

4 Ecuacións, inecuacións e sistemas

ÍNDICE DE CONTIDOS

1. ECUACIÓN.	2
1.1. Identidades e ecuacións.	2
1.2. Equivalencia de ecuacións.	2
2. ECUACIÓN DE PRIMEIRO GRAO.	3
3. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRAO.	4
3.1. Completar cadrados.	4
3.2. Fórmula para resolver a ecuación de segundo grao.	5
3.3. Función cuadrática.	5
3.4. Solucións dunha ecuación de segundo grao.	6
3.5. Ecuacións incompletas de segundo grao.	9
4. ECUACIÓN DE GRAO SUPERIOR	10
4.1. Ecuacións de grao superior.	10
4.2. Ecuacións bicadradas.	11
5. SISTEMAS DE ECUACIÓN LINEAIS.	12
5.1. Resolución gráfica.	12
5.2. Métodos de resolución de sistemas lineais.	13
5.3. Método de Gauss.	15
6. SISTEMAS NON LINEAIS.	17
7. PROBLEMAS.	18
8. INECUACIÓN LINEAIS.	19
9.1. Inecuacións lineais cunha incógnita.	19
9.2. Inecuacións lineais con dúas incógnitas.	20

Nesta unidade didáctica imos tratar a igualdade de expresións alxébricas ás que chamaremos ecuacións. Os conxuntos formados por dúas ou máis ecuacións serán os sistemas, e estudaremos sistemas que aparecen ao trasladar enunciados de problemas a expresións alxébricas. Así mesmo resolveremos sistemas de ecuacións polo método de Gauss

Finalizamos co estudo das inecuacións de unha e dúas incógnitas. A representación gráfica, ben sobre a recta real para os sistemas dunha incógnita, ou ben sobre o plano cartesiano para os sistemas con dúas incógnitas permite interpretar con facilidade as solucións.

1. Ecuacións

As relacións numéricas ou alxébricas separadas polo signo **igual "="** chámanse **igualdades**. Dunha igualdade pódese afirmar que é **verdadeira** ou **falsa**.

1.1. Identidades e ecuacións

As igualdades alxébricas poden ser de dous tipos.

- **Identidade:** É unha igualdade alxébrica que é verdadeira para calquera valor das variables. Por exemplo, a igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ é unha identidade.

- **Ecuación:** É unha igualdade que é verdadeira para algúns valores das variables.

Por exemplo, a ecuación $2x + 5 = 15$, é verdadeira unicamente para $x = 5$; a ecuación $x + y = 12$ é verdadeira para infinidade de valores das variables; por exemplo, $x = 2$ e $y = 10$, $x = 4$ e $y = 8$.

- **Variables ou incógnitas:** Son as letras que interveñen na ecuación.
- **Solucións ou raíces da ecuación:** Son os valores das incógnitas que converten a ecuación nunha igualdade verdadeira.
- **Resolver unha ecuación:** É calcular a súa solución, ou solucións, ou demostrar que non ten solución.

1.2. Equivalencia de ecuacións

Dúas ecuacións son equivalentes cando toda solución da primeira é solución da segunda e viceversa.

Por exemplo, as ecuacións $2x + 4 = 10$ e $2x = 6$ son equivalentes, as dúas teñen por solución $x = 3$.

Para resolver unha ecuación transfórmase noutras equivalentes máis simples nas que sexa sinxelo atopar a solución. Os principios que permiten converter unha ecuación noutra equivalente son:

- **Se se suma ou resta aos dous membros dunha ecuación unha mesma expresión, a ecuación que resulta é equivalente á primeira.**

$$p(x) = q(x) \quad \longleftrightarrow \quad p(x) + a(x) = q(x) + a(x)$$

- **Se se multiplican ou dividen os dous membros dunha ecuación por un número distinto de cero, a ecuación que resulta é equivalente á primeira.**

$$p(x) = q(x) \quad \longleftrightarrow \quad a \cdot p(x) = a \cdot q(x), \text{ co } a \neq 0$$

- Comprobar unha solución consiste en substituír na ecuación a incógnita polo valor calculado e ver que converte á ecuación nunha igualdade verdadeira.

Actividades

1. Nas igualdades seguintes indica as que son ecuacións e as que son identidades:
a) $3x - 6 = 2x + 4$; b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c) $x + 3y = 12$; d) $4(2x - 3) + 1 = 8x - 11$.
2. Estuda se $x = 3$ é solución das ecuacións: a) $2x^2 - 4x - 6 = 0$; b) $x^2 + x - 6 = 0$
3. Escribe dúas ecuacións que teñan por solución $x = 5$.

2. Ecuacións de primeiro grao

Son as ecuacións máis sinxelas que estudaches.

Unha ecuación de primeiro grao cunha incógnita é toda ecuación equivalente a outra da forma $ax + b = 0$, con $a \neq 0$; a e b son números reais e chámanse coeficientes de ecuación.

Exemplos

1. Resolver: $6(x - 3) - 3(x - 4) = x + 8$

Solución:

Quitamos paréntese: $6x - 18 - 3x + 12 = x + 8$

Traspoñemos termos: $6x - 3x - x = 18 - 12 + 8$

Simplificamos: $2x = 14$

Despexamos a incógnita: $x = 14/2 = 7$

Comprobación: $6(7 - 3) - 3(7 - 4) = 7 + 8$

Simplificamos: $15 = 15$

2. Resolver $\frac{3x + 8}{10} = 3 - \frac{5x - 8}{12}$

Solución:

Calcúlase o M.C.M. dos denominadores 10 e 12 que é 60 e multiplícanse os dous membros da ecuación por 60.

$$60 \frac{3x + 8}{10} = 60 \left(3 - \frac{5x - 8}{12} \right)$$

Quitamos paréntese e simplificamos: $18x + 48 = 180 - 25x + 40$

Traspoñemos termos: $18x + 25x = 180 + 40 - 48$

Simplificamos: $43x = 17$

Despexamos a incógnita: **$x = 17/43$**

Comprobación: Substituír x por 4 na ecuación como no exemplo anterior.

3. Ecuacións de segundo grao

Como xa sabes, as ecuacións de segundo grao son da forma:
 $ax^2 + bx + c = 0$; con $a \neq 0$; onde a , b e c son número reais, chamados coeficientes da ecuación.

Veremos varios métodos para resolver a ecuación de segundo grao.

3.1. Completar cadrados

Este método é o máis antigo para resolver ecuacións de segundo grao; os exemplo seguintes darán as estratexias para resolver ecuacións.

Exemplos

1. Resolver a ecuación $x^2 + 8x + 16 = 0$

Solución: A ecuación pódese escribir: $x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 = 0$

O primeiro membro é o cadrado dun binomio: $(x + 4)^2 = 0$

A paréntese anúlase para **$x = -4$** e esta é a solución.

2. Resolver a ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$

Solución: O primeiro membro non é o cadrado dun binomio, débese completar o cadrado.

- Pasar ao segundo membro o termo independente: $x^2 - 6x = -5$
- Axustar o cadrado sumando 9 aos dous membros: $x^2 - 2 \cdot 3x + 9 = 9 - 5$
- O primeiro membro é o cadrado dun binomio: $(x - 3)^2 = 4$
- Despexar $(x - 3)$: $(x - 3) = \sqrt{4} = \pm 2$
- As solucións obtéñense resolvendo as ecuacións: $\begin{cases} x - 3 = 2 \\ x - 3 = -2 \end{cases}$
- As solucións son **$x = 5$** e **$x = 1$** .

3.2. Fórmula para resolver a ecuación de segundo grao

A xeneralización de completar cadrados dá lugar á fórmula seguinte que permite obter as solucións da ecuación de segundo grao:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplos

1. Resolver a ecuación $2x^2 - x - 6 = 0$

Solución: Aplícase a fórmula, tendo en conta que $a = 2$, $b = -1$ e $c = -6$.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2(-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1+7}{4} = 2 \\ \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

As solucións son $x = 2$ e $y = -3/2$

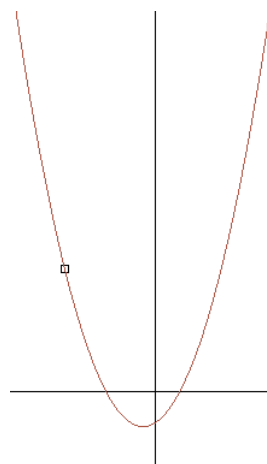
3.3. Función cuadrática

Recorda que a gráfica da función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ é unha parábola da que coñeces:

- O seu eixe é paralelo ao eixe de ordenadas Y.
- O coeficiente a de x^2 dános a forma da parábola.

Se $a > 0$ a parábola presenta un **mínimo**. Se $a < 0$ a parábola presenta un **máximo** y e dícese que é invertida.

Por outra parte, canto menor é o valor absoluto do coeficiente de x^2 , a máis aberta é a parábola.



Gráfica da función
 $y = 1/2 \cdot x^2 + x - 4$

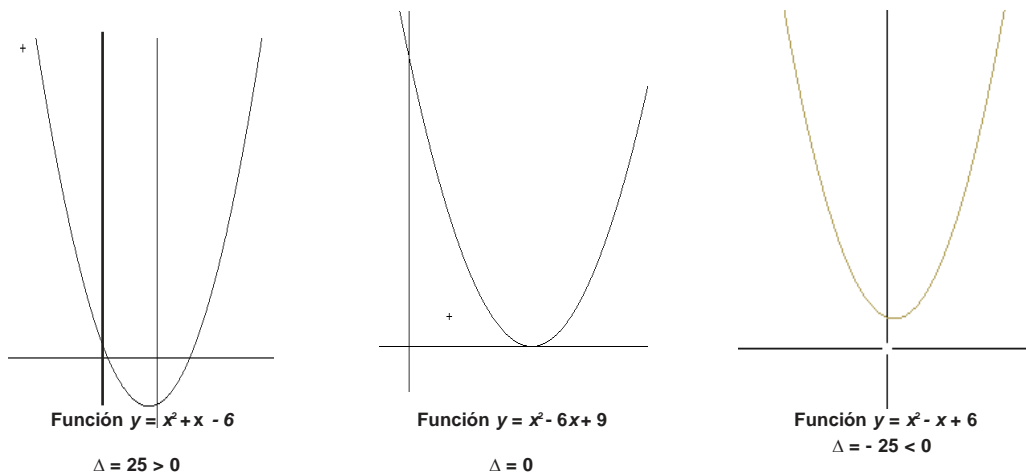
- A abscisa o vértice (máximo ou mínimo) vén dada por $x = -b/2a$
- Os puntos de corte co eixe de abscisas son as solucións da ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$
- O punto de corte con eixe de ordenadas obtense facendo $x=0$, entón $y=c$.

3.4. Solucións dunha ecuación de segundo grao

A partir da fórmula e sen necesidade de resolver a ecuación de segundo grao pódese coñecer o número de solucións da ecuación de segundo grao. Todo depende do signo da expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, que se atopa baixo o signo radical, chamado discriminante da ecuación.

- Se $b^2 - 4ac > 0$ o dobre signo da fórmula proporciona **dúas solucións para a ecuación**.
- Se $b^2 - 4ac = 0$ a raíz cadrada de cero é cero e a ecuación **ten unha solución**.
- Se $b^2 - 4ac < 0$ non existe raíz cadrada e a ecuación **non ten solucións reais**.

As gráficas seguintes representan as situacións indicadas anteriormente



Exemplos

1. Representa as parábolas: a) $y = x^2 - 2x - 3$; b) $y = -x^2 + 4x + 12$.

Solución:

- a) • Os cortes co eixe X son as solucións da ecuación: $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{1+4}{2} = 3 \\ \frac{1-4}{2} = -1 \end{cases}$$

A parábola corta ao eixe X en A(3, 0) e B(-1, 0).

- Abscisa do vértice: $x = -b/2a = 2/2 = 1$; ordenada do vértice $y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

Vértice da parábola V (1, -4)

- Táboa de valores próximos ao vértice incluído este:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

- b) • Os cortes co eixe X son as solucións da ecuación: $-x^2 + 4x + 12 = 0$

Multiplícase por -1 e queda, $x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2(-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1+7}{4} = 2 \\ \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

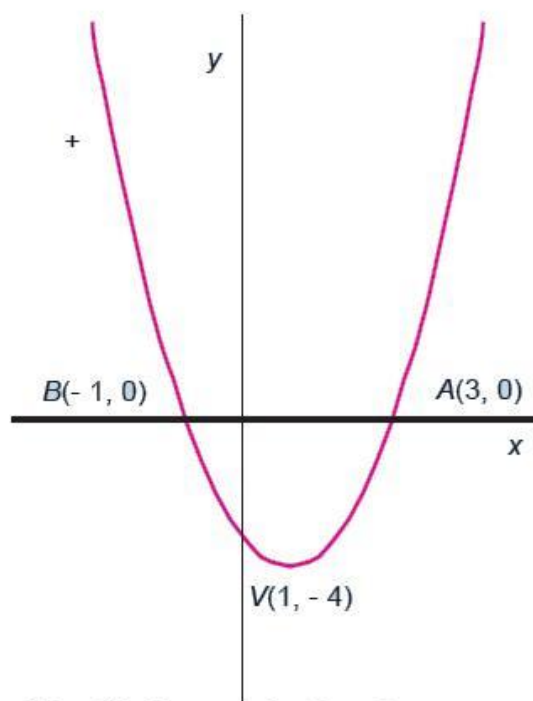
A parábola corta ao eixe X en A(6, 0) e B(-2, 0).

- Abscisa do vértice: $x = -b/2a = 4/2 = 2$; ordenada do vértice $y = -2^2 + 4 \cdot 2 + 12 = 16$.

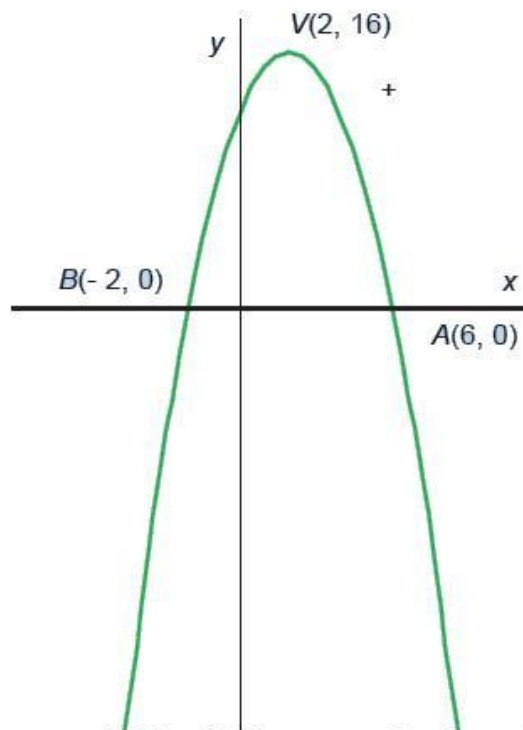
Vértice da parábola V (2, 16)

- Táboa de valores próximos ao vértice incluído este.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	0	7	12	15	16	15	12	7	0



a) Parábola $y = x^2 - 2x - 3$



b) Parábola $y = -x^2 + 4x + 12$

Factorizar a ecuación de segundo grao:

A ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ pódese factorizar cando ten solucións e delas infórmanos o discriminante; polo tanto, se:

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ a ecuación ten dúas solucións r e s e admite a factorización:

$$ax^2 + bx + c = (x - r)(x - s)$$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ a ecuación ten unha raíz r e admite a factorización:

$$ax^2 + bx + c = (x - r)^2$$

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ a ecuación non ten solución; non se pode descompoñer, polo tanto, é irreducible

3.5. Ecuacións incompletas de segundo grao

As **ecuacións incompletas de segundo grao** preséntanse cando polo menos un dos coeficientes b ou c son cero. A ecuación xeral redúcese a:

- | | | | |
|----|-------------------|----|---------------------|
| a) | $ax^2 = 0$, | se | b e c son cero. |
| b) | $ax^2 + c = 0$, | se | b é cero. |
| c) | $ax^2 + bx = 0$, | se | c é cero. |

Todas se poden resolver mediante a fórmula xeral, pero é máis cómoda aplicar a cada unha os razoamentos seguintes:

a) Ecuación: $ax^2 = 0$; dividir por a e queda, $x^2 = 0$; $x = 0$

b) Ecuación $ax^2 + c = 0$; traspoñer c e queda, $ax^2 = -c$; despexar $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

c) Ecuación $ax^2 + bx = 0$; sacar factor común, $x(ax + b) = 0$.

Para que un produto sexa cero un dos factores ou os dous deben ser cero:

$$\begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} ; \text{ as solucións serán, } x = 0 \text{ e } x = -b/a$$

Exemplos

1. Resolver as ecuacións: a) $4x^2 = 0$; b) $2x^2 - 8 = 0$; c) $3x^2 + 12x = 0$

Solución:

a) Despexar $x^2 = 0$; $x = 0$

b) Traspoeir, $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$; $x = \pm\sqrt{4}$; $x = 2$;

c) Sacar factor común; $x(3x + 12) = 0$; de onde $\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 12 = 0 \end{cases}$

Solucións: $x = 0$ e $x = -4$

4. Ecuacións de grao superior

4.1 Ecuacións de grao superior

Algunhas **ecuacións de grao superior** ao segundo resólvense se se aplican técnicas de factorización para transformalas noutras equivalentes de primeiro e segundo grao.

Exemplos

1. Resolver a ecuación: $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$.

Solución: $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = 0$

Iguálense a cero os dous factores: $x = 0$ e $x^2 + 2x - 3 = 0$

A ecuación de segundo grao ten por solucións, $x = 1$ e $x = -3$.

As solucións da ecuación proposta serán: $x = 0$, $x = 1$ e $x = -3$.

2. Resolver a ecuación: $4x^4 - 21x^3 + 29x^2 - 6x = 0$.

Solución:

Sácase factor común x : $4x^4 - 21x^3 + 29x^2 - 6x = x(4x^3 - 21x^2 + 29x - 6) = 0$

Aplícase a Regra de Ruffini ao segundo factor:

	4	-21	29	-6
2		8	-26	6
	4	-13	3	0

Descomponse en factores: $x(x - 2)(4x^2 - 31x + 3) = 0$

A ecuación de segundo grao ten por solucións, $x = 3$ e $x = 1/4$

As solucións da ecuación de partida serán: $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 1/4$

4.2. Ecuacións bicadradas

As ecuacións de cuarto grao $ax^4 + bx^2 + c = 0$ que non teñen os graos un e tres chámanse **ecuacións bicadradas**; redúcense a ecuacións de segundo grao mediante o seguinte cambio de variable $x^2 = y$; polo que, $x^4 = y^2$; ao substituír na ecuación dada obtense:

$$ay^2 + y + c = 0$$

que é unha ecuación de segundo grao na variable y .

Exemplos

1. Resolver a ecuación: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Solución: Realízase o cambio $x^2 = y$, $x^4 = y^2$

Obtense a ecuación de segundo grao: $y^2 - 10y + 9 = 0$

Resólvese esta ecuación en y , as solucións son: $y = 9$ e $y = 1$

De $y = x^2 = 9$, obtéñense as solucións, $x = 3$ e $x = -3$

De $y = x^2 = 1$, obtense as solucións, $x = 1$ e $x = -1$.

A ecuación proposta ten catro solucións.

2. Resolver a ecuación: $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Solución: Realízase o cambio $x^2 = y$, $x^4 = y^2$

Obtense a ecuación de segundo grao: $y^2 + 3y - 4 = 0$

Resólvese esta ecuación en y e obtense: $y = 1$ e $y = -4$

De $y = x^2 = 1$, obtéñense as solucións, $x = 1$ e $x = -1$

De $y = x^2 = -4$, non se obteñen as solucións para x

A ecuación proposta ten dúas solucións reais.

5. Sistemas de ecuacións lineais

Un **sistema de ecuacións** é un conxunto de ecuacións que se deben satisfacer simultaneamente. Un sistema lineal de dúas ecuacións con dúas incógnitas ou de tres ecuacións con tres incógnitas pódese escribir así:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} ; \quad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

onde os coeficiente das incógnitas e os termos independentes son números reais.

Solucións dun sistema son os valores das incógnitas que fan verdadeiras todas as ecuacións que forman o sistema.

Resolver un sistema é atopar os valores das variables que fan verdadeiras todas as ecuacións do sistema ou demostrar que non existe solución.

5.1. Resolución gráfica

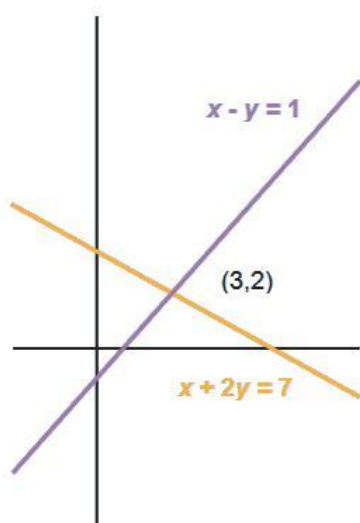
Para atopar as solucións dun sistema lineal de dúas ecuacións con dúas incógnitas pódense representar en coordenadas cartesianas as dúas rectas que forman o sistema e os puntos de corte serán as solucións do sistema.

Exemplos

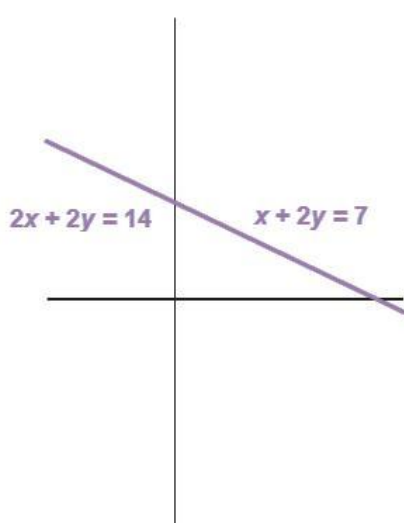
1. Resolver os sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases} & \text{c)} & \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \end{array}$$

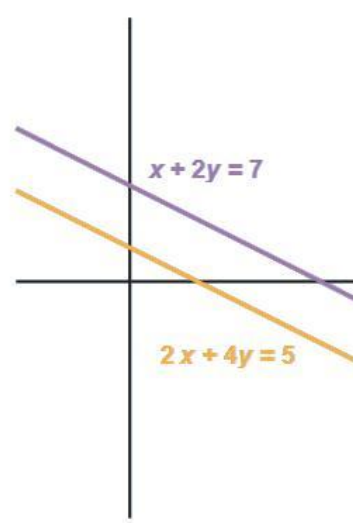
Solucións:



Sistema a



Sistema b



Sistema c

a) As dúas rectas córtanse en (3, 2) a solución do sistema é $x = 3$ e $y = 2$.

O sistema ten solución única.

b) As dúas rectas son coincidentes. **O sistema ten infinitas solucións.**

c) As dúas rectas son paralelas, non teñen ningún punto en común.

O sistema non ten solución.

A solución gráfica permite clasificar os sistemas lineais en:

- **Compatibles** se teñen solución.
- Se a solución é única dise **compatible e determinado**.
- Se as solucións son infinitas dise **compatible e indeterminado**.
- **Incompatibles** se non teñen solución.

5.2. Métodos de resolución de sistemas lineais

Entre os métodos alxébricos que existen para resolver sistemas imos tratar:

- **Método de substitución:** Despéxase unha incógnita nunha das ecuacións e substitúese a expresión obtida nas outras ecuacións.
- **Método de redución:** Multiplícanse as ecuacións por números adecuados de forma que ao sumar os resultados se elimina unha das incógnitas.

- **Método de igualación:** Despéxase en todas as ecuacións a mesma incógnita e iguálanse as expresións obtidas.

Exemplos

1. Resolver o sistema:
$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Solución: Resolvémolo por substitución.

Despéxase unha incógnita nunha ecuación e substitúese o seu valor na outra ecuación; que se transforma nunha ecuación cunha incógnita.

Despéxase y na segunda ecuación: $y = 4 - 2x$

Substitúese na primeira: $4x + 3(4 - 2x) = 10$

Resolver esta ecuación: $x = 1$

Substituír o valor de x na incógnita despexada: $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

A solución do sistema é **$x = 1$ e $y = 2$** .

2. Resolver o sistema:
$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Solución: Resólvese por igualación.

Despéxase a mesma incógnita nas dúas ecuacións e iguálanse, co que se obtén unha ecuación cunha incógnita.

Despexar y nas dúas ecuacións: $y = (10 - 4x)/3$ e $y = 4 - 2x$

Igualar os valores: $(10 - 4x)/3 = 4 - 2x$

Resolver esta ecuación: $x = 1$

Substituír este valor no segundo y despexado: $y = 4 - 2 \cdot 1 = 2$

A solución do sistema é **$x = 1$ e $y = 2$** .

3. Resolver o sistema:
$$\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Solución: Resolvémolo por redución.

Consiste en conseguir que os coeficientes dunha das incógnitas sexan opostos nas dúas ecuacións e a continuación sumalas.

Substitúese a segunda ecuación polo resultado de sumar a primeira coa segunda multiplicada por -3; número co que se conseguen que as dúas ecuacións teñan os coeficientes de y iguais e opostos.

$$\begin{array}{rcl} 4x + 3y & = & 10 \\ - 6x - 3y & = & -12 \\ - 2x + 0 & = & -2 \end{array}$$

Despéxase x : $x = 1$

Substituír este valor na primeira ecuación: $4 \cdot 1 + 3y = 10$

Resolver a ecuación: $y = 2$.

A solución do sistema é $x = 1$ e $y = 2$.

5.3 Método de Gauss

O método de Gauss consiste en converter un sistema "normal" de 3 ecuacións con 3 incógnitas nun escalonado, no que a 1ª ecuación ten 3 incógnitas, a 2ª ten 2 incógnitas e a terceira 1 incógnita. Desta forma será fácil a partir da última ecuación e subindo cara arriba, calcular o valor das 3 incógnitas.

O método de Gauss é unha xeneralización do método de redución, que utilizamos para eliminar unha incógnita nos sistemas de dúas ecuacións con dúas incógnitas. Consiste na aplicación sucesiva do método de redución, utilizando os criterios de equivalencia de sistemas. Obtense así un sistema, que chamaremos **escalonado**, tal que a última ecuación ten unha única incógnita, a penúltima dúas incógnitas, a antepenúltima tres incógnitas, ..., e a primeira todas as incógnitas.

Para transformar o sistema nun que sexa graduado combínanse as ecuacións entre si (sumándoas, restándoas, multiplicándoas por un número, etc.)

Exemplo: Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A) \\ 3x + 4y - 6z = 5 & (B) \\ 5x - 2y + 4z = -7 & (C) \end{cases}$$

A 1ª ecuación sempre se deixa igual, (procurando que esta sexa a máis sinxela) e á 2ª e 3ª ecuación débese anular o termo que leva a x .

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A) \\ 3x + 4y - 6z = 5 & (B) \\ 5x - 2y + 4z = -7 & (C) \end{cases} & \begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A') = (A) \\ -y + 9z = 13 & (B') = -3(A) + 2(B) \\ -19y + 43z = -9 & (C') = -5(A) + 2(C) \end{cases} \end{array}$$

Unha vez que anulamos os termos en x debemos deixar fixa a 1ª e 2ª ecuación e anular o termo que leva a e na 3ª ecuación.

Unha vez que anulamos os termos en x debemos deixar fixa a 1ª e 2ª ecuación e anular o termo que leva a e na 3ª ecuación

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A'') = (A') \\ -y + 9z = 13 & (B'') = (B') \\ -128z = -256 & (C'') = -19(B') + (C') \end{cases}$$

Da última ecuación obtemos que $z = -256/-128 = 2$, que substituíndo en B''

resulta- $y + 9 \cdot 2 = 13 \Rightarrow y = 5$ e á súa vez substituíndo en A'' obtemos que :

$$2x + 3 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = -1 \Rightarrow x = -1$$

Polo tanto a solución do sistema é **(-1, 5, 2)**

Observacion: Cando ao realizar Gauss obteñamos $0 = K$, sendo K un número distinto de 0, teremos un S.I. xa que obtemos un absurdo.

Cando ao realizar Gauss obteñamos $0 = 0$, é dicir anúllellos algunha ecuación, e o sistema resultante teña máis incógnitas que ecuacións teremos un S.C.I. en función dun ou dous parámetros (depende das ecuacións que se anulen).

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A) \\ 3x + 4y - 6z = 5 & (B) \\ 5x + 7y - 13z = 4 & (C) \end{cases}$$

Deixamos como sempre a 1ª ecuación igual e intentamos quitar a incógnita x da 2ª e 3ª ecuación. Si intentamos anular la y de la 3ª ecuación vemos que se nos anula la 3ª ecuación

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A'') = (A') \\ -y + 9z = 13 & (B'') = (B') \\ 0 = 0 & (C'') = (B') - (C') \end{cases}$$

Obtemos xa que logo un sistema con dúas ecuacións e 3 incógnitas (hai máis incógnitas que ecuacións) polo que terá infinitas solucións. Unha delas sería por exemplo dar á z o valor $z=0$ e así obteríamos que $y = -13$, $x = 19$

6. Sistemas non lineais

Ata agora vimos sistemas as dúas ecuacións eran lineais; se algunhas das ecuacións que interveñen no sistema é de grao superior a un estamos ante un sistema non lineal.

Os sistemas de ecuacións non lineais resólvense graficamente como os lineais; as solucións serán os puntos de corte das gráficas que representan as ecuacións que forman o sistema.

A solución alxébrica destes sistemas adóitase utilizar o método de substitución e ao aplicalo dará orixe con frecuencia a ecuacións de segundo grao.

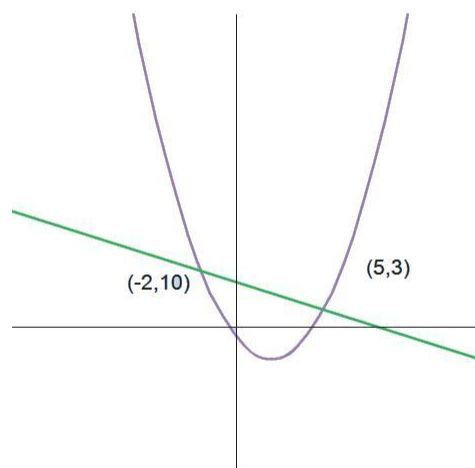
Exemplos

1. Resolver graficamente o sistema:
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y = x^2 - 4x - 2 \end{cases}$$

Solución:

Representáanse graficamente as dúas ecuacións.

Os puntos de corte (5, 3) e (-2, 10) da recta e da parábola serán as solucións do sistema.



2. Resolver o sistema:

Solución:

Despéxase y na ecuación lineal: $y = 2 - x$

Substitúese na ecuación non lineal: $x^2 + (2 - x)^2 = 10$

Opérase e simplifícase: $x^2 - 2x - 3 = 0$

Resólvese a ecuación: $x = 3$ e $x = -1$

Substitúense estes valores na incógnita despexada:

para $x = 3$, $y = -1$; para $x = -1$,

$y = 3$. O sistema ten dúas solucións: (3, -1) e (-1, 3).

7. Problemas

Recorda que para resolver un problema mediante álgebra se debe seguir o procedemento seguinte.

Formulo: Consiste en traducir o enunciado escrito nunha ecuación ou sistemas de ecuacións

Resolución: Parte na que se resolve a ecuación ou o sistema formulado.

Discusión: Compróbase que a solución obtida é a solución da ecuación ou do sistema e que é válida para as condicións impostas no enunciado.

Para formular unha ecuación a partir dun enunciado debes:

Paso 1: Realizar unha lectura comprensiva para identificar o dato que se debe calcular e representalo cunha letra.

Paso 2: Trazar un plan para traducir a linguaxe escrita á linguaxe alxébrica.
Planificar a información en resumos. Comparar o problema con outros coñecidos.

Paso 3: Levar a cabo o plan trazado e se este non funciona cambiar de plan.

Exemplo:

1. A cantidade de euros que un rapaz leva no peto é tal que se gasta a terceira parte máis a súa sétima parte, aínda lle quedarían 2,5 euros máis a metade do que levaba. Que cantidade de pesetas levaba no peto?

Solución:

Gastos : $x/3 + x/7$

Quedalle : $25 + x/2$

Ecuación: $25 + x/2 = x - (x/3 + x/7)$

Resolver a ecuación: Solución, $x = 105$ euros.

Discusión: A solución cumpre as condicións do enunciado; vexamos se cumpre a ecuación: $2,5 + 105/2 = 105 - (105/3 + 105/7)$

$$2,5 + 52,5 = 105 - 50$$

$$55 = 55$$

O valor de 105 para x converte a ecuación nunha igualdade numérica verdadeira.

8. Inecuacións lineais

8.1. Inecuacións lineais cunha incógnita

Unha **inecuación de primeiro grao** cunha incógnita é toda desigualdade que se se simplifica resulta equivalente á seguinte $ax + b > 0$, con $a \neq 0$

É evidente que na expresión $ax + b > 0$ pode aparecer calquera dos catro signos de desigualdade, $<$, $>$, \leq ou \geq .

Solución xeral dunha ecuación cunha incógnita son os puntos dun intervalo infinito.

A solución xeral dunha inecuación interprétase con facilidade se se realiza a súa representación gráfica.

Un sistema de inecuacións é o conxunto formado por dúas ou máis inecuacións.

As solucións do sistema de inecuacións lineais cunha incógnita serán as solucións comúns ás inecuacións que forman o sistema, como veremos no exemplo.

Exemplo: Resolver la inecuación $\frac{x-3}{x+2} > 6$

Solución: Como temos un cociente ao traspoñer ao segundo membro o denominador $x + 2$ e como é unha inecuación, hai que ter en conta o seu signo co que temos dúas situacións:

a) Se $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$; mantense o signo da desigualdade ao pasar $x + 2$ ao segundo membro.

Trasponse $x + 2 > 0$ ao segundo membro: $x - 3 > 6(x + 2)$

Quítase paréntese: $x - 3 > 6x + 12$

Traspóñense termos e simplifícase: $-5x > 15$

Despéxase x : $x < -3$

Isto non é posible xa que a solución obtida $x < -3$ é incompatible con $x > -2$.

8.2. Inecuacións lineais con dúas incógnitas

Se unha desigualdade despois de transformacións equivalentes se expresa simplificada baixo a forma $y > ax + b$ ou con calquera dos signos (B , $<$, A) estamos ante unha **inecuación lineal con dúas incógnitas**.

A recta $y = ax + b$ divide ao plano en dous semiplanos; os puntos do semiplano que fai verdadeira a desigualdade $y > ax + b$ serán as solucións da devandita inecuación. Vexamos un exemplo.

Exemplo: Resolver a inecuación $4x + 2y > 6$.

Transfórmase a inecuación: $y > -2x + 3$

A recta $y = -2x + 3$ divide ao plano nos semiplanos: I e II, un deles é a solución.

Para determinar cal deles é a solución tomamos un punto sinxelo dun deles, por exemplo a orixe de coordenadas $(0, 0)$ e substituímos na inecuación:

$$0 + 0 = 6$$

Como a desigualdade é falsa, o punto $(0, 0)$ non é a solución; a solución será a rexión I que non contén o punto mencionado.

