

# 3

## Polinomios e fraccións alxébricas

### ÍNDICE DE CONTIDOS

<b>1. POLINOMIOS. VALOR NUMÉRICO</b>	<b>1</b>
1.1. Valor numérico	2
<b>2. OPERACIÓNS CON POLINOMIOS</b>	<b>3</b>
2.1. Suma e resta de polinomios.	3
2.2. Multiplicación de polinomios.	5
2.3. División de polinomios.	6
<b>3. DIVISIÓN DUN POLINOMIO POR <math>(x - a)</math>: REGRA DE RUFFINI</b>	<b>8</b>
3.1. Teorema do resto.	10
3.2. Teorema do factor.	11
<b>4. DIVISIBILIDADE DE POLINOMIOS.</b>	<b>11</b>
4.1. Raíces dun polinomio.	12
4.2. Raíces enteiras dun polinomio.	12
<b>5. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.</b>	<b>13</b>
5.1. M C D e M C M de dous polinomios.	15
<b>6. FRACCIÓNS ALXÉBRICAS.</b>	<b>15</b>
6.1. Suma e resta de fraccións.	16
6.2. Multiplicación e división de fraccións alxébricas.	17

Un polinomio é unha expresión alxébrica na que as letras e os números están sometidos ás operacións de sumar, restar e multiplicar. Os polinomios, que serán obxecto de estudo esta Unidade poden ser do tipo seguinte: Area de un triángulo:  $A = \frac{1}{2} b \cdot h$ , volumen de un cilindro:  $V = \pi r^2$ , Suma de las potencias sucesivas de un número:  $P = n + n^2 + n^3 + n^4$

Nesta Unidade didáctica estudaranse as operacións de suma, resta, multiplicación e división de polinomios, ademais da descomposición destes en produto de factores irreducibles.

A división de polinomios como a división entre números enteiros pode ser exacta (resto cero), en cuxo caso se di que o dividendo é un múltiplo do divisor, ou enteira (resto distinto de cero).

# 1. Monomios. Polinomios. Valor numérico

Chámase monomio a unha expresión alxebrica composta de números e letras no que as únicas operacións que aparecen son o produto e a potencia de expoñente natural, son expresións do tipo seguinte:

$$5x^3 \text{ ó } 4ab^2$$

Ao número chámasele coeficiente, á parte literal indeterminada ou variable e ao expoñente de dita variable grao do monomio. Se na expresión aparecen varias variables, o grao obtense sumando todos os expoñentes.

Chámanse monomios semellantes a aquelas expresións que só difiren no coeficiente.

**Un polinomio é unha expresión alxebrica composta pola suma ou diferenza de varios monomios que non sexan semellantes:**

$$3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 7$$

- Os distintos sumandos que forman o polinomio son os seus **termos**.
- Cada termo está formado **por un número** ou polo **produto dun número pola variable ou indeterminada** elevada a algunha potencia.
- O termo numérico chámase **termo** independente, e o expoñente do termo de maior grao é o **grao do polinomio**.
- O polinomio anterior ten 4 termos, o seu termo independente é 7 e o seu grao é 3.
- Os polinomios reciben nome polo número de termos; por exemplo,
  - **Monomio**: se ten un termo.
  - **Binomio**: se ten dous termos.
  - **Trinomio**: se ten tres termos.

As ideas anteriores permiten definir:

**Un polinomio é unha expresión na que interveñen sumas e restas de multiplicacións de números por potencias da variable.**

## 1.1. Valor numérico

Dado o polinomio  $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$ . Chámase valor **numérico do polinomio**  $p(x)$  para  $x=3$ , ao número que resulta ao substituír  $x$  por 3; é dicir,

$$p(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 8 = 25$$

**O valor numérico do polinomio  $P(x)$  para  $x = a$  determínase ao substituír no polinomio  $x$  por  $a$ .**

### Exemplos:

1. Indica o grao e o termo independente dos polinomios seguintes:

a)  $3x^4 - 6x^2 + 8x - 12$ ;    b)  $2x^5 + 5x - 15$ ;    c)  $5x^3 - 6x + 17$ ;    d)  $6x^2 + 12x - 18$

**Solución:**

Grao: de a) catro; de b) cinco; de c) tres; de d) dous.

Termo independente: de a) -12; de b) -15; de c) +17; de d) -18

2. Calcula o valor numérico do polinomio  $q(x) = 3x^4 + 4x^2 - 6x + 7$ ; para  $x=2$  e  $x=-1$ .

**Solución:**

Para  $x=2$ ;  $q(2) = 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 7 = 48 + 16 - 12 + 7 = 59$

Para  $x=-1$ ;  $q(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 7 = 3 + 4 + 6 + 7 = 20$

## 2. Operacións con polinomios

Nos apartados seguintes trataremos diferentes operacións con polinomios dunha indeterminada.

### 2.1. Suma e resta de polinomios

#### ***Suma e resta de monomios***

Súmanse e réstanse monomios de igual grao ou semellantes; sumando ou restando os seus coeficientes; exemplos:

a)  $(4x^2) + (5x^2) = 9x^2$ ; b)  $(12x^4) - (7x^4) = 5x^4$ ; c)  $(3x^4) + (2x^3) = 3x^4 + 2x^3$

Nos exemplos a) e b) simplificáronse; no c), como os monomios non son semellantes, non se puido simplificar e déixase a suma indicada.

#### ***Suma e resta de polinomios***

Para sumar polinomios agrúpanse os monomios de igual grao ou semellantes. Para restar polinomios súmase ao minuendo o oposto do subtraendo; vexamos uns exemplos:

**Sumar:**  $(3x^4 + 6x^3 - 4x + 19) + (3x^3 - 5x^2 + 8x - 14) = (3x^4) + (6x^3 + 3x^3) + (-5x^2) + (-4x + 8x) + (19 - 14) = 3x^4 + 9x^3 - 5x^2 + 4x + 5$

**Restar:**  $(3x^4 + 6x^3 - 4x + 19) - (3x^3 - 5x^2 + 8x - 14) = (3x^4 + 6x^3 - 4x + 19) + (-3x^3 + 5x^2 - 8x + 14) = (3x^4) + (6x^3 - 3x^3) + (5x^2) + (-4x - 8x) + (19 + 14) = 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 12x + 33$

### Exemplos:

1. Calcula : a)  $3x^4 - 2x^4$  b)  $1/5 a^4 + 3/5 a^4$  c)  $2/3 y^5 - 1/4 y^3$

**Solución:**

a)  $3x^4 - 2x^4 = (3-2)x^4 = x^4$  b)  $1/5 a^4 + 3/5 a^4 = (1/5 + 3/5) a^4 = 4/5 a^4$

c) os monomios non son semellantes e non se poden simplificar.

2. Calcula: a)  $(13x^3 - 6x + 5) + (4x^3 + 7x^2 + 11x + 9)$ ; b)  $(3x^3 + 9x^2 - 6x + 7) - (3x^2 + 7x - 3)$

**Solución:**

a)  $(13x^3 - 6x + 5) + (4x^3 + 7x^2 + 11x + 9) = (13x^3 + 4x^3) + 7x^2 + (-6x + 11x) + (5 + 9) = 17x^3 + 7x^2 + 5x + 14$ .

b)  $(3x^3 + 9x^2 - 6x + 7) - (3x^2 + 7x - 3) = (3x^3 + 9x^2 - 6x + 7) + (-3x^2 - 7x + 3) = 3x^3 + (9x^2 - 3x^2) + (-6x - 7x) + (7 + 3) = 3x^3 + 6x^2 - 13x + 10$ .

## 2.2. Multiplicación de polinomios

### *Multiplicación de monomios*

O produto de dous monomios é outro monomio, cuxo coeficiente é o produto dos coeficientes dos monomios factores e o grao é suma dos seus graos; exemplo:

**Multiplicar:**  $(5x^3)(3x^2) = (5 \cdot 3)(x^3 \cdot x^2) = 15x^{3+2} = 15x^5$

**O produto de dous monomios é outro monomio, de grao suma dos graos dos factores.**

### *Multiplicación dun monomio por un polinomio*

Para multiplicar un monomio por un polinomio multiplícase o monomio por cada un dos monomios do polinomio factor; exemplo:

**Multiplicar:**

$3x^2(2x^3 - 3x^2 + 7x - 9) = (3x^2)(2x^3) + (3x^2)(-3x^2) + (3x^2)(7x) + (3x^2)(-9) = 6x^5 - 9x^4 + 21x^3 - 27x^2$

**O grao do polinomio produto dun monomio por un polinomio é a suma dos graos do monomio e do polinomio.**

### **Factor común**

A operación inversa de multiplicar un polinomio por un monomio chámase sacar factor común; exemplo, sacar factor común  $3x^2$  no polinomio produto anterior.

**Factor común:**  $6x^5 - 9x^4 + 21x^3 - 27x^2 = 3x^2(2x^3 - 3x^2 + 7x - 9)$

### **Multiplicación de polinomios**

Para multiplicar dous polinomios multiplícase cada monomio do primeiro factor por cada monomio do segundo factor; exemplo:

**Multiplicar:**

$$(3x^4 - 5x - 8)(2x^2 + 5) = 3x^4(2x^2 + 5) - 5x(2x^2 + 5) - 8(2x^2 + 5) = 6x^6 + 15x^4 - 10x^3 - 25x - 16x^2 - 40 = 6x^6 + 15x^4 - 10x^3 - 16x^2 - 25x - 40$$

Disposición práctica:

$$\begin{array}{r} 3x^4 \qquad \qquad - 5x \quad - 8 \\ \hline \qquad \qquad \qquad 2x^2 \qquad \qquad + 5 \\ \hline 6x^6 \qquad 15x^4 \qquad - 10x^3 \quad - 16x^2 \quad - 25x \quad - 40 \\ \hline 6x^6 \quad + 15x^4 - 10x^3 - 16x^2 - 25x - 40 \end{array}$$

**O grao do polinomio produto é a suma dos graos dos polinomios factores.**

### **Exemplos**

1. Multiplica: a)  $(5x^3)(9x^5)$       b)  $(2/3x^2)(3/5x^4)$       c)  $(3,5x^2)(2,8)x^5$

**Solucion:**

a)  $45x^8$       b)  $2/5 x^6$       c)  $9,8x^7$

2. Calcula: a)  $3x^2(4x^3 - 6x^2 + 14)$ ; b)  $(2/3x^2)(8x^3 - 6x + 3)$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x^2(4x^3 - 6x^2 + 14) &= 3x^2 \cdot 4x^3 + 3x^2(-6x^2) + 3x^2 \cdot 14 = \\ &= 12x^5 - 18x^4 + 42x^2; \end{aligned}$$

$$\text{b) } (2/3x^2)(8x^3 - 6x + 3) = (2/3x^2)(8x^3) + (2/3x^2)(-6x) + (2/3x^2)(3) = 16/3x^5 - 4x^3 + 2x^2$$

3. Sacar factor común: a)  $4x^4 - 6x^3 + 2x^2$ ; b)  $9x^4 + 12x^3 - 15x$ .

**Solución:**

O termo  $2x^2$  é factor común en todos os sumandos en a) polo tanto,

$$\text{a) } 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 = 2x^2(2x^2 - 3x + 1).$$

O termo  $3x$  é factor común en todos os sumandos en b polo tanto,

$$b) 9x^4 + 12x^3 - 15x = 3x(3x^3 + 4x^2 - 5)$$

4. Calcula: a)  $(2x^3 + 4x^2 - 8x + 7)(3x^2 - x + 6)$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} a) (2x^3 + 4x^2 - 8x + 7)(3x^2 - x + 6) &= 2x^3(3x^2 - x + 6) + 4x^2(3x^2 - x + 6) - \\ &- 8x(3x^2 - x + 6) + 7(3x^2 - x + 6) = 6x^5 - 2x^4 + 12x^3 + 12x^4 - 4x^3 + 24x^2 \\ &- 24x^3 + 8x^2 - 48x + 21x^2 - 7x + 42 = 6x^5 + (-2x^4 + 12x^4) + (12x^3 - 4x^3 - 24x^3) \\ &+ (24x^2 + 8x^2 + 21x^2) + (-48x - 7x) + 42 = 6x^5 + 10x^4 - 16x^3 + 53x^2 - 55x + 42 \end{aligned}$$

## 2.3. División de polinomios

### ***División de monomios***

O cociente de dous monomios se o grao do monomio dividendo é maior que o grao do monomio divisor, é outro monomio que ten por coeficiente o cociente dos coeficientes do monomio entre o monomio divisor e o seu grao é a diferenza dos graos dos monomios que se dividen:

$$\frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b}x^{m-n}$$

$$\text{Exemplos: a) } (32x^6)/(8x^4) = 32/8 (x^6:x^4) = 4x^2$$

$$b) (4x^2)/2x = 4/2 (x^2/x) = 2x$$

### ***División de polinomios***

No exemplo resolto aparecen os pasos que se deben seguir para dividir dous polinomios.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Dividir os polinomios: } D(x) &= 6x^5 + 8x^4 - x^3 + 8x^2 + 6x + 7 \\ y \quad d(x) &= 2x^3 - x + 3. \end{aligned}$$

Antes de comezar a división ordénanse os polinomios de maior a menor grao e déixanse os ocos dos termos que faltan no divisor, como se indica a continuación:

$$\begin{array}{r}
 6x^5 + 8x^4 - x^3 + 8x^2 + 6x + 7 \quad | \quad 2x^3 - x + 3 \\
 \underline{- 6x^5 \quad + 3x^3 - 9x^2} \qquad \qquad \qquad 3x^2 + 4x + 1 = c(x) \\
 1^\circ \text{ Resto} \quad \quad \quad + 8x^4 + 2x^3 - x^2 + 6x + 7 \\
 \underline{- 8x^4 \quad + 4x^2 - 12x} \\
 2^\circ \text{ Resto} \quad \quad \quad 2x^3 + 3x^2 - 6x + 7 \\
 \underline{- 2x^3 \quad + x - 3} \\
 \text{Resto} \quad \quad \quad 3x^2 - 5x + 4 = r(x)
 \end{array}$$

1º Divídese o monomio de maior grao do dividendo entre o monomio de maior grao do divisor:  $(6x^5) : (2x^3) = 3x^2$ ; este é o primeiro monomio do cociente.

2º Multiplícase o monomio cociente polo polinomio divisor; vanse cambiando os signos dos monomios resultantes, colócanse baixo o dividendo e a continuación súmanse.

3º O resultado da suma  $(8x^4 + 2x^3 - x^2 + 6x + 7)$  é o primeiro resto.

Ségúense os pasos anteriores 1, 2, e 3; os restos sucesivos serán os novos divisores ata conseguir un resto de grao inferior ao divisor, que será o resto da división.

**O grao do polinomio cociente é a diferenza entre os graos do dividendo e do divisor:**

$$\begin{aligned}
 &\text{grao de } c(x) = \text{grao de } D(x) - \text{grao de } d(x) \\
 &\text{O grao do resto é menor que o grao do divisor:} \\
 &\text{grao de } r(x) < \text{grao de } d(x)
 \end{aligned}$$

### ***División enteira e división exacta***

No exemplo anterior, a división de  $D(x)$  (dividendo) entre  $d(x)$  (divisor), obtivéronse dous polinomios;  $c(x)$  (cociente) e  $r(x)$  (resto). Cúmrese:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x) \quad \text{O ben} \quad D(x)/d(x) = c(x) + r(x)/d(x)$$

Se ao realizar a división de dous polinomios se obtén un cociente e un resto non nulo a división é **enteira**.

Se ao realizar a división o resto é cero a división é **exacta**.





### Disposición práctica:

Observa os coeficientes do cociente e o resto e comprenderás que a seguinte disposición facilita os cálculos.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -6 & +5 & +7 \\
 2 & & 2 \cdot 2 & -6 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 & 5 \cdot 2 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 \\
 \hline
 & 2 & (-6 + 2 \cdot 2) = -2 & (5 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2) = 1 & (7 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3) = 9
 \end{array}$$

Os números 2, -2 e 1 son os coeficientes do polinomio cociente; o último número 9 é o resto da división, a esta disposición practica chámase Regla **de Ruffini**.

A disposición anterior pódese simplificar como segue:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -6 & 5 & 7 \\
 2 & & 4 & -4 & 2 \\
 \hline
 & 2 & -2 & 1 & 9
 \end{array}$$

**Cociente e Resto**

A partir dos datos da disposición práctica simplificada escríbense o cociente e o resto da división tendo en conta:

- O grao do cociente é unha unidade menor que grao do divisor; no noso exemplo o grao do cociente será dous e escríbese:  $2x^2 - 2x + 1$ .
- O grao do resto é cero; polo tanto, un número: **9**

### Exemplos:

1. Calcula mediante a Regra de Ruffini o cociente e o resto das divisións seguintes:

a)  $(3x^3 - 6x + 8) : (x + 3)$ ;    b)  $(2x^2 - 8x + 9) : (x - 3)$

#### Solución:

Ao realizar a disposición práctica, débense poñer ceros nos termos que non figuran no divisor e cámbiase de signo o termo independente do divisor.

a)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & 0 & -6 & 8 \\
 -3 & & -9 & 27 & -63 \\
 \hline
 & 3 & -9 & 21 & -55
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|rr}
 & 2 & -8 & 9 \\
 3 & & 6 & -6 \\
 \hline
 & 2 & -2 & 3
 \end{array}$$

a) Cociente:  $3x^2 - 9x + 21$ . Resto: -55

b) Cociente:  $2x - 2$ . Resto: 3

## 3.1. Teorema do resto

O resto da división tanto na disposición usual coma na regra de Ruffini vén dado pola expresión  $(7 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3) = 9$ , que coincide co valor numérico do polinomio  $2x^3 + x^2 + 5x + 7$  para  $x = 2$ . A xeneralización deste resultado xeneralizado chámase Teorema do Resto que di:

**O resto da división dun polinomio por  $x - a$  é igual ao valor numérico do devandito polinomio para  $x = a$ ; é dicir,  $P(a) = r$ .**

Con este teorema e os coñecementos anteriores tes dúas formas de calcular o valor numérico dun polinomio.

- **Substituír  $x$  por  $a$  no polinomio e efectuar os cálculos.**
- **Dividir o polinomio polo binomio  $x - a$  e o resto será o valor numérico para  $x = a$ .**

**Demostración:** Se ao polinomio  $p(x)$  divídeselle polo binomio  $x - a$ , obtense un cociente  $c(x)$  e un resto  $r$  (que é un número). A propiedade da división permite escribir:  $p(x) = c(x)(x-a) + r$

O valor numérico do polinomio para  $x = a$ , conséguese substituíndo  $x$  por  $a$ , resulta:  $p(a) = c(a)(a-a) + r$

Opérase:  $\longrightarrow p(a) = c(a) \cdot 0 + r$

O produto por cero é cero:  $\longrightarrow p(a) = 0 + r$

Simplifícase:  $\longrightarrow p(a) = r$

### Exemplo:

1. Calcula mediante divisións o valor numérico do polinomio  $q(x) = x^4 - 4x^2 + 6x - 9$ , para  $x = 2$ . Comproba que o valor obtido é correcto.

**Solución:** Divídese  $q(x)$  entre  $(x - 2)$  e o resto será  $q(2)$ .

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -4 & 6 & -9 \\ & & 2 & 4 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 6 & 3 = \text{Resto} = q(2) \end{array}$$

Comprobación:  $q(2) = (2)^4 - 4 \cdot (2)^2 + 6 \cdot 2 - 9 = 3$

## 3.2. Teorema do factor

Se ao efectuar a división do polinomio  $p(x)$  polo binomio  $(x - a)$  o resto resulta 0; a división é exacta, o que permite escribir:  $p(x) = (x - a) c(x)$

**Demostración:**

Como a división é exacta ten que:  $p(x) = (x - a) \cdot c(x)$

Para  $x = a$ ; cúmprese:  $p(a) = (a - a) \cdot c(a) = 0 \cdot c(a) = 0$ .

A este resultado chámase **teorema do factor**.

**Exemplo:**

1. Comproba que a división de  $p(x) = (2x^3 + 3x^2 - 4x + 15)$  entre  $(x + 3)$  é exacta.

- Escribe o dividendo como produto de factores.
- Cal é o valor numérico do dividendo para  $x = -3$ ?

**Solución:**

Aplicase a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -3 & 2 & 3 & -4 & 15 \\
 & & -6 & 9 & -15 \\
 \hline
 & 2 & -3 & 5 & 0 = \text{Resto}
 \end{array}$$

a)  $2x^3 + 3x^2 - 4x + 15 = (x + 3)(2x^2 - 3x + 5)$

b) Polo teorema do resto o valor numérico do dividendo para  $x = -3$  é cero;  $p(-3) = 0$

## 4. Divisibilidade de polinomios

A divisibilidade de polinomios estúdase de forma análoga á divisibilidade entre números enteiros que xa coñeces, como veremos a continuación.

Se a división  $D(x) : d(x)$  é exacta, como no caso dos números enteiros dise, que  $D(x)$  é un múltiplo de  $d(x)$  ou ben que  $d(x)$  é divisor ou factor de  $D(x)$ .

Un polinomio é **composto** se admite polinomios divisores de grao superiores ou iguais a un; o polinomio  $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$  é un polinomio composto.

Un polinomio é **primo ou irreducible** se non admite polinomios divisores de grao un ou superior; os polinomios  $2x + 5$  e  $x^2 + 1$  son polinomios irreducibles; polo tanto os polinomios irreducibles poden ser de primeiro ou segundo grao.

**Os polinomios compostos pódense descompoñer de forma única en produto de polinomios irreducibles.**

Nos apartados que seguen veremos diversas formas de realizar esta descomposición.

## 4.1. Raíces dun polinomio

**Dise que un número  $a$  é raíz do polinomio  $p(x)$  se  $p(a) = 0$ . As raíces do polinomio son  $p(x)$  son as solucións da ecuación  $p(x) = 0$ .**

Polo teorema do factor se  $a$  é raíz do polinomio significa que  $x - a$  é un divisor de  $p(x)$ ; isto é:  $p(x) = (x - a) \cdot c(x)$

Podes preguntar, cantas raíces ten un polinomio? como calculalas? A resposta á primeira pregunta atópase no teorema seguinte, que é obxecto de demostración en cursos superiores:

**Nun polinomio de grao  $n$  débense buscar como máximo  $n$  raíces reais.**

Para comprender o seu significado vemos algúns exemplos; o polinomio:

$p(x) = x^2 - 4$ ; ten dúas raíces  $x = 2$  e  $x = -2$  e o polinomio:  $p(x) = x^2 + 4$ , non ten raíces reais, e o resultado non contradí o teorema.

Mediante métodos alxébricos calcúlanse con facilidade as raíces enteiras de polinomios con coeficientes enteiros como se indica no apartado seguinte.

## 4.2. Raíces enteiras dun polinomio

Moitos polinomios cos que traballamos teñen coeficientes enteiros; vexamos que para estes polinomios as raíces enteira son divisores do termo independente. Realicemos a división exacta ( $x^3 - 6x^2 + 14x - 15$ ): ( $x - 3$ ) e comprobaremos que  $x = 3$  é raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -6 & 14 & -15 \\ & & 3 & -9 & 15 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}$$

Os números da última columna -15 e 15 son opostos; -15 é múltiplo de 3 e 3 é divisor de -15, polo que escribimos:  $x^3 - 6x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(x^2 - 3x + 5)$ .

A xeneralización afirma:

**Se un polinomio é divisible por  $x - a$ , a raíz enteira  $a$  atópase entre os divisores do termo independente.**

**Exemplo:**

1. Calcula as raíces enteira do polinomio  $p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$  e descompón o polinomio en produto de factores.

**Solución:**

As posibles raíces atopan entre os divisores de  $9 = \{1, 3\}$  Aplícase a regra de Ruffini ao polinomio e aos sucesivos cocientes:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -9 & 9 \\
 3 & & 3 & 6 & -9 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -3 & 0 \\
 -3 & & -3 & 3 & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0 & \\
 1 & & 1 & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & & 
 \end{array}$$

As raíces do polinomio son  $x=3$ ,  $x=-3$  e  $x=1$ ; e polas sucesivas divisións o polinomio descomponse nos produtos seguintes:

$$p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(x + 3)(x - 1)$$

Dende esta descomposición localízanse con facilidade as raíces do polinomio.

## 5. Factorización de polinomios

Trátase de substituír un polinomio por outro igual pero escrito como produto de polinomios irreducibles. Para obter éxito débense utilizar diversas estratexias, como se indica nos seguintes exemplos.

### Exemplos:

1.Descompoñer en factores o polinomio  $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ .

#### Solución 1:

Búscanse as posibles raíces enteiras, que se atopan entre os divisores de -6; isto son  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ .

Aplicase a regra de Ruffini ao polinomio e aos sucesivos cocientes e obtéñense as súas raíces que son:  $x = -1$ ;  $x=2$  e  $x = -3$ .

A descomposición do polinomio en produto de polinomios irreducibles será:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

#### Solución 2:

Búscase unha raíz mediante a regra de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 1 & -6 \\
 -1 & & -1 & 5 & 6 \\
 \hline
 & 1 & -5 & 6 & 0
 \end{array}$$

O polinomio divisor pódese escribir:  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$ ; como o cociente é un polinomio de segundo grao, as súas raíces son as da ecuación de segundo grao  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

A descomposición sería:  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$ .

2. Descompoñer en factores o polinomio  $q(x) = 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 6x^2$ .

### Solución:

Combínanse os procedementos de sacar factor común e o cálculo de raíces enteiras.

- Sácase factor común  $3x^2$ :  $q(x) = 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x^3 - 2x^2 + x - 2)$ .
- As raíces enteiras do polinomio  $x^3 - 2x^2 + x - 2$ , atópanse entre os divisores do 2 e son  $\{1, 2\}$ .

	1	- 2	1	- 2
2		2	0	2
	1	0	1	0

O polinomio  $x^3 - 2x^2 + x - 2$ , descomponse  $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$ , como  $x^2 + 1$  é irreducible, a descomposición de  $q(x)$  será:

$$q(x) = 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 6x^2 = 3x^2(x^3 - 2x^2 + x - 2) = 3x^2(x - 2)(x^2 + 1)$$

3. Descompoñer en produtos: a)  $x^2 + 8x + 16$  b)  $4x^2 - 12x + 9$  c)  $16x^2 - 9$ .

### Solución:

Estes polinomios descompóñense recordando as seguintes igualdades notables:

Cadrado dunha suma:  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ .

Cadrado dunha diferenza:  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ .

Suma por diferenza:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

Tendo en conta esta igualdades resulta:

a)  $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ ; b)  $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ ; c)  $16x^2 - 9 = (4x + 3)(4x - 3)$ .

## 5.1. M C D e M C M de dous polinomios

Como nos números enteiros defínese e calcula o máximo común divisor e mínimo común múltiplo de dous polinomios.

O **máximo común divisor**  $d(x)$  de dous polinomios  $p(x)$  e  $q(x)$  é o polinomio de maior grao que é divisor de ambos os dous. **M C D**  $[p(x), q(x)] = d(x)$

Para calcular o máximo común divisor de dous polinomios descompóñense en factores primos e fórmase o produto dos factores comúns cos seus menores expoñentes.

O **mínimo común múltiplo**  $m(x)$  de dous polinomios  $p(x)$  e  $q(x)$  é o polinomio de menor grao que é múltiplo de ambos os dous. **M. C. M.**  $[p(x), q(x)] = m(x)$

Para calcular o mínimo común múltiplo de dous polinomios descompóñense en factores primos e fórmase o produto dos factores comúns e non comúns cos seus maiores expoñentes.

**Exemplo:**

1. Calcula o M.C.D. e o M.C.M. dos polinomios  $p(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2+1)$  y  $q(x) = (x-2)(x-1)^2(x+5)$

**Solución:**

Para calcular o máximo común divisor tómanse os factores comúns con menor expoñente; por iso: **M.C.D**  $[p(x), q(x)] = (x-2)(x-1)$

O mínimo común múltiplo é o produto dos factores comúns e non comúns con maior expoñente; por iso **M.C.M**  $[p(x), q(x)] = (x-2)^2(x-1)^2(x+5)(x^2+1)$

## 6. Fraccións alxébricas

As fraccións numéricas pódense considerar como o cociente de dous números enteiros; da mesma forma chamamos fracción alxébrica ao cociente de dous polinomios.

Son fraccións alxébricas as seguintes:

$$a) \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x - 4}; \quad b) \frac{10}{x^2 - 1}$$

**Chámase fracción alxébrica ao cociente de dous polinomios:**

### ***Simplificación de fraccións***

Para simplificar fraccións divídese o numerador e o denominador polo mesmo polinomio.

Exemplos:

a)  $\frac{6x^2 + 5x}{3x^2} = \frac{x(6x + 5)}{3x^2} = \frac{6x + 5}{3x}$

b)  $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 6} = \frac{(x + 3)(x + 1)}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2}$

### ***Fraccións equivalentes***

Dúas fraccións alxébricas son equivalentes se unha se obtén da outra por simplificación; ou cando ao simplificalas, dan lugar á mesma fracción.

As fraccións alxébricas  $\frac{x+2}{x^2+x-2}$  y  $\frac{3x}{3x^2-3x}$  son equivalentes xa que  
ao simplificalas obtense a mesma fracción  $\frac{1}{x-1}$

## **6.1. Suma e resta de fraccións**

- Para sumar fraccións alxébricas transfórmanse os sumandos en fraccións equivalentes co mesmo denominador se é que eran diferentes; déixase o denominador común e súmanse os numeradores.
- Para restar dúas fraccións súmase ao minuendo o oposto do subtraendo.

**Exemplos:**

1. Calcula

$$\frac{2x+4}{x^2+5} + \frac{5}{x^2+5}$$

**Solución:**

Como as fraccións teñen o mesmo denominador súmanse os numeradores

$$\frac{2x+4}{x^2+5} + \frac{5}{x^2+5} = \frac{2x+9}{x^2+5}$$

2. Calcula

$$\frac{3x+4}{x^2-9} + \frac{2x+1}{x^2-3x}$$



**Solución:**

Como teñen distinto denominador calcúlanse fraccións equivalentes con denominador o mínimo común múltiplo dos denominadores.

Descompóñense os denominadores en produtos:

$$x^2-9 = (x+3)(x-3) \text{ e } x^2-3x = x(x-3).$$

O mínimo común múltiplo é:  $x(x+3)(x-3)$

$$\begin{aligned} \frac{3x+4}{x^2-9} + \frac{2x+1}{x^2-3x} &= \frac{(3x+4)x}{x(x+3)(x-3)} + \frac{(2x+1)(x+3)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{3x^2+4x+2x^2+6x+x+3}{x(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{5x^2+11x+3}{x(x-3)(x+3)} \end{aligned}$$

3. Calcula

**Solución:**

Teñen o mesmo denominador; polo tanto, déixase e réstanse os numeradores.

$$\frac{3x}{x^2+2} - \frac{2x-4}{x^2+2} = \frac{3x}{x^2+2} - \frac{2x-4}{x^2+2} = \frac{3x-(2x-4)}{x^2+2} = \frac{x+4}{x^2+2}$$

## 6.2. Multiplicación e división de fraccións alxébricas

Para multiplicar dúas fraccións ponse por numerador o produto de os numeradores e por denominador o produto dos denominadores.

Para dividir fraccións multiplícase o dividendo polo inverso do divisor.

1. Calcula:  $\frac{x+3}{2x-1} \cdot \frac{x-2}{x+1}$

**Solución:**

$$\frac{x+3}{2x-1} \cdot \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x+3)(x-2)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{x^2+3x-2x-6}{2x^2-x+2x-1} = \frac{x^2+x-6}{2x^2+x-1}$$

2. Calcula:  $\frac{x^2}{x+3} : \frac{x-2}{x+4}$

**Solución:**

$$\frac{x^2}{x+3} : \frac{x-2}{x+4} = \frac{x^2}{x+3} \cdot \frac{x+4}{x-3} = \frac{x^2(x+4)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^3+4x}{x^2-9}$$