

Sección 6 - Exercicios de autoavaliación

Exercicio nº 1.-

Dadas: $f(x) = x^3 - 5x + 4$ e $g(x) = 5x^2 - x - 8x$. Calcula $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, e f/g

Exercicio nº 2.-

A) Dadas $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{2}{x}$ calcula $f \circ g$ e $g \circ f$.

B)

As funcións f e g están definidas por $f(x) = \frac{x^2}{3}$ e $g(x) = x + 1$. Calcula:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ g \circ f)(x)$

Exercicio nº 3.-

a) Calcula dúas funcións f e g tales que verifiquen $(f \circ g)(x) = \frac{7}{6x+2}$

b) Coas funcións:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ e } g(x) = \frac{1}{x}$$

obtivemos, por composición, estoutras:

$$p(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ e } q(x) = \frac{1}{x^2} + 1$$

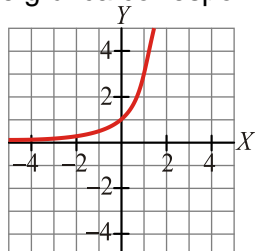
Explica cómo, a partir de f e g , se poden obter p e q .

Ejercicio nº 4.-

Calcula a función inversa de: a) $f(x) = \frac{3x+7}{4}$ b) $f(x) = \frac{-2x-1}{5}$

Ejercicio nº 5.-

A seguinte gráfica corresponde á función $y = f(x)$:

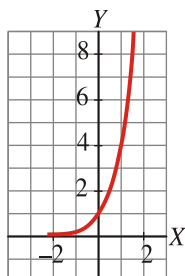


a) Calcula $f^{-1}(3)$ e $f^{-1}(1)$

b) Representa, nos mesmos eixes, $f^{-1}(x)$ a partir da gráfica de $f(x)$.

Exercicio nº 6.-

Consideramos a gráfica:



- a) Atopa a expresión analítica da función correspondente.
- b) ¿Cal é o dominio da dita función?
- c) Estudia a continuidade e o crecemento.

Exercicio nº 7.-

Unha poboación que tiña inicialmente 300 individuos vai medrando a un ritmo do 12% cada ano.

- a) ¿Cantos individuos haberá dentro dun ano? ¿E dentro de 3 anos?
- b) Atopa a función que nos dá o número de individuos segundo os anos transcorridos.

Exercicio nº 8.-

3. Descubre as taxas de crecemento de dúas poboacións P e Q de bacterias, sabendo que as evolucións das súas poboacións (en miles de individuos) en función do tempo (en horas) veñen dadas polas funcións $P(t) = 1,6 \times 2^t$, $Q(t) = 67,8 \times 1,5^t$. Indica que poboación será maior ao cabo de 20 horas. Escribe tamén ambas as dúas funcións en base e .

Exercicio nº 9.-

O carbono 14 é un isótopo do carbono que se usa para a datación de restos arqueolóxicos. Desintégrese de acordo coa función $C(t) = C_0 \cdot e^{-0,000121t}$, sendo a cantidade inicial de carbono 14 presente no material e t o tempo en anos. Cantos anos han de pasar para que a cantidade se reduza á metade? Se pasaron 10 000 anos, que fracción da cantidade inicial quedará?

Exercicio nº 10.-

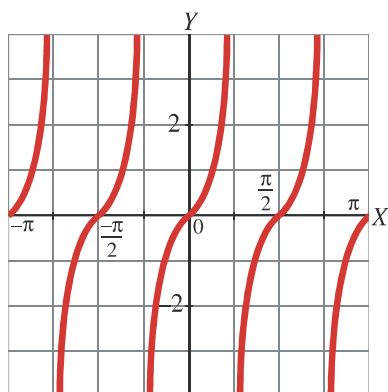
Debuxa a gráfica de: $y = 1 - \log_2 x$

Exercicio nº 11.-

Debuxa a gráfica da función: $y = 1 - \sin x$

Exercicio nº 12.-

a) Di cal das seguintes expresións se corresponde coa gráfica:



$y = 2 \cos x$
 $y = 2 \operatorname{tg} x$
 $y = \operatorname{tg} 2x$
 $y = 2 + \cos x$
 $y = \cos 2x$

b) Para a función anterior, di cal é seu dominio, estudia a súa continuidade e indica cal é o seu período.

Solucións dos exercicios

Exercicio nº 1.-

$$(f+g)(x) = 6x^3 - x^2 - 13x + 4$$

$$(f-g)(x) = x^3 - 5x + 4 - (5x^2 - x - 8x) = -4x^3 + x^2 + 3x + 4$$

$$(f \cdot g)(x) = (x^3 - 5x + 4) \cdot (5x^2 - x - 8x) = 5x^6 - x^5 - 33x^4 + 25x^3 + 36x^2 - 32x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{5x^2 - x - 8x}$$

Exercicio nº 2.-

$$A) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{x}{2} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{\frac{1}{x}} = 2x$$

B)

$$a) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x+1] = \frac{(x+1)^2}{3} = \frac{x^2 + 2x + 1}{3}$$

$$b) (g \circ g \circ f)(x) = g[g[f(x)]] = g\left[g\left(\frac{x^2}{3}\right)\right] = g\left(\frac{x^2}{3} + 1\right) = \frac{x^2}{3} + 1 + 1 = \frac{x^2}{3} + 2$$

Exercicio nº 3

$$a) \text{ A primeira operación é multiplicar por 6 e sumar 2 } \Rightarrow g(x) = 6x + 2$$

$$\text{A segunda é dividir 7 entre o resultado anterior } \Rightarrow f(x) = \frac{7}{x}$$

$$\text{Comprobación } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x + 2) = \frac{7}{6x + 2}$$

b)

$$p(x) = (g \circ f)(x) \quad q(x) = (f \circ g)(x)$$

Exercicio nº 4.-

$$a) \begin{cases} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3y+7}{4} \Rightarrow 3y + 7 = 4x \Rightarrow y = \frac{4x-7}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x-7}{3}$$

b) Trocamos x por y , e despexamos a y

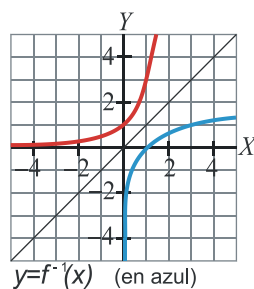
$$x = \frac{-2y-1}{5} \Rightarrow 5x = -2y-1 \Rightarrow 2y = -5x-1 \Rightarrow y = \frac{-5x-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x-1}{2}$$

Exercicio nº 5

- a) $f^{-1}(3)=1$ porque $f(1)=3$
 $f^{-1}(1)=0$ porque $f(0)=1$

b)



Exercicio nº 6

- a) É unha función exponencial de base maior que 1, que pasa polos puntos (0, 1), (1, 4)... Sua expresión analítica é $y = 4^x$.
- b) Dominio = \mathbf{R}
- c) É una función continua e crecente

Exercicio nº 7.-

- a) Deica un ano haberá:

$$300 \cdot 1,12 = 336 \text{ individuos}$$

Deica tres anos haberá:

$$300 \cdot 1,12^3 \approx 421 \text{ individuos}$$

- b) Deica x anos haberá y individuos, sendo:

$$y = 300 \cdot 1,12^x \text{ (tomando } y \text{ entero)}$$

Exercicio nº 8.-

Comparando coa función xeral $P(t) = P_0 (1 + tc)^t$ obtemos:

$$P \Rightarrow P_0 = 1,6; 1 + tc = 2 \Rightarrow tc = 1 \Rightarrow \text{A taxa de crecemento de } P \text{ é do } 100\%.$$

$$Q \Rightarrow P_0 = 67,8; 1 + tc = 1,5 \Rightarrow tc = 0,5 \Rightarrow \text{A taxa de crecemento de } Q \text{ é do } 50\%.$$

$P(20) = 1,6 \cdot 2^{20} = 1\,677\,721,6$ miles, $Q(20) = 67,8 \times 1,5^{20} = 225\,452,4$ miles.

Observa como a poboación de P, aínda que empece cun menor número de individuos, consegue superar a de Q nun número non moi elevado de horas. Conforme aumenta o tempo a poboación de P será moitísimo maior que a de Q. Isto dános idea de que o que realmente importa nunha función exponencial non é o seu valor inicial senón a súa taxa de crecemento.

$P(t) = 1,6 \cdot 2^t = 1,6 \cdot e^{t \ln 2} = 1,6 \cdot e^{0,693t}$ $Q(t) = 67,8 \times 1,5^t = 67,8 \cdot e^{t \ln 1,5} = 67,8 \cdot e^{0,405t}$

Exercicio nº 9.-

Para descubrir os anos que han de pasar para que se reduza á metade deberemos

resolver a ecuación: $\frac{1}{2} C_0 = C_0 \cdot e^{-0,000121t} \Rightarrow e^{-0,000121t} = \frac{1}{2}$. Tomamos ln

$$\ln e^{-0,000121t} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -0,000121t = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0,000121} = 5728,49 \text{ anos}$$

Neste caso non temos máis que substituír o tempo polo valor indicado:

$$C(10\,000) = C_0 \cdot e^{-0,000121 \cdot 10000} = C_0 \cdot 0,2982 = 0,3 \cdot C_0$$

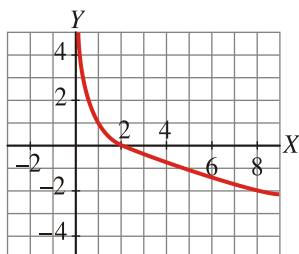
En 10000 anos o carbono 14 queda reducido ao 30% da cantidade inicial.

Exercicio nº 10.-

- Dominio = $(0, +\infty)$
- Facemos una taboa de valores.

x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	3	2	1	0	-1	-2

A gráfica será:

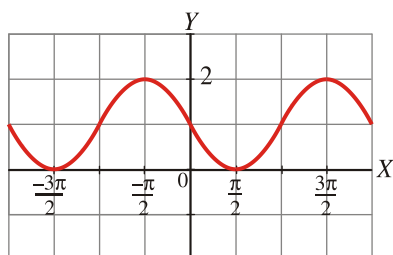


Exercicio nº 11.-

Facemos una taboa de valores:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = 1 - \operatorname{sen} x$	1	0	1	2	1

e tendo en conta que é una función periódica representamola:



Exercicio nº 12.-

a) $y = \operatorname{tg} 2x$

b) • **Dominio** = $\mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}$, é dicir, está definida en \mathbf{R} , agás nas abscisas $\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$,

siendo k números enteros.

• É continua nos puntos nos que está definida.

• É periódica de período $\frac{\pi}{2}$.