

UNIDADE 5 – FUNCIONS

1. Concepto de función

Unha **función** é unha **regra que permite transformar un número real noutro**.

O número que se transforma, habitualmente representado por x , chámase **variable independente**, e o resultado da transformación, representado por $f(x)$ ou y , chámase **variable dependente**. A notación usada para as funcións é $f(x)$ = *regra para transformar x* , e esta regra virá case sempre dada por un fórmula. Por exemplo, $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 3x + 5$,

$y = \ln(x + 4)$.

Hai que facer notar que a función se chama f ou g , e que $f(x)$ ou $g(x)$ son os valores que asigna a función f ou g á variable x . Non obstante, tamén se emprega $f(x)$ para designar a función, sempre que non haxa problemas de interpretación.

A os números que se van transformar por unha función tamén se lles chama **orixinais** e os resultados da transformación **imaxes**. Non todas as regras son funcións, senón só aquelas que transforman un número nunha única imaxe, é dicir, un valor x só pode ter unha imaxe $f(x)$.

Exemplos

1. Calcula as imaxes de -7, 1, polas funcións $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 3x + 5$,

$$f(-7) = 2 \cdot (-7) = -14; \quad f(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$g(-7) = (-7)^2 - 3 \cdot (-7) + 5 = 49 - 21 + 5 = 75; \quad g(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 1 - 3 + 5 = 3;$$

2. Dominio dunha función

Vimos nos exemplos que para determinadas funcións non todos os números reais teñen imaxe. Nas funcións polinómicas podemos atopar sempre unha imaxe para calquera valor de x , xa que un número podemos elevalo a calquera número natural, mentres que se a función ten denominador, non existe imaxe para aqueles valores que anulan o devandito denominador, pois non podemos dividir por cero. Outro caso no que aparecen valores que non teñen imaxe é no das raíces cadradas (ou nas raíces de índice par), porque a raíz cadrada dun número negativo non é un número real. Tamén aparecen números sen imaxe no caso dos logaritmos, dado que non existen os logaritmos dos números negativos nin o do cero.

Para identificar aos números que teñen imaxe por unha determinada función úsase o **Dominio dunha función**, que é o conxunto formado por todos os elementos que teñen imaxe pola devandita función: $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / \text{existe } f(x)\}$. No caso das funcións polinómicas: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

Na determinación do dominio pódense presentar os casos seguintes:

- 1º Se $f(x)$ é unha función formada polo cociente de dous polinomios, o polinomio $N(x)$ dividido polo polinomio $D(x)$, $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ entón o dominio está formado por todos os números reais menos aqueles que anulan o denominador, é dicir os que cumpren que $D(x) \neq 0$. Polo tanto, $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / D(x) \neq 0\}$.

2º Cando $f(x)$ é a raíz dunha expresión alxébrica, $f(x) = \sqrt{R(x)}$ entón o dominio está formado polos números reais para os que o radicando é positivo. Polo tanto, resolveremos a inecuación $R(x) \geq 0$. Logo, $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / R(x) \geq 0\}$.

3º Cando $f(x)$ é o logaritmo dunha expresión alxébrica $f(x) = \log A(x)$, entón o dominio está formado polos números reais para os que $A(x) > 0$, é dicir, as solucións da inecuación $A(x) > 0$. Polo tanto, $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / A(x) > 0\}$.

Lembra \in = “pertenece” $/$ = “tales que”

Exemplos

1 Calcula o dominio das seguintes funcións:

a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-5x+6}$ b) $g(x) = \sqrt{x-4}$ c) $h(x) = \ln(x+5)$

Solución:

a) Como é unha función con denominador, igualamos este a cero e resolvemos a ecuación. Neste caso temos a ecuación de segundo grao: $x^2 - 5x + 6 = 0$, as solucións das cales son $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Polo tanto, $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

b) Como é unha raíz cadrada, resolveremos a inecuación $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$, entón $\text{Dom } g = [4, \infty)$

c) Ao ser un logaritmo neperiano (que son os máis usados), hai que resolver a inecuación:

$$x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \text{ entón } \text{Dom } h = (-5, \infty).$$

2. Calcula o dominio das seguintes funcións:

a) $y = \frac{x+7}{x^2-1}$ b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-7}}$

Solución:

a) Como $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -1$, entón $\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

b) O radicando é unha fracción e resolvemos a inecuación $\frac{x+3}{x-7} \geq 0$ igualamos numerador e denominador a cero: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$; e $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

Descompoñemos a recta real en tres intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 7)$ e $(7, \infty)$ e construímos a táboa:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 7)$	$(7, \infty)$
$\text{sgn}\left(\frac{x+3}{x-7}\right)$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$

A partir dela obtemos $\text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup (7, \infty)$.

Observa que no dominio entra -3, porque anula o numerador, obténdose $f(-3) = 0$, mentres que 7 anula ao denominador, logo non existe $f(7)$.

Aínda que parezan poucos, o cálculo do dominio doutro tipo de funcións consiste en mesturar convenientemente estes tres casos. Podería darse algún outro caso como o seguinte, máis de astucia que de dificultade.

3. Descubre o dominio da función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ 4x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Observando a definición desta función segmentaria ou definida a anacos, vemos que o problema é que non se definiu a función para $x = 0$, co que o seu dominio sería $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Para rematar este apartado, mencionaremos un conxunto que en certa medida complementa ao dominio: a **Imaxe** ou o **Percorrido dunha función**. Se o Dominio é o conxunto dos números reais que teñen imaxe pola función, a Imaxe ou o Percorrido é o **conxunto dos números reais que proveñen dun orixinal ou dun antecedente pola función:**

$$\text{Im } f = \{ y \in \mathbb{R} / \text{existe } x \text{ que verifica } y = f(x) \}$$

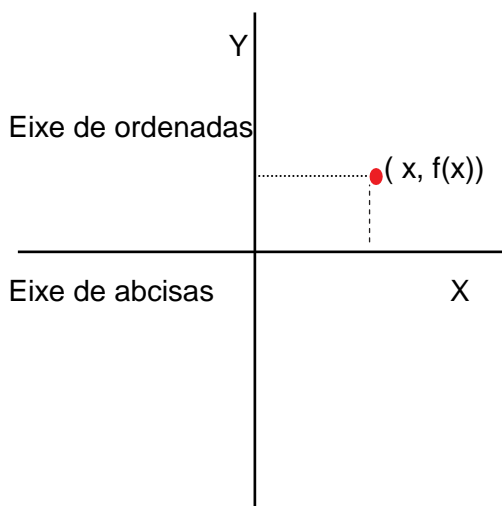
O problema de descubrir a Imaxe é considerablemente máis complexo que o de calcular o Dominio, non existindo unhas regras fixas. Como exemplo, podemos descubrir a Imaxe da función $f(x) = x^2$. É doado ver que, poñamos o número que poñamos, a imaxe sempre vai ser positiva ou, como mínimo, cero. Polo tanto, $\text{Im } f = [0, \infty)$. O estudo da Imaxe faise mellor a partir da gráfica da función.

3. Gráficas de funcións

Como unha imaxe vale máis que mil palabras, se queremos descubrir as propiedades dunha función, é máis rápido e efectivo observar a súa gráfica.

Como podemos construír unha gráfica? Necesitamos dúas rectas: unha para os orixinais, variables independentes ou x , e outra para as imaxes, variables dependentes ou y . A primeira denomínase **eixe de abscisas X** e nela marcamos o valor dos x . A segunda chámase **eixe de ordenadas Y** e nela marcamos o valor das $f(x)$. Os eixes son perpendiculares entre si e a gráfica está constituída por infinitos pares de valores $(x, f(x))$, denominados **puntos**. O sistema aquí descrito chámase sistema de eixes cartesianos ou simplemente sistema de eixes.

Observa que cando se fala dun punto dunha función se considera o par $(x, f(x))$, non só $f(x)$; e é que necesitamos dous valores para determinar un punto nun plano. Tamén debes notar que falamos de $f(x)$ ou y dependendo do noso estado de ánimo. Como xa sabes, neste contexto ambos os dous termos son sinónimos.



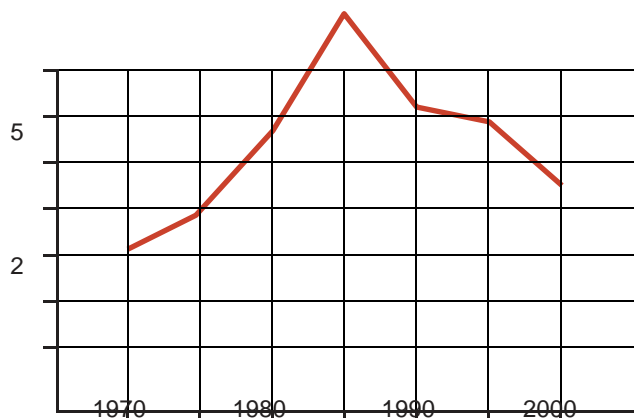
Á vista do anterior podería pensarse que para representar calquera función abondará con dar valores a x y obter os respectivos $f(x)$. ¡ Pero x ten infinitos valores! Hai que buscar outro método que nos permita esbozar unha gráfica a partir dun pequeno número de operacións.

Non obstante, existen funcións, dada a súa sinxeleza, que poden ser representadas con poucos puntos; algunhas estudíaranse nos cursos de ESO ; como as funcións constantes, lineais e cuadráticas.

Ata agora falamos das gráficas de funcións, é dicir, de funcións das que dispoñemos dunha fórmula. Porén, en practicamente todos os campos de estudo aparecen gráficas como expresión dunha relación entre magnitudes que tamén poden interpretarse coa linguaxe das funcións. Ás veces trátase dun gráfico no que aparecen reflectidas as variacións das cotizacións da Bolsa no tempo, ou a evolución da temperatura corporal dunha persoa no tempo, ou o crecemento do P.I.B. dun país en función do diñeiro investido en Educación, etc. Estas gráficas non se axustan a fórmula ningunha, aínda que evidentemente existan certas funcións, como veremos en estatística, que se adaptan mellor a elas.

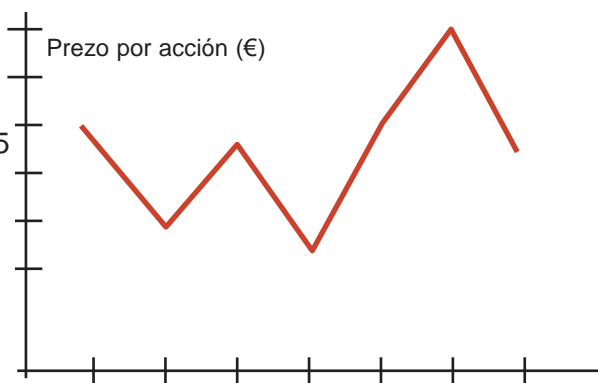
1. Constrúe unha gráfica unindo os puntos da seguinte táboa mediante segmentos:

Ano	Taxa de paro (%)
1970	2,1
1975	2,8
1980	4,6
1985	7,2
1990	5,1
1995	4,9
2000	3,5



2. A seguinte gráfica mostra a evolución da cotización das accións da empresa Currando, S.A. durante unha semana. Que día interesou vender as accións? Que día interesou compralas? Se se compraron o mellor día para a súa compra e despois se venderon no mellor día para a súa venda, canto diñeiro se gañou? Cal foi a porcentaxe de beneficio?

O mellor día para a súa venda foi o sábado, pois estaban a 17 € aproximadamente, mentres que o mellor día para a súa compra foi o xoves, 10 € xa que cada acción viña a custar 10 € aproximadamente. A ganancia obtida por acción sería $17 - 10 = 7$ €,



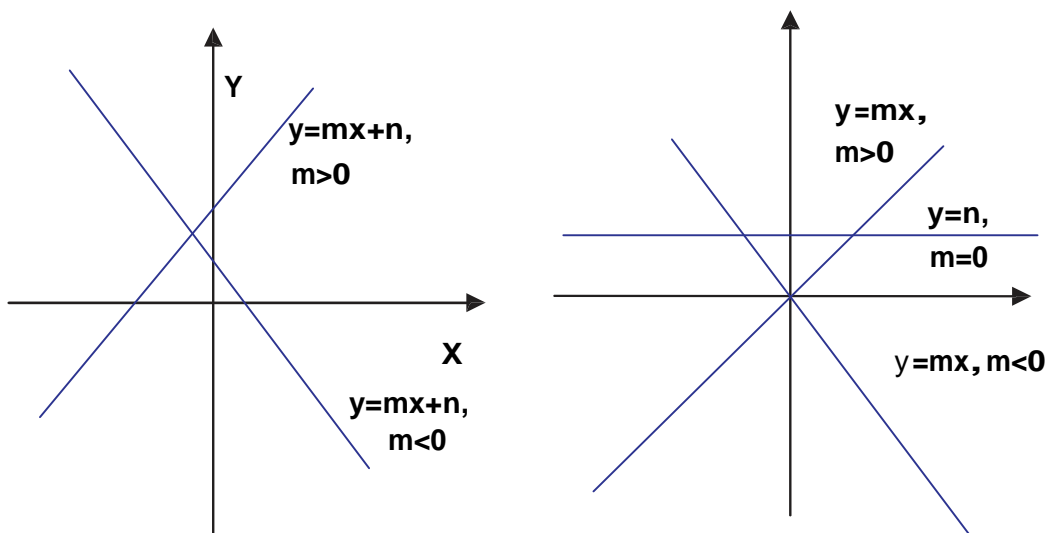
4. Funcións lineais. Interpolación lineal

4.1. Funcións lineais

Neste texto imos chamar **funcións lineais** ás que teñen a forma $y = mx + n$, e a súa gráfica é unha recta. Recordemos que m se chama **pendente** da recta e que n é a **ordenada na orixe** (se $x = 0$, $f(0) = n$). Dos dous o máis importante é m , que se calcula como $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, sendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dous puntos calquera da función.

Vese doadamente que $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$. Estes termos chámanse **incremento** ou **variación** de y e de x , respectivamente. Considerados desta última forma vemos que se trata de variacións absolutas, mentres que m representa unha variación relativa, pois é o cociente da variación absoluta de y entre a variación absoluta de x , é dicir, m é a **taxa de variación** de f respecto de x . Como veremos en 8.1, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a **taxa de variación media** dunha función, que se converte no importantísimo concepto de derivada unha función nun punto.

Cando $n = 0$, a gráfica de $y = mx$ é unha recta que pasa pola orixe de coordenadas. Se $m = 0$, temos unha función constante, posto que $f(x) = n$ para calquera valor de x . E como sabemos que para representar unha función lineal ou unha recta nos abonda con coñecer dous puntos dela, a gráfica destas funcións faise a partir dunha táboa con dous valores.



Exemplos

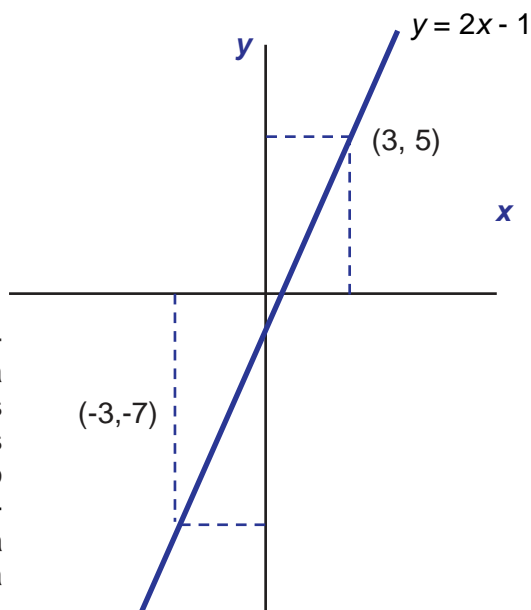
1. Representa $y = 2x - 1$.

Podemos construír a seguinte táboa:

x	$y = 2x - 1$	Puntos
-3	$2 \cdot (-3) - 1 = -6 - 1 = -7$	$(-3, -7)$
3	$2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$	$(3, 5)$

e representar os puntos obtidos.

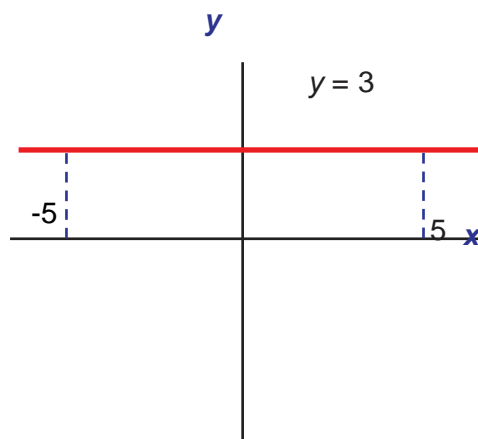
Collemos dous puntos calquera, un positivo e outro negativo, suficientemente afastados para que ao poñer unha regra as oscilacións sexan as menores posibles. Poderíamos coller outros distintos e obteríamos a mesma recta, pero talvez sería máis incómodo de representar: $x = 0$ e $x = 1$ teñen o problema da súa excesiva proximidade e podería bailar a regra ao trazar a recta.



2. Representa a función $y = 3$.

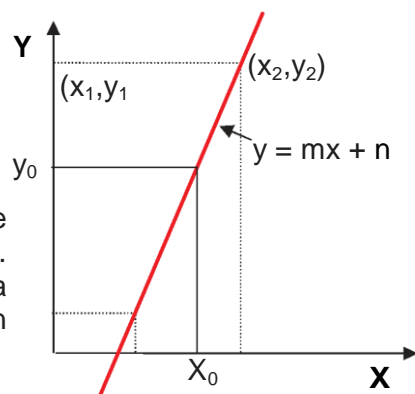
Aínda que non é necesario, pois vese que a imaxe sempre é 3, independentemente do valor de x , podemos construír a seguinte táboa para representar a función:

x	$y = 3$	Puntos
-5	3	$(-5, 3)$
5	3	$(5, 3)$



4.2. Interpolación lineal

Interpolar consiste en descubrir algunha das coordenadas dos puntos dun segmento do que coñecemos os extremos (chamados tamén polos). Para descubrir a ordenada ou a abscisa descoñecida os puntos buscados mediante interpolación, en primeiro lugar, calculamos a ecuación da recta que



pasa polos extremos: $y = mx + n$, e a partir dela atoparemos o valor ou valores buscados. Sabemos, de cursos anteriores, que a ecuación da recta se pode determinar mediante un sistema de ecuacións, onde m , pendente, e n , ordenada na orixe da recta, son as incógnitas. Vexamos algúns exemplos.

Exemplos

- 1 Descobre a ecuación da recta que pasa polos puntos (2, 3) e (-1,7).

Solución: Como a ecuación da recta é $y = mx + n$, e os dous puntos citados per-

tencen a ela verificarase que $\begin{cases} 2m + n = 3 \\ -m + n = 7 \end{cases} \rightarrow 3m = -4 \rightarrow m = \frac{-4}{3}$

$$n = 7 + m = 7 - \frac{4}{3} = \frac{17}{3} \rightarrow y = \frac{-4}{3}x + \frac{17}{3}$$

Unha vez coñecida a ecuación da recta estamos en condicións de descubrir calquera valor por interpolación. Por exemplo, que ordenada lle corresponde á abscisa $x = 0$? Substituíndo na ecuación obtense $y = \frac{17}{3}$. Fíxate que 0 está comprendido entre -1 e 2, que son as abscisas dos polos, polo que se trata dunha interpolación. Se preguntásenos pola ordenada que lle corresponde á abscisa $x = 3$ estaríamos falando dunha extrapolación, pois este valor non está entre -1 e 2, aínda que podemos descubri-lo por tratarse dunha recta.

2. Calcula a ecuación da recta que pasa polos puntos (-4,-5) e (6,15).

Solución: Outro modo de resolver a ecuación dunha recta que pasa por dous puntos é o seguinte:

A pendente m da recta vén dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15 - (-5)}{6 - (-4)} = \frac{20}{10} = 2$$

Para calcular n collemos un punto calquera e substituímol-o en $y = mx + n$:

$$15 = 2 \cdot 6 + n \rightarrow n = 15 - 12 = 3 \rightarrow y = 2x + 3.$$

Igual que no exemplo anterior, unha vez coñecida a ecuación da recta non hai máis que substituír:

Que ordenada lle corresponde a $x = 2$? $y = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ é o punto (2, 7).

Que abscisa lle corresponde a $y = 0$? $0 = 2x + 3 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{2}$ é o punto

$$\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$$

5. Función cuadrática

A **función cuadrática** responde á fórmula $y = ax^2 + bx + c$, que non é máis que un polinomio de segundo grao, e a representación gráfica do cal se chama parábola.

Para representala podemos usar varios métodos; pero na práctica o máis sinxelo consiste en descubrir as coordenadas do vértice da parábola e, a partir da abscisa do vértice, construír unha táboa de valores onde figuren tantos valores de x á dereita como á esquerda da abscisa do vértice. As coordenadas do vértice veñen dadas por

$V = \left(-\frac{b}{a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ e debemos ter en conta que se a é positivo a parábola está aberta cara a arriba (o vértice é un mínimo) e se a é negativo a parábola está aberta cara a baixo (o vértice é un máximo)

Se en vez da táboa resolvemos a ecuación de segundo grao $y = ax^2 + bx + c$, obtemos os puntos de corte da función co eixe X e co vértice xa temos elementos abondos para debuxar a parábola. Este último recurso ten algunhas particularidades que aparecen ao resolver a ecuación de segundo grao:

- a) Se esta ten dúas solucións reais distintas, xa temos dous puntos e co vértice podemos debuxar a parábola.
- b) Se ten unha solución real dobre, dita solución proporciona as coordenadas do vértice, polo que necesitamos outros dous puntos para trazar a gráfica. Calculamos dunha forma sinxela desprazándonos simetricamente arredor do vértice (por exemplo, facendo $x_v + 3$, $x_v - 3$ e calculando as súas respectivas ordenadas).
- c) Se non ten solucións reais, a parábola non corta ao eixe X . Non obstante, podemos descubrir as coordenadas do vértice e desprazarnos simetricamente en torno a este, igual que no 2º caso, para calcular un par de puntos.

Exemplos

1. Representa as funcións a) $y = x^2 - x - 2$; b) $y = x^2 - 4x + 4$; c) $y = -x^2 - x - 1$

Solución:

- a) O vértice é $\left(-\frac{-1}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot (-2) - (-1)^2}{4 \cdot 1} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4} \right)$ e como $a = 1$ é positivo, a parábola é aberta cara a arriba. Como a abscisa do vértice é $x = \frac{1}{2}$, construímos unha

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	0	-1
y	$-\frac{9}{4}$	-2	0	4	-2	0

Levando estes puntos sobre uns eixes de coordenadas e uníndoos mediante un trazo continuo obtemos a parábola.

b) Neste caso, se calculamos os puntos de corte cos eixes, resulta:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 2$$

agora tamén é o vértice, ten por coordenadas (2, 0). Desprazándonos simetricamente en torno ao devandito vértice temos:

$$x_v + 3 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow y(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 4 = 25 - 20 + 4 = 9 \Rightarrow (5, 9)$$

$$x_v - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow y(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 4 = 1 + 4 + 4 = 9 \Rightarrow (-1, 9)$$

Cos tres puntos anteriores, e vendo que a é positivo, polo tanto o vértice é un mínimo, non hai dificultade para trazar a parábola.

c) Non ten solucións reais. Resolvemos a ecuación:

$$-x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$$

non ten solucións reais. Calculamos o vértice

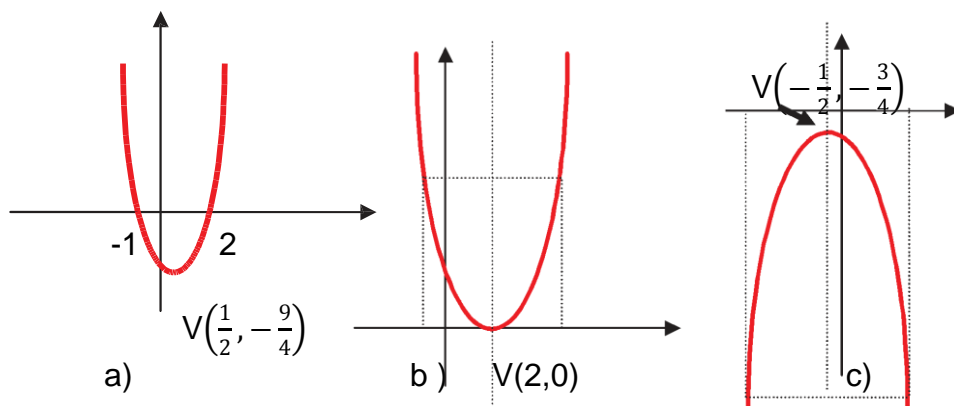
$$\left(\frac{-1}{2 \cdot (-1)}, \frac{4 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1)^2}{4 \cdot (-1)} \right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right)$$

Como $a = -1$ é negativo, a parábola está aberta cara a abaixo. Desprazándonos simetricamente arredor do vértice, obtemos dous puntos máis:

$$x_v + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3 \Rightarrow y(3) = -3^2 - 3 - 1 = -9 - 3 - 1 = -13 \Rightarrow (3, -13)$$

$$x_v - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -4 \Rightarrow y(-4) = -(-4)^2 - 4(-4) - 1 = -16 + 16 - 1 = -1 \Rightarrow (-4, -1)$$

Con tres puntos podemos debuxar a parábola. Observa que utilizamos como desprazamento fraccións de denominador 2 para que nos dea un número enteiro. As gráficas das tres funcións debuxámolas na mesma ilustración.



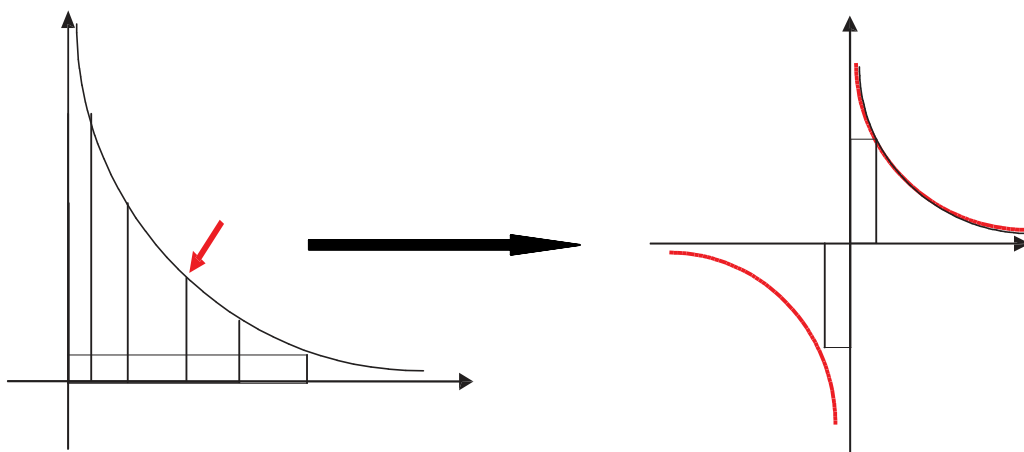
6. Función proporcionalidade inversa

Sabemos que dúas magnitudes son inversamente proporcionais cando o seu produto mantense constante: $x \cdot y = k$, k constante. De aquí dedúcese que se a magnitude y aumenta, a magnitude x ha de diminuír para que o produto permaneza constante, e viceversa. Tamén se adoita escribir a relación funcional como $y = \frac{k}{x}$ que é a nomenclatura da que procede o termo inverso, que en Matemáticas se aplica cando a variable independente está nun denominador (o termo directa úsase cando x está nun numerador, como por exemplo $y = k \cdot x$).

Para obter a representación gráfica centrémonos en $y = \frac{1}{x}$ e observemos que $x \cdot y = 1$ representa rectángulos de base x e altura y con área fixa igual a 1.

Podemos ter a seguinte secuencia: $\frac{1}{10} \cdot 10 = \frac{1}{5} \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \cdot 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 10 \cdot \frac{1}{10}$

Para x negativas, tamén as ordenadas serán negativas (porque $- \cdot (-) = +$), pero os valores non cambian en valor absoluto (é dicir, para $x = -1$, $y = -1$).



Levándoo a un sistema de eixes cartesianos obtemos a curva coñecida como **hipérbole equilátera**. Obsérvase que a devandita curva é simétrica respecto á orixe de coordenadas (**función impar**), pois se cambiamos x por $-x$, y pasa a valer $-y$ (por exemplo, $x=1$, $y=1$ e se $x=-1$, $y=-1$).

Se aumentamos o valor de k o que conseguimos é separar a curva da orixe de coordenadas (con $k=1$ pasa por $(1, 1)$ e con $k=10$ pasaría por $(1, 10)$), mentres que se disminuimos o valor de k a achegamos á orixe de coordenadas (con $k = \frac{1}{10}$ pasaría por $(1, \frac{1}{10})$).

7. Outras funcións

Ata o momento, as funcións que vimos teñen a mesma fórmula en todo o seu dominio. Non obstante, pode acontecer que a función teña fórmulas distintas en intervalos distintos. Vexamos algunhas:

$$a) f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x < 1 \\ x + 3, & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ 37 - x^2, & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad b) |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad c) \text{Ent}(x) = \text{parte entera de } x$$

Este tipo de funcións reciben o nome xenérico de **funcións definidas a anacos** ou **segmentarias**, pois a súa representación adoita estar constituída por segmentos que poden estar unidos ou non. A forma de manexar estas funcións é sinxela: debemos descubrir a fórmula que lle corresponde a un valor de x . Vexámolo primeiro coa función a):

Como $-3 < 1$ $f(-3) = 4$

Como 1 está no intervalo $[1, 5]$, $f(1) = 1 + 3 = 4$;

Como 4 está no intervalo $[1, 5]$, $f(4) = 4 + 3 = 7$;

Como 6 está no intervalo $(5, \infty]$, $f(6) = 37 - 6^2 = 1$;

A función b) ten un nome propio e unha grafía especial: $|x|$ é a función **valor absoluto**, que nos proporciona o valor absoluto dun número. Fíxate que efectivamente faíno:

$$|-10| = -(-10) = 10;$$

$$|-4| = -(-4) = 4;$$

$$|5| = 5.$$

A función c) chámase **parte enteira de x** e represéntase por $\text{Ent}(x)$ ou $[x]$, e defínese como o enteiro inmediatamente menor ou igual que x ou como o maior enteiro menor ou igual que x . Vexamos algúns valores desta función:

$$\text{Ent}(7,234) = 7; \quad \text{Ent}(3,4) = 3; \quad \text{Ent}(2) = 2; \quad \text{Ent}(0,987) = 0.$$

Loxicamente, a parte enteira dun número enteiro é el mesmo. Hai que ter coidado cos números negativos como verás a continuación:

$$\text{Ent}(-0,25) = -1, \text{ porque } 0 \text{ é maior que } -0,25.$$

$$\text{Ent}(-1,65) = -2, \text{ pois } -1 \text{ é maior que } -1,65.$$

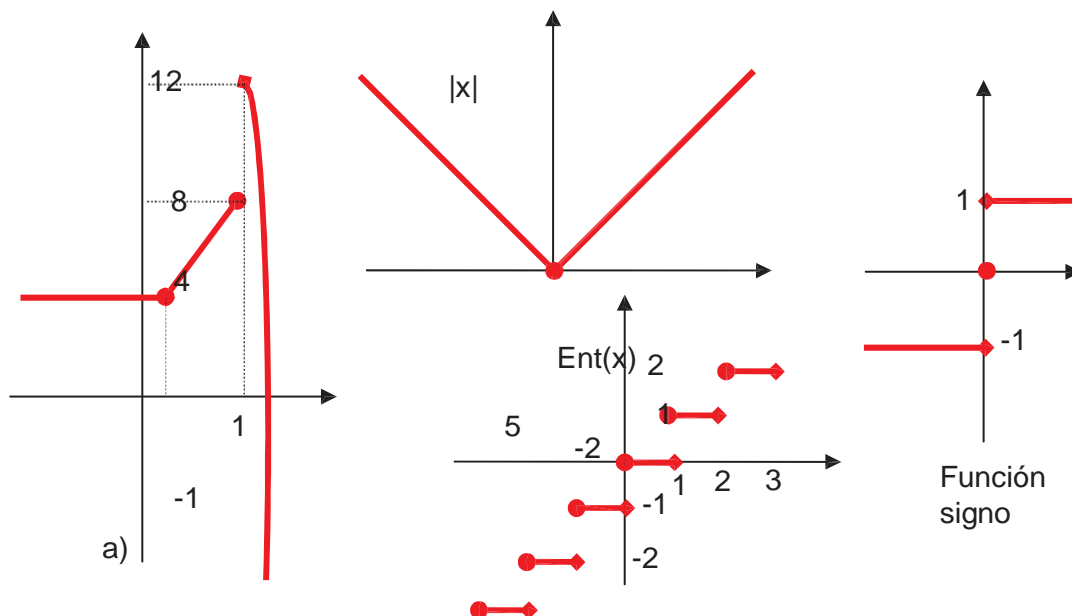
$$\text{Ent}(-3) = -3, \text{ pois } -3 \text{ é un número enteiro.}$$

$$\text{Ent}(-12,45) = -13, \text{ pois } -12 \text{ é maior que } -12,45.$$

Outra función definida a anacos interesante é a función signo definida como:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para representar graficamente estas funcións o que debemos facer é representar cada fórmula no intervalo en que está definida. Volvendo ao exemplo a), representaremos $f(x) = 4$ no intervalo $(-\infty, 1)$, $f(x) = x+3$ no intervalo $[1, 5]$ e por último $f(x) = 37 - x^2$ en $(5, \infty)$. Trátase polo tanto dunha recta horizontal (a función constante), dunha recta (a función lineal) e dunha parábola (a función cuadrática). Os intervalos dinnos onde empeza e onde remata cada unha destas funcións e non podemos prolongalas máis alá dos devanditos intervalos. A continuación van as representacións dos 4 exemplos vistos ata agora.



O convenio que se seguiu no gráfico é o seguinte: se o valor de x entra no intervalo, pon un círculo recheo e se non entra, un rombo recheo. Observarás que en a) o rombo do primeiro anaco foi solapado polo círculo do segundo anaco debido a que a función é continua nese punto ($f(1)$ vale o mesmo se o calculamos coa primeira fórmula ou coa segunda). Non obstante, en $x = 5$ obsérvase un salto: o 2º anaco remata no punto $(5, 8)$ e o 3º empezaría en $(5, 12)$ (aínda que non é correcto calcular $f(5)$ coa 3ª definición, $f(x) = 37 - x^2$, fíxate que $f(5,00...1)$ xa si se calcularía con esta 3ª definición e saíríanos 11,99..., que é 12 a todos os efectos).

A forma matematicamente correcta de escribir estes resultados verémola cando falemos dos límites e da continuidade. Polo tanto, a función é discontinua en $x = 5$.

No valor absoluto solápanse de novo o rombo e o círculo en $x = 0$, posto que a función é continua no devandito punto.

A función Ent (x) chámase **función graduada** (non hai máis que ver o debuxo), pois está formada por segmentos de lonxitude 1, habendo un salto de lonxitude 1 cada vez que topamos un número enteiro: fíxate en que todos os números do intervalo $[0,1)$ son da forma $0,...$ polo que a súa parte enteira vale 0 e xusto salta 1 cando entramos no intervalo $[1,2)$, que son números da forma $1, ...$ polo que a súa parte enteira vale 1 e salta a valer 2 cando entramos no intervalo $[2,3)$, e así sucesivamente. Observa que esta función vai ter tantos puntos de discontinuidade como números enteiros hai, é dicir, infinitos puntos de discontinuidade, aínda que os saltos son finitos.

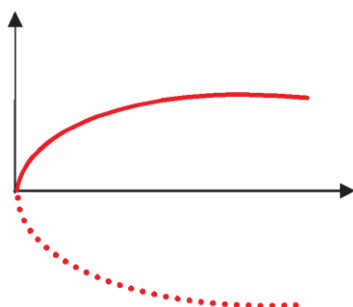
A **función signo** só ten dous chanzos e é discontinua en $x = 0$. Aparecen funcións graduadas, por exemplo, cando nos cobran o teléfono por pasos de 3 minutos: vale o mesmo unha chamada de 30 segundos que outra de 2 min 50 s, e unha de 3 min 10 s o mesmo que outra de 5 min 59 s. É dicir, unha función graduada está composta de chanzos que non son máis que funcións constantes en certos intervalos.

Outras funcións importantes son as **radicais**, que non son máis que funcións definidas a partir de raíces, como por exemplo, \sqrt{x} , $\sqrt{x-5}$, $\sqrt[5]{3x-1}$... Non podemos dar propiedades xerais, dado que o índice da raíz pode tomar infinitos valores, e ademais o comportamento é distinto dependendo de se o devandito índice é un número par (o radicando non poderá ser negativo) ou impar (o radicando pode ter calquera signo).

A máis sinxela é a función **raíz cadrada** de x , $f(x)=\sqrt{x}$ aínda que máis correcto é dicir que é a **raíz cadrada positiva** de x , posto que só collemos o resultado positivo. Recordamos que a solución da ecuación $x^2 = 1$ é $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

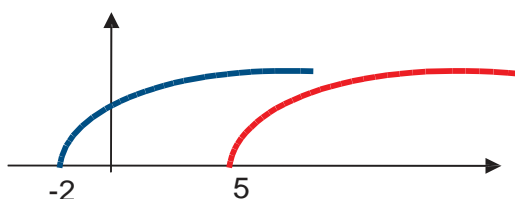
Nós só imos coller a parte positiva da raíz, polo que f sempre será *positiva*, que non hai que confundir con que o seu dominio sexa $[0, 4)$, porque ao intentar resolver a raíz cadrada dun número negativo aparecen números que non son reais.

A gráfica desta función é unha parábola tombada, consecuencia da relación que existe entre a raíz cadrada e elevar o cadrado. Unha táboa de valores para x igual a 0, 1, 4, 9, 16,... axudaranos a completar a representación gráfica desta función.



Que pasará con $f(x)=\sqrt{x-5}$? Pois que debemos desprazar a gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ 5 unidades cara á dereita. Fíxate que $x-5=0$ se $x=5$.

E con $f(x) = \sqrt{x+2}$? Desprazaremos a figura 2 unidades cara á esquerda (pois $x+2=0$ implica $x=-2$).



As funcións radicais con índice distinto de 2 necesitan para representalas un tratamento máis detallado. O mesmo acontece coas funcións polinómicas de grao maior que 2, que non é posible coñecer a súa gráfica xeneralizando o comportamento das funcións lineais e

cuadráticas.