$
2. Dadas: $f(x) = \frac{3}{x}$ e $g(x) = x+1 \Rightarrow (f-g)(x) = \frac{3}{x} - (x+1) = \frac{3-x-x^2}{x}$

Observa que para restar cambiamos de signo todos os termos da función que están a restar, e logo efectuamos as operacións pertinentes. Tamén se pode interpretar como sumar a f a función oposta de g (a oposta de g é $-g$). Obviamente a diferenza non é conmutativa.

1.3. Multiplicación de funcións $f \cdot g$

A multiplicación das funcións f e g é outra función que simbolizamos por $f \cdot g$ e definimos por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Multiplicaremos punto a punto, e para todo x do dominio común.

Exemplos

1. Dadas: $f(x) = 4x-5$ e $g(x) = x^2+7 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = (4x-5) \cdot (x^2+7) = 4x^3-5x^2+28x-35$
2. Dadas: $f(x) = \frac{3}{x}$ e $g(x) = x+1 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = \frac{3}{x} \cdot (x+1) = \frac{3(x+1)}{x}$

O produto de funcións si é conmutativo $f \cdot g = g \cdot f$.

1.4. División de funcións f/g

A división das funcións f e g é outra función que definimos por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ se } g(x) \neq 0$$

Dividiremos as funcións punto a punto en todos os puntos nos que non se anule o denominador. Como está prohibido dividir por cero, debemos excluír na definición aqueles puntos que fan cero o denominador.

Un caso particular de división de funcións é $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1(x)}{f(x)}$, cando $f(x) \neq 0$ que recibe o nome de inversa para o produto, pois $\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)(x) = f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$. Hai que ter coidado co termo inversa porque habitualmente se reserva para a inversa obtida a partir da composición de funcións.

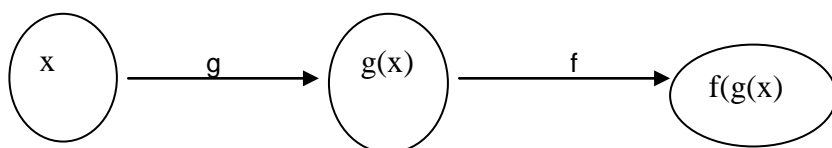
Tampouco é conmutativo o cociente de funcións.

Exemplos

1. Dadas: $f(x) = 4x-5$ e $g(x) = x^2+7 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x-5}{x^2+7}$
2. Dadas: $f(x) = \frac{3}{x}$ e $g(x) = x+1 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\frac{3}{x}}{(x+1)} = \frac{3}{x^2+x}$

2. Composición de funcións $f \circ g$

Defínese a **composición de dúas funcións** como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. A anterior operación lese ***f composta con g*** (fíxate que se le de dereita a esquerda, non de esquerda a dereita como é habitual). Se observas a definición daraste de conta de que a función da dereita, neste caso g , é a variable independente para a función da esquerda, neste caso f . É dicir, en lugar de poñer x no f hai *que* poñer $g(x)$. A composición de funcións conduce a outra función que produce o mesmo efecto que $g(x)$ e $f(x)$ actuando sucesivamente.



Exemplos

1. Dadas: $f(x) = x + 3$ e $g(x) = 2x - 1$ calcula $f \circ g$ e $g \circ f$.
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$;
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = 2(x + 3) - 1 = 2x + 5$.
2. Dadas $f(x) = 5x - 4$ e $g(x) = x^2 + 3$ calcula $f \circ g$ e $g \circ f$.
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3) = 5(x^2 + 3) - 4 = 5x^2 + 11$.
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x - 4) = (5x - 4)^2 + 3 = 25x^2 - 40x + 19$.

Dos exemplos observamos que a operación composición non é conmutativa en xeral, dado que a orde na que coloquemos as funcións cambia completamente o resultado. Podemos compoñer tantas funcións como queiramos, sen máis que ter en conta a orde na que debemos ir efectuando as operacións: sempre empezaremos pola dereita e irémonos desprazando cara á esquerda, cambiando en cada paso a variable independente.

Tamén é interesante descompoñer funcións, é dicir, dada unha función complexa descubrir que funcións máis sinxelas a compoñen. Isto facilitaranos o estudo a regra da cadea que veremos ao tratar a derivada de funcións.

Exemplos

- 1) Dada $h(x) = (3x - 7)^2$ descobre dúas funcións f e g tales que $(f \circ g)(x) = h(x)$.

Para calcular f e g primeiro investigaremos na función a descompoñer a orde na que deben realizarse as operacións nela especificadas: neste caso, hai que multiplicar x por 3 e restalo 7; despois elevamos o resultado ao cadrado. A primeira operación que hai que realizar debe corresponderse con g , pois é a primeira función que actúa, mentres que a segunda operación se corresponderá con f , pois actúa en segundo lugar tras facelo g . Polo tanto, $g(x) = 3x - 7$, $f(x) = x^2$.

Comprobémolo: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 7) = (3x - 7)^2$.

2. Atopa dúas funcións f e g tales que $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x}{2x-1}}$

A primeira operación é efectuar o cociente $\Rightarrow g(x) = \frac{x}{2x-1}$

A segunda é sacar a raíz cadrada $\Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

Comprobación $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2x-1}\right) = \sqrt{\frac{x}{2x-1}}$

3. Funcións inversas

Hai unha función que falando dun xeito pouco matemático diremos que deixa as cousas como estaban, tamén é unha función, chámase función identidade e simbolízase por: $Id(x) = x$.

Pode ser que ao compoñer dúas funcións o resultado sexa o mesmo que deixar as cousas como estaban. É dicir, partimos da variable x e volvemos a ela tras a acción dunha e outra función, coma se o que fixese unha o desfíxese a outra. Se isto acontece, dise que son funcións inversas unha da outra.

Dicimos que f^{-1} é a **función inversa** de f cando se verifica que :

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{ou simbolicamente} \quad f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}.$$

Co símbolo Id represento a **función identidade**, definida como $\text{Id}(x) = x$. O nome de función identidade vénlle porque a cada número x lle asocia o mesmo número x .

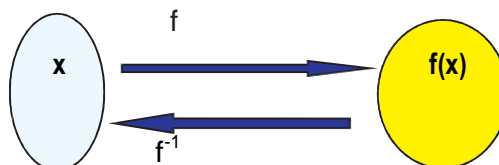
Como calcular a inversa dunha función?

En principio parece que temos dúas maneiras: ou en con $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ ou con $f^{-1} \circ f = \text{Id}$.

Na primeira forma deberíamos cambiar x por $f^{-1}(x)$ na definición de f e operar; na segunda teríamos que cambiar x por $f(x)$ na definición de f^{-1} , o que é imposible, pois non coñecemos

a forma de f^{-1} . Polo tanto, só temos unha forma de calculala. Habitualmente o que se fai é cambiar x por y e y por x na expresión: $y = f(x)$, e logo despegamos y .

Finalmente cambiamos y por f^{-1} .



Exemplos

1. Calcula a inversa de $f(x) = x + 1$

$$\text{Usando } f^{-1} \quad (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f^{-1}(x) + 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1.$$

$$\text{En } y = f(x), \begin{cases} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{cases} \Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$$

Aínda que neste exemplo o cambio sexa máis longo, normalmente compénsase coa claridade, pois escribir cando hai un expoñente dificulta a lectura do exercicio.

Como método para detectar se o cálculo é correcto, compoñemos a función orixinal co obtida, e o resultado debe ser a función identidade:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x \quad \text{ou} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x + 1) = (x + 1) - 1 = x.$$

2. Dada $y = x^2 + 3$, calcula $f^{-1}(x)$

$$y = x^2 + 3, \begin{cases} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{cases} \Rightarrow x = y^2 + 3 \Rightarrow y^2 = x - 3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x - 3}$$

Aquí aparécenos un problema típico das raíces cadradas: o dobre signo da raíz. Así, para un mesmo valor de x teríamos dous posibles resultados: un ao coller a parte positiva da raíz e o outro ao coller a parte negativa da raíz. Se o deixamos co dobre signo, a función $f(x) = x^2 + 3$ non tería función inversa porque non sería unha función ao non nos dar unha única imaxe para x . Para resolvelo recórrese a separar as partes positiva e negativa da raíz coma se fosen funcións independentes, escribíndose

$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} f_1^{-1}(x) = \sqrt{x - 3} \\ f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x - 3} \end{cases}$$

4. Función exponencial

Chámase **función exponencial** a unha función $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$, (\mathbb{R}^+ é conxunto formado por todos os números reais positivos), na que a variable independente aparece como expoñente. O número real a chámase *base* e ha de ser positivo.

Non hai que confundir a función exponencial coa **función potencial** $f(x) = x^n$, pois nesta a base é x e o expoñente n é fixo, mentres que na exponencial a base é fixa e varía o expoñente.

Dada a forma da función exponencial é doado deducir as seguintes propiedades comúns a todas, independentemente do valor de a :

- I. Dom $a^x = \mathbb{R}$, xa que sempre podemos elevar un número positivo a calquera expoñente.
- II. $a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois ao elevar un número positivo como a a calquera expoñente, o resultado seguirá sendo positivo. Recordamos que
- III. Todas as funcións exponenciais pasarán polo punto $(0,1)$ pois $a^0 = 1$.

Para obter unha representación gráfica da exponencial hai que distinguir dous casos:

A) Se $a > 1 \Rightarrow$ Estudemos o caso da exponencial $f(x) = 2^x$. Damos uns valores a x e calculamos as imaxes correspondentes e construímos a seguinte taboa.

x	-100	-10	-3	-1	0	1	3	10	50	100
2^x	$\frac{1}{2^{100}}$	$\frac{1}{2^{10}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$2^0 = 1$	2	8	1024	$1,126 \cdot 10^{15}$	$1,268 \cdot 10^{30}$

A continuación representamos os puntos da gráfica $(-3, 0,125)$, $(-1, 0,5)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 8)$ e xa nos dá unha idea da gráfica, pero si queremos precisar máis sobre o aspecto da mesma deberemos saber que pasa coas imaxes cando tomamos valores de x cada vez máis grandes. Para iso calculamos as imaxes de 10, 50 e 100, ou calcular o valor $2^{100} = 1,268 \cdot 10^{30}$ coa calculadora científica usamos a tecla x^y seguindo a secuencia **2** $x^y **100** $= 1,268 \cdot 10^{30}$. Se intentas calcular 2^{1000} na calculadora saírache unha mensaxe de erro (E) pois supera o valor do número máis grande que pode manexar a calculadora. Sen necesidade de calculadora parece claro que a medida que aumentemos o expoñente aumentará 2^x , pois crece o número de veces que hai que multiplicar 2 por si mesmo. Atento a nomenclatura:$

“ tomamos valores de x positivos todo lo grande que queramos” equivale a $x \rightarrow \infty$ e lese x tiende a infinito.

“ As imaxes crecen dunha forma monstruosa sen límite” equivale a $f(x) \rightarrow \infty$, no caso que nos ocupa $2^n = \frac{1}{2^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, e para calquera función exponencial $f(x) = a^x$, sendo $a > 1$

$$a^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

Para ver que sucede cando $x \rightarrow -\infty$, (o sexa cando tomamos para x valores negativos mostruosamente grandes) acudimos á definición de potencia negativa e observamos que pasa cando tomamos os valores -10, -100 e -1000. Coa calculadora **2** x^y **-1000** $= 7,889 \cdot 10^{-31}$, e se usas -1000, obterás $2^{-1000} \approx 0$.

Como os números negativos que tratamos son moi grandes en valor absoluto

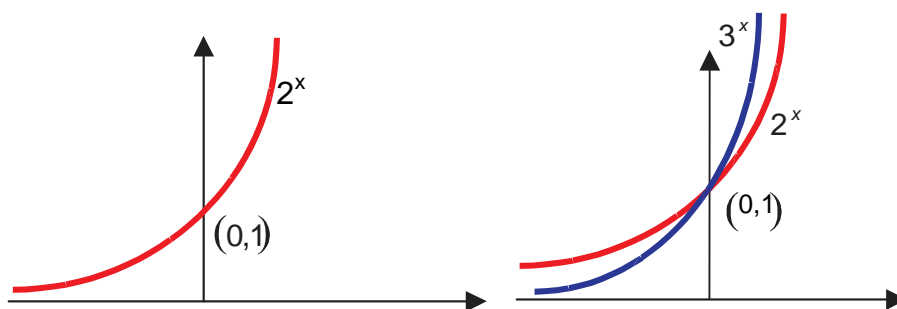
resulta entón que $2^{-n} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ademais, a función $y = 2^x$ crece moi rapidamente, de aí o uso de **crecemento exponencial** para indicar un crecemento desmesurado e rapidísimo. Observa a seguinte táboa:

x	1	10	50	100
2^x	2	1024	$1,126 \cdot 10^{15}$	$1,268 \cdot 10^{30}$

Cando x crece de 1 a 50 (multiplicar por 50), a función aumenta de 2 a $1,126 \cdot 10^{15}$ (multiplicar por $5,63 \cdot 10^{15}$), o que supón un crecemento vertixinoso.

A gráfica dunha función exponencial a^x , co $a > 1$ sería:



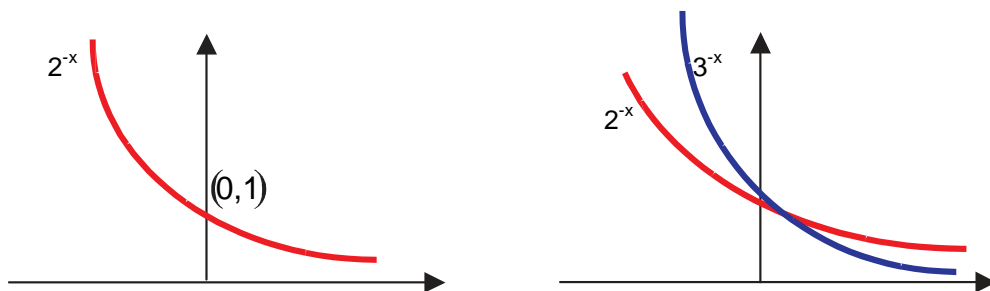
Na parte dereita están representadas 2^x e 3^x nos mesmos eixes. Fíxate que 3^x crece máis á prisa que 2^x , pois a base é maior e tamén será maior o produto dela consigo mesma tantas veces como queiramos: $2^2 = 4 < 3^2 = 9$. Por esta mesma razón, 3^x achégase máis rapidamente a cero que 2^x cando $x \rightarrow -\infty$:

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = 9,766 \cdot 10^{-4}, \quad 3^{-10} = \frac{1}{3^{10}} = 1,695 \cdot 10^{-5} \Rightarrow 2^{-10} > 3^{-10}$$

B) Se en a^x $0 < a < 1$, entón os valores que toma a son decimais da forma $0, mnp...$ moitos dos cales se poden escribir como fraccións que teñan o numerador menor que o denominador; unha destas pode $\frac{1}{2}$ función sería $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$, pois estas tres formas de escribilas son sinónimas. A última proporciónanos a mellor pista: o expoñente ten o signo negativo e loxicamente fará o contrario que 2^x , decrece, na seguinte táboa parece máis claro:

x	-100	-10	-1	0	1	10	100
2^{-x}	2^{100}	2^{10}	2^1	1	2^{-1}	2^{-10}	2^{-100}

A gráfica da función a^x , con $0 < a < 1$ será como as gráficas de 2^{-x} e 3^{-x} que debuxamos a continuación:



A función exponencial aparece naqueles fenómenos nos que hai unha taxa de crecemento ou de decrecemento constante. Vexamos algúns:

Interese composto: $C(t) = C_0 (1 + r)^t$ sendo C_0 o capital inicial depositado, r o rédito en tanto por cento ao que se coloca o capital e t o tempo en anos;

Evolución dunha poboación: $P(t) = P_0 (1 + tc)^t$ sendo P_0 a poboación inicial (a poboación que se ten nunha data determinada); tc a taxa de crecemento en tanto por cento; t é o tempo que pode medirse en anos, ou en días, dependendo do tipo de poboación (humana no primeiro caso, bacterias no segundo).

Hai un montón de funcións exponenciais, tantas como números reais positivos temos para poñer na base. Non obstante, en Matemáticas Superiores utilízase o termo exponencial para designar á función e^x , cuxa base é o **número e**,

O número **e** é quizais o máis importante de todas as Matemáticas. Trátase dun número real que ten infinitas cifras decimais non periódicas e do que podemos ter un valor aproximado coa calculadora científica. A tecla e^x precedida de SHIFT dános un valor aproximado de **e**, así:

$$1 \ e^x \text{ SHIFT} = 2,718281828$$

Se queremos calcular e^5 procedemos así: $5 \ e^x \text{ SHIFT} = 148,4131591...$

Recordando a definición de logaritmo neperiano dun número, **ln a**, como o expoñente ao que hai que elevar a base **e** para obter **a**, entón $e^{\ln a} = a$, en cuxo caso a función exponencial

$$y = a^x \text{ pode escribirse así: } y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

Segundo isto a función $y = 2^x$ poderíase escribir tamén como $y = e^{x \ln 2} \approx e^{0,693x}$, e a función

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x} \text{ escribiríase } y = e^{x \ln \frac{1}{3}} = e^{-1,099x}.$$

Observa que se $a > 1$ o expoñente é positivo, pois $\ln a > 0$, e se $0 < a < 1$ o expoñente será negativo, pois $\ln a < 0$.

Exemplos

1. Unha cidade ten unha taxa de crecemento anual do 1,5%. Escribe a función exponencial do crecemento nunha base **a** e tamén en base **e**. Se se mantivese esa taxa de crecemento, canto tempo tardaría en duplicarse a poboación?

Solución: $P(t) = P_0(1+tc)^t = P_0(1+0,015)^t = P_0 \cdot 1,015^t$ escrito ca base e vai quedar

$P(t) = P_0 e^{t \cdot \ln 1,015} = P_0 e^{0,015t}$. Para atopar o tempo que tarda en duplicarse a poboación teremos $P_0 \cdot 1,015^t = 2P_0 \Rightarrow 1,015^t = 2$. Para resolver esta ecuación exponencial tomaremos logaritmos en Unha ambos os membros, para conseguir *baixar* o t do expoñente:

$$\log 1,015^t = \log 2 \Rightarrow t \cdot \log 1,015 = \log 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,015} = 46,55 \text{ anos}$$

Exactamente 46 anos e $0,55 \cdot 12 = 6,6$ meses, e con máis exactitude 46 anos, 6 meses e $0,6 \cdot 30 = 18$ días.

2. Laboratorios Jaquecax mediu a concentración C no sangue dun fármaco en función do tempo t transcorrido dende a súa administración (en minutos), obtendo $C(t) = C_0 e^{-0,005t}$ onde C_0 representa a concentración no momento da administración do fármaco. Que concentración de fármaco haberá no sangue pasadas dúas horas dende que se administrou o fármaco?

Solución: Pasamos o tempo a minutos (2 horas = 120 minutos) e substituímos na

$$\text{función: } C(120) = C_0 e^{-0,005 \cdot 120} = C_0 \cdot e^{-0,6} = 0,549C_0$$

Ao cabo de dúas horas haberá un pouco máis da metade da concentración inicial de fármaco.

3. Descubre as taxas de crecemento de dúas poboacións P e Q de bacterias, sabendo que as evolucións das súas poboacións (en miles de individuos) en función do tempo (en horas) veñen dadas polas funcións $P(t) = 1,6 \cdot 2^t$, $Q(t) = 67,8 \times 1,5^t$

Indica que poboación será maior ao cabo de 20 horas. Escribe tamén ambas as dúas funcións en base e .

Solución: Comparando coa función xeral $P(t) = P_0 (1+tc)^t$ obtemos:

$$P \Rightarrow P_0 = 1,6; 1+tc=2 \Rightarrow tc=1 \Rightarrow \text{A taxa de crecemento de } P \text{ é do } 100\%.$$

$$Q \Rightarrow P_0 = 67,8; 1+tc=1,5 \Rightarrow tc=0,5 \Rightarrow \text{A taxa de crecemento de } Q \text{ é do } 50\%.$$

$$P(20) = 1,6 \cdot 2^{20} = 1\,677\,721,6 \text{ miles, } Q(20) = 67,8 \times 1,5^{20} = 225\,452,4 \text{ miles.}$$

Observa como a poboación de P , aínda que empece cun menor número de individuos, consegue superar a de Q nun número non moi elevado de horas. Conforme aumente o tempo a poboación de P será moitísimo maior que a de Q . Isto dános idea de que o que realmente importa nunha función exponencial non é o seu valor inicial senón a súa taxa de crecemento.

$$P(t) = 1,6 \cdot 2^t = 1,6 \cdot e^{t \ln 2} = 1,6 \cdot e^{0,693t} \quad Q(t) = 67,8 \times 1,5^t = 67,8 \cdot e^{t \ln 1,5} = 67,8 \cdot e^{0,405t}$$

4. O carbono 14 é un isótopo do carbono que se usa para a datación de restos arqueolóxicos. Desintégase de acordo coa función $C(t) = C_0 \cdot e^{-0,000121t}$, sendo a cantidade inicial de carbono 14 presente no material e t o tempo en anos. Cantos anos han de pasar para que a cantidade se reduza á metade? Se pasaron 10 000 anos, que fracción da cantidade inicial quedará?

Solución: Para descubrir os anos que han de pasar para que se reduza á metade deberemos

resolver a ecuación: $\frac{1}{2} C_0 = C_0 \cdot e^{-0,000121t} \Rightarrow e^{-0,000121t} = \frac{1}{2}$. Tomamos ln

$$\ln e^{-0,000121t} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -0,000121t = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0,000121} = 5728,49 \text{ anos}$$

Neste caso non temos máis que substituír o tempo polo valor indicado:

$$C(10\,000) = C_0 \cdot e^{-0,000121 \cdot 10000} = C_0 \cdot 0,2982 = 0,3 \cdot C_0$$

En 10000 anos o carbono 14 queda reducido ao 30% da cantidade inicial.

Como se desprende dos exemplos, o crecemento exponencial é moi forte, tan forte que o converte en pouco válido para reflectir a evolución dunha poboación a longo prazo ou doutros fenómenos que, tarde ou cedo, acabarán estabilizándose despois dun crecemento inicial espectacular. Para este tipo de fenómenos adoita ser máis apropiada unha función de crecemento limitado, que contén no seu seo unha exponencial, e a súa fórmula é:

Funcións de crecemento limitado $f(x) = c(1 - e^{-kt})$ $c, k > 0$

5. Función Logarítmica: logaritmos decimais e logaritmos neperianos

Como xa sabes, o **logaritmo** en base **a** dun número **x** defínese como o expoñente **n** ao que hai que elevar a base **a** para que nos dea **x**: $\log_a x = n \Leftrightarrow a^n = x$

Loxicamente **a** recibe o nome de base porque é a base na ecuación exponencial que permite definir o logaritmo e ha de ser positivo. O número **x** (o que hai dentro do logaritmo) recibe o nome de **argumento**. Como sabes, os logaritmos máis usados son os neperianos ou naturais e os decimais. Nos neperianos a base é o número **e** e nos decimais é 10. Recorda as propiedades dos logaritmos da unidade 2

Observa a seguinte táboa:

x	10^{20}	10^{40}	10^{100}	$10^{1\,000}$	$10^{1\,000\,000}$
log x	20	40	100	1 000	1 000 000

Cando **x** crece, **log x** tamén o fai, aínda que dunha forma bastante máis lenta: o paso de 10^{20} a 10^{40} supón multiplicar por 10^{20} , mentres que o paso de 20 a 40 supón multiplicar por 2.

$\log_a x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, se $a > 1$.

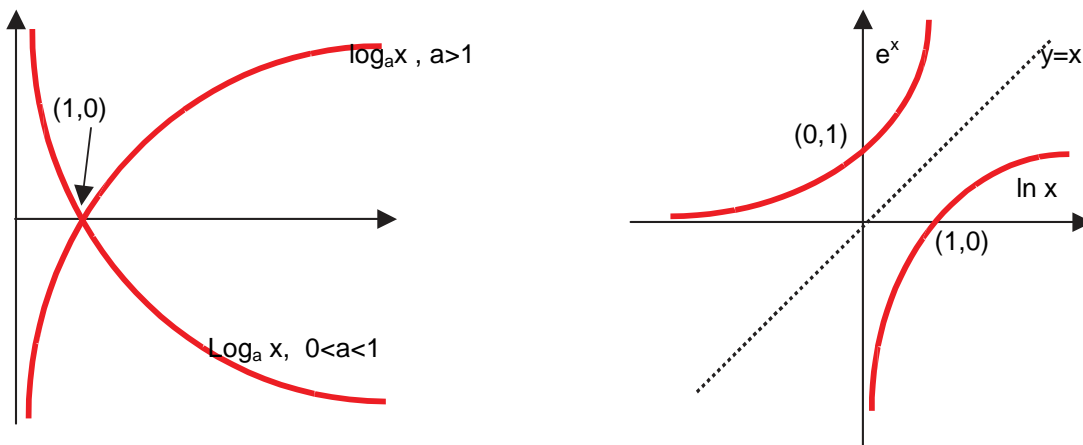
Observa a seguinte táboa:

x	10^{20}	10^{40}	10^{100}	$10^{1\,000}$	$10^{1\,000\,000}$
$\log_{1/10} x$	-20	-40	-100	-1 000	-1 000 000

Esta capacidade para retardar o crecemento fai do logaritmo unha ferramenta moi axeitada para a medida de magnitudes que presentan un rango de variación enorme, como a escala de Richter para a medida da magnitude dun terremoto; ou a lei estímulo-sensación ou de Fechner-Weber, que mide a sensación producida ao ser xerado un estímulo; ou a medida do nivel de intensidade dun son (os belios e os decibelios).

$$\log_a x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty, \text{ se } 0 < a < 1.$$

O logaritmo é unha función continua en todo o seu dominio.



Dada a definición de logaritmo e as súas propiedades parece claro que hai unha estreita relación entre este e a exponencial, e é tan estreita porque son funcións inversas: o que fai unha o desfai a outra.

Para que o vexas máis claramente representamos e^x xunto con $\ln x$ e a bisectriz do primeiro cuadrante (que é a gráfica da función identidade). Observa que se dobramos o papel pola bisectriz a gráfica exponencial coincide coa logarítmica.

Imos comprobar que $\ln x$ e e^x son inversas; antes de compoñer recorda, da definición de logaritmo, que se $y = \ln x$ entón $x = e^y = e^{\ln x}$, polo tanto:

$$(\ln \circ e)(x) = \ln(e^x) = x \cdot \ln e = x \cdot 1 = x \quad (e \circ \ln)(x) = e(\ln x) = e^{\ln x} = x$$

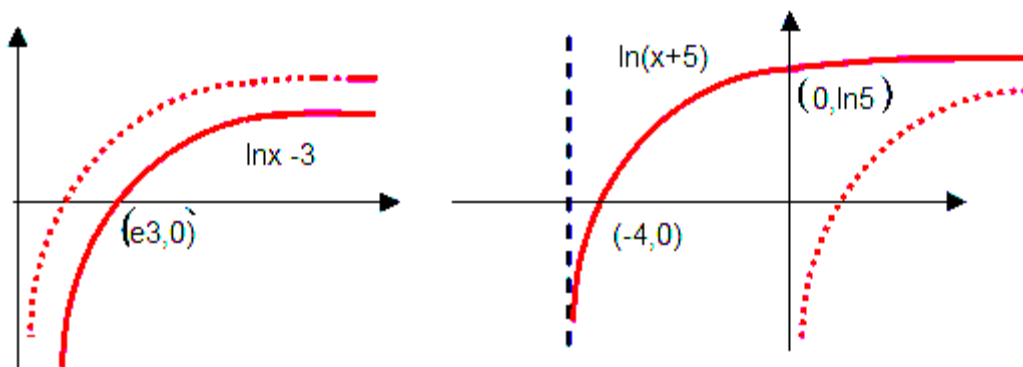
Representa

Solución:

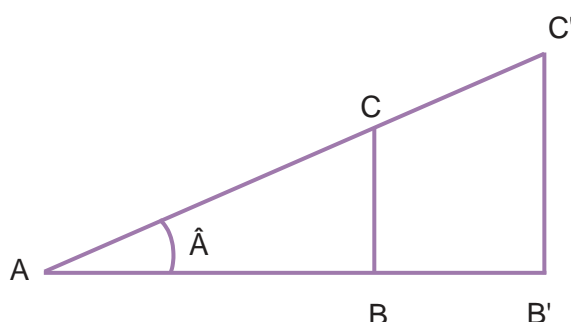
$y = \ln x - 3$ sofre un desprazamento vertical cara a abaixo con respecto a $\ln x$ ao restarlle 3 á ordenada. Agora o punto de corte da función co eixe X será: $y = 0 \Rightarrow \ln x - 3 = 0 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3 \Rightarrow$ punto $(e^3, 0)$, $e^3 \approx 20,09$.

$y = \ln(x + 5)$ sofre un desprazamento horizontal cara á esquerda con respecto a $\ln x$ ao sumar 5 no argumento. O punto de corte co eixe X é $y = 0 \Rightarrow \ln(x + 5) = 0 \Rightarrow x + 5 = e^0 \Rightarrow x + 5 = 1 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow$ punto $(-4, 0)$.

Esta función corta tamén ao eixe Y , pois $f(0) = \ln 5 \Rightarrow (0, \ln 5)$



6. Funcións trigonométricas



O teorema de Thales aplicado en triángulos rectángulos semellantes dános as seguintes igualdades $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'B'}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$ o que leva a pensar que estas cantidades poden asociarse dalgún xeito ao ángulo do vértice A.

Así se definen as razóns trigonométricas do ángulo \hat{A} como:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \operatorname{cos} \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Defínese aínda outra como $\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{cos} \hat{A}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto contiguo}}$

Dúas observacións:

- 1) Como se deduce da definición, as razóns trigonométricas non teñen unidades de medida, xa que son cocientes de lonxitudes.
- 2) Os ángulos hai que medilos en radiáns. O **radián** ideouse para:
 - a) Ter unha medida de ángulos en base 10, porque os graos, minutos e segundos son unidades sesagesimais (base 60), o que produce dificultades á hora de pasar dunha a outra unidade,

- b) para que a lonxitude de arco se calcule mediante a sinxela fórmula $L = \alpha \cdot r$ onde α é o ángulo abrangido polo arco e r o raio da circunferencia. Recorda que cando o ángulo se mide en sesaxesimal a lonxitude do arco é: $L = \frac{\text{ángulo}}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$

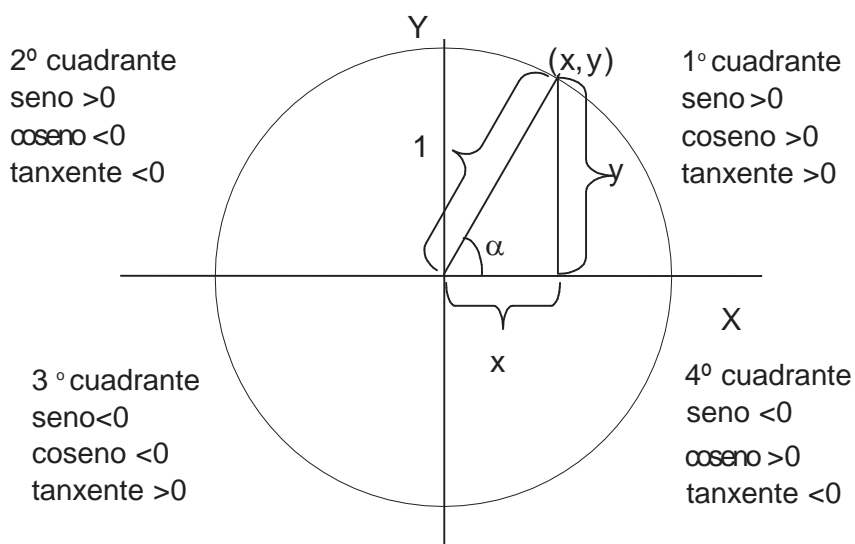
Isto último permítenos establecer unha relación entre a medida de ángulos en sesaxesimal e en radiáns, pois os 360° que abrangue unha circunferencia son 2π radiáns, o que nos permite usar a proporción $\frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$. Deste modo, para pasar de sesaxesimal a radiáns multiplicamos por $\frac{\pi}{180^\circ}$ e para pasar de radiáns a sesaxesimal multiplicaremos por $\frac{180^\circ}{\pi}$

A continuación incluímos unha pequena táboa coa equivalencia dos ángulos máis empregados:

Sesaxesimal	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radiáns	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Observa que os radiáns adoitan escribirse en función de π . Na calculadora cando usamos os graos sesaxesimais aparece **D** ou **DEG** na pantalla, e cando usamos radiáns aparece **R** ou **RAD**. Para usar unhas ou outras unidades hai que pulsar **MODE** e algún número: iso hai que miralo no manual da calculadora, aínda que algunhas traen unha lenda baixo a pantalla como recordatorio.

Para calcular os valores das razóns trigonométricas escóllese un triángulo rectángulo inscrito nunha **circunferencia goniométrica** (literalmente, para medir ángulos). Trátase dunha circunferencia que ten un sistema de eixes cartesianos con orixe no centro da circunferencia e o raio da cal mide 1:



Os puntos da circunferencia terán por coordenadas (x, y) e aplicando as definicións anteriores neste triángulo e dado que a hipotenusa, que é o raio da circunferencia, mide 1, obtense:

$$\operatorname{sen} \alpha = \text{cateto oposto} = y, \quad \cos \alpha = \text{cateto contiguo} = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{c. oposto}}{\text{c. contiguo}} = \frac{y}{x}$$

Usando o teorema de Pitágoras e tendo en conta que os catetos coinciden coas razóns trigonométricas seno e coseno e que a hipotenusa vale 1, chégase a unha relación fundamental:

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Para determinar as razóns trigonométricas usaremos a calculadora, na queparás as teclas sin, cos e tan aínda que convén que aprendas os seguintes valores, que son doados de ver no debuxo da circunferencia goniométrica:

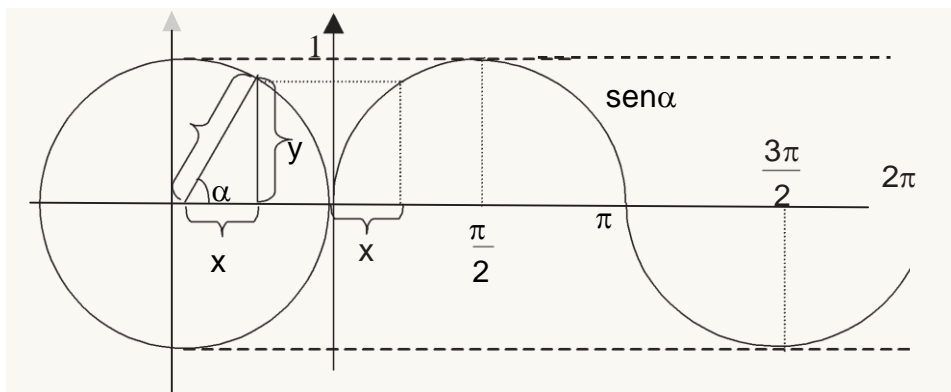
Ángulo	0°	$\pi/2=90^\circ$	$\pi=180^\circ$	$3\pi/2=270^\circ$	$2\pi=360^\circ$
$\operatorname{sen} \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tag} \alpha$	0	Non hai	0	Non hai	0

Da relación anterior para o seno e o coseno está claro que nin seno nin coseno poden ser maiores que 1, porque ao eleválos ao cadrado quedaría unha cantidade maior que un, o que iría contra a igualdade. Tampouco poden ser menores que -1, pois ao eleválos ao cadrado nos darían tamén cantidades maiores que 1. Podemos escribir polo tanto que:

$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, e ademais, cando o seno vale 1 ou -1 o coseno valerá 0, e á inversa, cando o coseno vale 1 ou -1, o seno vale 0. En cambio a tanxente non está acoutada. Observa que para $\frac{\pi}{2}$ obteríase pola definición $\frac{1}{0}$, o que nos leva a dicir que hai imaxe para $\frac{\pi}{2}$ pero xa falaremos do que pasa cando nos acheguemos a ese valor e tamén a $\frac{3\pi}{2}$.

Un valor interesante para a tanxente é o de $\frac{\pi}{4}$ rad = 45° . Como 45° é a inclinación da bisectriz do 1º cuadrante, nesta recta a abscisa e a ordenada coinciden, tamén o farán en $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ e $\cos \frac{\pi}{4}$ polo que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

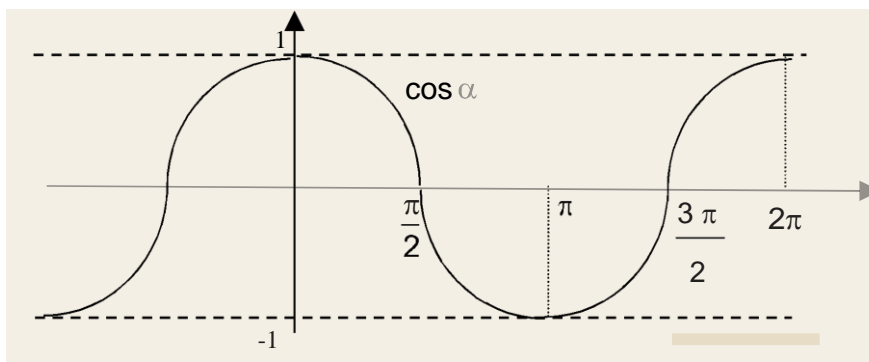
A circunferencia goniométrica permítenos representar as funcións seno e coseno e tamén achar algunhas propiedades importantes:



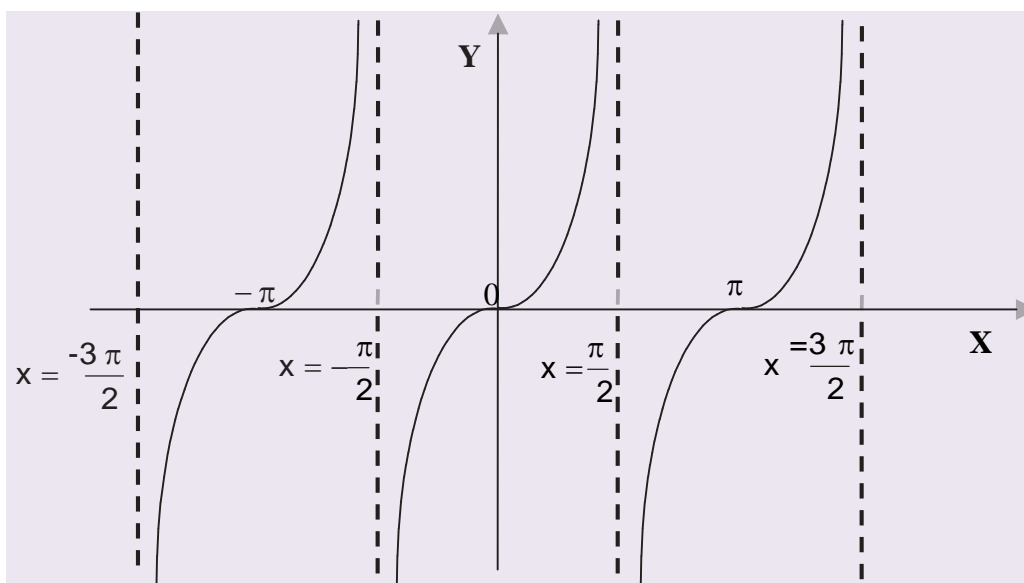
a gráfica do seno, chamada **sinusoide**, dedúcese que o anaco que representamos, que é o que vai de 0 a 2π , repítase unha e outra vez, pois ao pasar de 2π o que facemos é dar voltas á circunferencia, obténdose de novo os mesmos valores. Por esta razón dise que o seno é unha función periódica, de período 2π , que é o ángulo que hai que xirar para que volvan repetirse os valores.

Abreviadamente $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$.

O coseno ten a mesma forma, aínda que empeza valendo 1 (está desprazada $\frac{\pi}{2}$ rad con respecto ao seno), e o mesmo período, polo que escribiremos $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$



A tanxente non se parece a ningunha das anteriores.



Vale 0 sempre que o vale o seno. A medida que nos achegamos a $\frac{\pi}{2}$ esquerda (ángulos do 1º cuadrante) o coseno achégase a 0 con números positivos e o seno a 1, polo que a tanxente tenderá a ∞ . Se nos achegamos a $\frac{\pi}{2}$ pola dereita (ángulos do 2º cuadrante), o coseno achégase a 0 pero con números negativos e o seno achégase a 1, polo que a tanxente tende a $x = -\infty$. Polo tanto $x = \frac{\pi}{2}$, é unha asíntota vertical da tanxente.

En $\frac{3\pi}{2}$ temos que pola esquerda, o coseno e o seno son negativos (están no 3º cuadrante) polo que a tanxente tenderá a ∞ , mentres que pola dereita o coseno é positivo e o seno negativo, co que a tanxente se vai a $-\infty$. A recta $x = \frac{3\pi}{2}$ é outra asíntota vertical da tanxente. Igual lle sucede en $x = \frac{5\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{2}$ é dicir, a tanxente ten infinitas asíntotas verticais, pasando a s devanditas asíntotas por puntos cuxa abscisa é un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$, tendo por ecuacións $x = \frac{\pm(2n+1)\pi}{2}$. Como as asíntotas verticais van de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, por exemplo, o periodo da tanxente é de $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad, repetíndose os valores da tanxente cada media volta á circunferencia.

O seguinte paso é definir as **funcións trigonométricas sen x, cos x e tag x**, verificando esta última que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$. As funcións responden a unha abstracción das razóns trigonométricas e conservan as propiedades que teñen ditas razóns, que son:

a) O dominio das funcións seno e coseno é todo $\overline{\mathbb{R}}$, e o da tanxente será $\mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{(2n+1)\pi}{2} \right\}$,

pois como vimos temos que excluír os puntos cuxa abscisa sexa múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$.

Isto fai que as tres sexan continuas nos seus respectivos dominios.

b) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \Rightarrow -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, -1 \leq \operatorname{cos} x \leq 1 \Rightarrow$ As funcións seno e coseno están acoutadas superiormente por 1 e inferiormente por -1, mentres que a función tanxente non está acoutada. Dise que a amplitude do seno e do coseno vale 1.

c) As tres son **funcións periódicas**: seno e coseno teñen de período 2π rad e a tanxente π rad: $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos}(x + 2\pi) = \operatorname{cos} x$, $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.



XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA
IES San Clemente



FONDO SOCIAL
EUROPEO

Plataforma educativa
da formación a distancia

www.iessanclemente.net