

UNIDADE 1 - OS NUMEROS REAIS

1 Números naturais e números enteiros

Os números naturais son os primeiros números coñecidos polo home e deben o seu descubrimento á necesidade de contar. Os números naturais simbolízanse pola letra N e os seus elementos son:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

O número cero foi un descubrimento posterior aos números naturais, na numeración romana non existe, e a súa invención atribúese aos hindús que o incluíron no seu sistema de numeración. O sistema de numeración hindú, perfeccionado polos árabes, é o que actualmente empregamos. A pesar da dubidosa natureza do cero consideráremolo como un número natural.

A serie inacabable dos números naturais favoreceu, na matemática grega, a intuición do infinito.

Os **números naturais** son insuficientes para resolver moitos problemas e describir novas situacións. Por exemplo, se teño 100 euros pero debo 135, como reflito esta situación debedora? Outras situacións para as que os números naturais son insuficientes son as seguintes: como expresar temperaturas por enriba e por debaixo de cero?, como indicar alturas sobre o nivel do mar e profundidades por debaixo dese nivel?, como reflectir o estado debedor ou acredor dunha conta bancaria?, etc. Estas situacións e os problemas que formulan poden resolverse cos números enteiros.

Os **números enteiros** están constituídos polos naturais, co cero, e os opostos dos números naturais, recorda que un número é oposto doutro se a suma de ambos os dous é cero. Os números enteiros simbolízanse pola letra Z e son:

$$Z = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Os puntos suspensivos invítannos a seguir engadindo números enteiros negativos, pola esquerda, e enteiros positivos, pola dereita.

Nas operacións con números enteiros debemos ter en conta a xerarquía das operacións, recorda:

- 1º Cálculanse as parénteses e corchetes.
- 2º Realízanse as potencias e raíces.
- 3º Multiplicacións e divisións, empezando pola esquerda.
- 4º Sumas e restas. Vexámolo nos exemplos:

Exemplos

1. Calcula : $7 - 6 \cdot (-4) + 3 \cdot (-5)^3 - (9+5-8)^2$

Solución:

$$7 - 6 \cdot (-4) + 3 \cdot (-5)^3 - (9+5-8)^2 = 7 - 6 \cdot (-4) + 3 \cdot (-5)^3 - (6)^2 = 7 - 6 \cdot (-4) + 3 \cdot (-125) - 36 =$$

$$7 + 24 - 375 - 36 = -380$$

2 Calcula: $3 \cdot (-4) - [2 \cdot (-3) - (7 - 2^3)] + (9 - 12 : (-3))$

Solución: $3 \cdot (-4) - [2 \cdot (-3) - (7 - 2^3)] + (9 - 12 : (-3)) = 3 \cdot (-4) - [-6 - (7 - 8)] + (9 + 4) =$
 $-12 - [-6 + 1] + 13 = -12 + 5 + 13 = 6$

2. Números racionais

Non todas as situacións se poden describir con números enteiros. Como indicar a metade de algo ou a súa terceira parte? Para facer isto temos que recorrer aos números fraccionarios ou fraccións. A fracción $1/4$ indica a cuarta parte da unidade e $3/4$ é un número que contén tres veces á cuarta parte da unidade

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

mentras $7/4$ é un número que contén sete veces a cuarta parte da unidade.

Tamén a división $3:4 = (1 + 1 + 1) : 4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ da o mesmo resultado por esta razón a fracción $3/4$ pódese considerar indistintamente como tal fracción ou como unha división indicada $3:4$. Logo, toda fracción é un cociente indicado. Se unha fracción ten o numerador (dividendo) múltiplo do denominador (divisor) o resultado é un número enteiro. Á fracción $-12/4$ correspóndelle o enteiro -3 .

En consecuencia, chamamos conxunto dos **números racionais**, e o simbolizámolo pola letra Q, ao conxunto de todas as fraccións o denominador das cales é distinto de cero

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ donde } a \text{ e } b \text{ son enteiros e } b \neq 0 \right\}$$

Dous números racionais son iguais se teñen os numeradores iguais e os denominadores tamén iguais ou, se tendo distintos numeradores e denominadores, conducen ao mesmo cociente. $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$ son iguais porque conducen ao mesmo cociente

Neste último caso, dise tamén que as fraccións son equivalentes, e a propiedade fundamental das fraccións equivalentes é que os produtos cruzados son iguais; é dicir,

$$\text{se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ enton } a \cdot d = b \cdot c$$

Nas fraccións equivalentes $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}$ cúmprese a propiedade fundamental porque se

$$\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6}, \text{ entón } (-2) \cdot (-6) = 3 \cdot 4 = 12$$

Ademais, o conxunto \mathbb{Q} contén ao conxunto \mathbb{Z} , xa que todo número enteiro a é igual que a fracción $\frac{a}{1}$

Os números racionais suscitan outra idea do infinito. Ata agora o infinito está asociado á posibilidade de escribir, sen descanso, números enteiros positivos ou negativos, é dicir, desprazarnos á dereita ou á esquerda no conxunto \mathbb{Z} . Non obstante, pódese comprobar, entre dous números racionais calquera existe unha infinidade números racionais.

Exemplos

1. Calcula: $\frac{7}{15} - \frac{3}{20} + \frac{11}{12}$

O m.c.m. dos denominadores, m.c.m. $(15,20,12) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, que será o novo denominador das fraccións, e dividimos 60 entre cada un dos denominadores orixinais e o cociente obtido o multiplicámolo por numeradores respectivos; deste modo obtemos tres fraccións co mesmo denominador cuxa suma é:

$$\frac{7}{15} - \frac{3}{20} + \frac{11}{12} = \frac{7 \cdot 4}{60} - \frac{3 \cdot 3}{60} + \frac{11 \cdot 5}{60} = \frac{7 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 11 \cdot 5}{60} = \frac{74}{60} = \frac{37}{30}$$

Simplificamos a fracción resultante $\frac{74}{60}$ dividindo o numerador e

denominador por 2

2. Calcula: Pola xerarquía das operacións facemos en primeiro lugar as operacións das parénteses. A multiplicación de fraccións conduce a outra fracción que ten como numerador o produto dos numeradores e como denominador o produto dos denominadores. Mentres que o cociente de fraccións é igual que o produto de a primeira pola inversa da segunda, entón

$$\left(\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}\right) = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 12} = \frac{2}{9} \qquad \left(\frac{2}{3} : \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$$

Logo

$$1 + \left(\frac{2}{3} : \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}\right)^2 = 1 + \left(\frac{8}{15}\right)^2 - \left(\frac{2}{9}\right)^2 = 1 + \frac{64}{225} - \frac{4}{81} = \frac{2501}{2025}$$

3. Expresión decimal dun número racional

Se cada fracción ou cada número racional é un cociente indicado, ao efectuar a división resulta un número enteiro ou ben un número decimal. Este número decimal pode ser:

- Un número **decimal exacto**, cando o número de cifras decimais é finito.
- Un número **decimal periódico puro**, cando, inmediatamente despois de a coma, hai unha cifra ou grupo de cifras que se repiten indefinidamente.
- Un número **decimal periódico mixto**, cando hai unha cifra ou grupo de cifras que se repiten, pero non inmediatamente despois da coma.

Fixemos a división entre o numerador e o denominador das seguintes fraccións:

$$\frac{28}{4} = 7; \quad \frac{28}{6} = 4,666 \dots; \quad \frac{28}{5} = 5,6; \quad \frac{28}{15} = 1,86666$$

Obtendo un enteiro, un decimal exacto, un decimal periódico puro e un decimal periódico mixto, e sempre acontece unha destas catro posibilidades, calquera que sexa a fracción.

3.1. Cálculo da fracción xeratriz

Podemos realizar o proceso inverso, dado un decimal achar a fracción que lle corresponde; a esta fracción chámasele **fracción xeratriz**.

A cada enteiro a correspóndelle a fracción $a/1$ ou calquera outra fracción equivalente obtida desta, multiplicando numerador e denominador polo mesmo número.

Para obter as outras fraccións xeratrices, nos outros casos, debemos resolver unha sinxela ecuación.

En primeiro lugar, se o decimal é exacto, por exemplo 5,6, chamando x á fracción buscada,

$$x = 5,6$$

Multiplicamos toda a ecuación pola unidade seguida de tantos zeros como cifras decimais haxa, neste caso 10, despexamos x e simplificamos

$$10x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{10} = \frac{28}{5}$$

En segundo lugar, se o decimal é periódico puro, por exemplo 3,262626..., chamando x á fracción buscada,

$$x = 3,262626 \dots$$

multiplicamos toda a ecuación pola unidade seguida de tantos zeros como cifras ten o período, neste caso 100, e obtemos unha nova ecuación; seguidamente restamos as dúas ecuacións

$$\left. \begin{array}{l} 100x = 326,2626 \dots \\ x = 3,262626 \dots \end{array} \right\} (1^a) - (2^a) \rightarrow 99x = 323$$

Despexando x obtemos a fracción

$$x = \frac{323}{99}$$

En terceiro lugar, se o decimal é periódico mixto, por exemplo 1,86666..., chamando x á fracción buscada,

$$x = 1,866666 \dots$$

multiplicamos toda a ecuación pola unidade seguida de tantos zeros como cifras decimais non periódicas hai, neste caso 10,

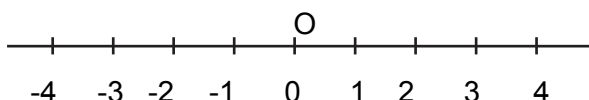
$$10x = 18,666666 \dots$$

Restamos estas dúas últimas ecuacións e despexamos x , e a continuación simplificamos:

$$\left. \begin{array}{l} 100x = 186,666 \dots \\ 10x = 18,6666 \dots \end{array} \right\} (1^a) - (2^a) \rightarrow 90x = 168 \rightarrow x = \frac{168}{90} = \frac{28}{15}$$

4. Representación de números racionais. Recta racional

Para representar os números enteiros sobre unha recta elíxese un punto O chamado orixe e un segmento OU como se indica na figura



Levando sucesivamente o segmento OU á dereita de O situamos os enteiros positivos, polo mesmo procedemento, á esquerda de O , situamos os enteiros negativos. A esta recta chamámoslle recta dos enteiros.

Os números racionais pódense representar sobre a recta dos enteiros, aínda que para iso temos que facer uso do Teorema de Tales. Vexamos como se fai.

Por exemplo, representar a fracción $3/5$.

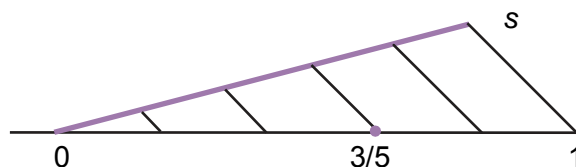
Paso 1: Sobre a recta dos enteiros trazamos unha semirrecta s con orixe no punto O .

Paso 2: Levamos 5 segmentos iguais sobre a semirrecta s .

Paso 3: Unimos o extremo do último segmento trazado sobre s co punto 1.

Paso 4: Trazamos segmentos paralelos ao segmento anterior; dividimos o segmento unidade en 5 partes iguais e tomamos as tres primeiras.

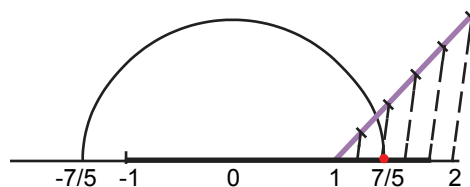
A $3/5$ correspóndelle o punto que debuxamos na figura.



Se quixésemos representar $7/5$, como $\frac{7}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$

sentar $2/5$ tomando como orixe o punto que corresponde ao número 1 sobre a recta dos enteiros, e proceder como no caso anterior.

Se a fracción é negativa, como $-\frac{7}{5}$, correspóndelle tamén un punto sobre a recta, cun compás e centro en O debuxamos o oposto de $\frac{7}{5}$ como vemos na figura.



A recta na que situamos os números racionais chámase recta racional.

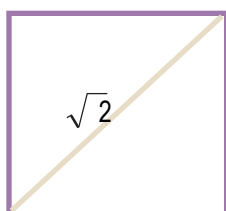
5. Números reais

5.1. Números irracionais

A expresión decimal dos números racionais pode ser exacta, ou ben infinita periódica, pero queda un tipo de expresión decimal sen tratar; esta é a expresión decimal infinita non periódica.

Os números que teñen unha expresión decimal infinita non periódica chámanse **números irracionais**.

Os números 1,232332333...; 0,2020020002... son exemplos de números irracionais, a súa expresión decimal é infinita e non periódica.



Hai números irracionais máis familiares. Se queremos achar a diagonal dun cadrado de lado 1, empregando o teorema Pitágoras, obtemos

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,414213$$

Este número, se nos molestamos en calcular moitos decimais, veremos que ten un número indefinido de decimais e non se repite periodicamente ningún grupo deles. Todas as raíces cadradas de números que non son cadrados perfectos conducen a un número irracional.

Un número irracional moi coñecido é π , lese pi; e, como sabemos, indica a lonxitude da circunferencia cando utilizamos como unidade de medida o seu diámetro. Este número tamén ten infinitas cifras decimais non periódicas e vale $\pi = 3,1415926535897...$

Número irracional é o que ten unha expresión decimal infinita non periódica.

Hai moitos números irracionais, máis que racionais. Neste curso estudaremos outro número irracional, moi importante, chamado simplemente **número e**. Teremos oportunidade de volver atopar este número ao longo do curso.

Numeros reais

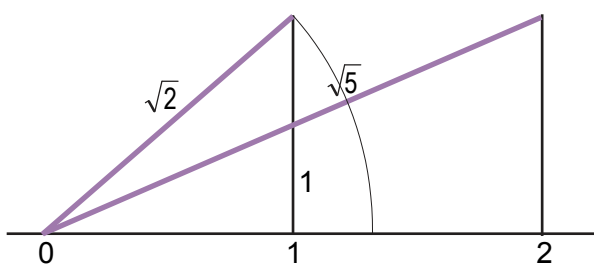
Definimos os **números reais** como o conxunto de números constituídos polos racionais e irracionais; simbolízase mediante a letra R. No esquema seguinte aparecen todos os números que coñecemos ata agora:

$$\text{Números reais} \begin{cases} \text{Irracionais} \\ \text{Racionais} \end{cases} \begin{cases} \text{Fraccionarios} \\ \text{enteros} \end{cases} \begin{cases} \text{Naturais} \\ \text{Enteros negativos} \end{cases}$$

É evidente que todos os naturais son enteiros, todos os enteiros son racionais; e os racionais xunto cos irracionais constitúen o conxunto dos números reais.

5.3. A recta real

Sabemos que a cada número racional lle corresponde un punto sobre a recta racional, e preséntasenos agora unha pregunta: hai máis puntos que números racionais ou hai tantos puntos como números racionais? A resposta é que hai máis puntos que números racionais, e iso pódese comprobar vendo que a cada número irracional se lle pode asociar un punto da recta racional. Non é doado en xeral, aínda que é sinxelo cos números irracionais que se obteñen mediante o teorema de Pitágoras; isto é, os que aparecen baixo a raíz cadrada, como $\sqrt{2}$. Na figura debuxamos como, mediante triángulos rectángulos de hipotenusa $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$, con un compás, podemos asociar un punto a estes números irracionais.

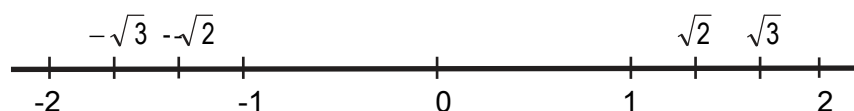


Con procedementos como os anteriores asignamos a cada número real un punto da recta, e admitimos tamén o contrario: a cada punto da recta pódese asignar un número real. É dicir, hai tantos números reais como puntos nunha recta.

6. Valor absoluto e intervalos

6.1. Orde nos números reais

Sobre a recta real da figura están representados algúns números reais.



Estes números aparecen ordenados, os números maiores atopan á dereita dos menores. Hai algún modo de decidir cando un número real é maior que outro, sen necesidade de representalos sobre a recta? Si, e proporcionao a seguinte definición:

Dados dous números reais a e b , dise que $a < b$ se $b - a$ é positivo.

Os exemplos aclaran a definición:

- $1,4 < 1,43$; posto que, $1,43 - 1,4 = 0,03 > 0$; tamén se pode escribir $1,43 > 1,4$.
- $-12 < 4$; posto que $4 - (-12) = 16 > 0$.

6.2. Valor absoluto

Para medir a lonxitude dun anaco da recta real empregamos unha operación chamada **valor absoluto**, e que se define así:

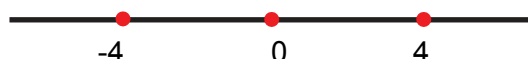
O valor absoluto dun número real positivo é o mesmo. O valor absoluto dun número real negativo é o seu oposto.

Por exemplo, o valor absoluto de 3,14 é 3,14 e o valor absoluto de -3,46 é 3,46.

O valor absoluto dun número a simbolízase por $|a|$ e a definición permite escribir:

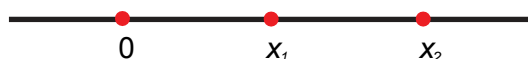
$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a \leq 0 \end{cases}$$

Observa que a expresión $|x| = 4$ é ecuación que ten dúas solucións, $x = 4$ e $x = -4$; as dúas solucións equidistan da orixe. O valor absoluto dun número pódese interpretar como a distancia dese número á orixe.



Este feito permite empregar o valor absoluto para calcular a distancia entre dous puntos ou entre dous números reais.

Chámase distancia entre números, ou dous puntos, da recta real x_1 e x_2 ao valor absoluto da diferenza; isto é $|x_1 - x_2|$



6.3. Intervalos na recta real

Se a e b son dous números reais, chámanse intervalos na recta real ao conxunto de números comprendidos entre a e b . Os números a e b chámanse extremos do intervalo.

Os intervalos poden ser abertos ou pechados:

Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } a < x < b\}$. No intervalo aberto os extremos non pertencen ao intervalo.



Intervalo pechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } a \leq x \leq b\}$. No intervalo pechado os extremos pertencen ao intervalo.



Un intervalo pode ter inicio, pero non fin. Os intervalos deste tipo chámanse **semirrectas de orixe** a , $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$



Tamén hai intervalos que teñen fin, pero non inicio. Estes intervalos chámanse **semirrectas de extremo** a , $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$



As semirrectas poden non conter a súa orixe, nin o seu extremo, en cuxo caso escribiremos $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$ ou $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$.

1. Os intervalos pódense expresar por medio do valor absoluto. Expresar por medio do valor absoluto o intervalo $[2, 14] = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } 2 \leq x \leq 14\}$

Solución:

Realizaremos os seguintes pasos:

Paso 1: Calcúlase o punto medio do intervalo: 8.

Paso 2: Calcúlase a distancia de 8 aos extremos:

$$|2 - 8| = 6 \quad \text{e} \quad |14 - 8| = 6$$

Paso 3: Os puntos do intervalo distan de 8 menos ou igual a 6; isto é

$$|x - 8| \leq 6$$

1. Representar graficamente o intervalo $|x - 5| \leq 2$

Solución:

Este intervalo constitúeno os números cuxa distancia a 5 é menor ou igual que 2.
E os extremos deste intervalo son obviamente: $5 - 2 = 3$ y $5 + 2 = 7$.



Tamén o podemos resolver da definición de valor absoluto

$$|x - 5| \leq 2 \quad \begin{cases} x - 5 \leq 2 \rightarrow x \leq 5 + 2 \rightarrow x \leq 7 \\ -(x - 5) \leq 2 \rightarrow -x + 5 \leq 2 \rightarrow 3 \leq x \end{cases}$$

3. Representa graficamente o conxunto de números que cumpren que $|x - 5| \geq 3$.

Solución:

A inecuación anterior, se aplicamos a definición de valor absoluto, conduce a dúas inecuacións:

$$|x - 5| \geq 3 \quad \begin{cases} x - 5 \geq 3 \rightarrow x \geq 5 + 3 \rightarrow x \geq 8 \\ -(x - 5) \geq 3 \rightarrow -x + 5 \geq 3 \rightarrow -x \geq -2 \end{cases}$$

O conxunto de números que buscamos cumpre as dúas inecuacións:

$$x \geq 8 \text{ e } -x \geq -2,$$

esta última pódese escribir $x \leq 2$. Logo, será o conxunto de números reais que son maiores que 8 ou menores que 2: $(-\infty, 2] \cup [8, \infty)$

Isto é a unión de dúas semirrectas que simbolizamos por \cup ,

7. Aproximación dos números reais

É evidente que un número con infinitas cifras decimais non é doado de manexar.
A non ser que prescindamos da maior parte delas; co cal xa non manexamos o número senón unha aproximación.

Os números pódense aproximar mediante truncamento e redondeo.

Truncamento. Consiste en suprimir as cifras decimais dun número, a partir dunha determinada.

Por exemplo, o número 21,357604081 truncado a partir das sete primeiras cifras significativas, convértese en 21,35760; truncado a partir das catro primeiras cifras queda 21,35 e truncado a partir da parte enteira vale 21.

Redondeo. No redondeo tamén truncamos, pero fixámonos na primeira cifra que se trunca; e segundo sexa o seu valor, aplicaremos a seguinte regra:

- Se esta cifra é menor que cinco a última cifra do número truncado non se cambia.

Por exemplo, o número 31,457264 redondeado a cinco primeiras cifras significativas toma o valor 31,457, porque a primeira que desbotamos é un 2.

- Se a primeira cifra desbotable é cinco ou maior que cinco súmase unha unidade á última do número truncado.

Por exemplo, para redondear o número 31,457264 ás dúas primeiras cifras decimais, trúncase e obtense 31,45 como a primeira cifra desbotable é 7, para redondear súmase unha unidade á última cifra do número truncado, ao 5, e obtense 31,46.

7.1. Erro absoluto e relativo

Dado un número N e unha aproximación de este, n , chamamos **erro absoluto**, e simbolizámolo por E , á diferenza entre o valor do número e a súa aproximación:

$$E = |N - n|$$

Chámase erro relativo, e simbolízase por e , ao cociente entre o erro absoluto e o valor do número:

$$e = \left| \frac{N - n}{N} \right|$$

O erro relativo adoitase expresar en porcentaxe ; isto é : $100 \cdot e\%$

Por exemplo: Estimouse o peso da mercancía dun contenedor en 13000 Kg ; una descargado comprobouse que a carga pesaba 12534 kg. Calcula o erro absoluto e relativo que cometeo na estimación.

Solución : Erro absoluto : $E = |12534 - 13000| = 466$

Erro relativo:

$$e = \left| \frac{-466}{12534} \right| \approx |-0,037| = 3,7\%$$

O signo menos do erro absoluto indica que cometeu un erro por exceso; polo tanto, o erro absoluto positivo indicará que o erro se comete por defecto.

7.2. Erros e números reais

Os números con infinitas cifras decimais obviamente non se poden manexar con toda a súa parte decimal, hai que aproximalos. Cal é o erro absoluto e relativo que cometemos con estas aproximacións?

Se o número é racional, coñécese o seu valor exacto, e é doado determinar os erros absoluto e relativo.

Por exemplo, $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$. Que erro cometemos se substituímos $\frac{2}{3}$ por 0,66?

$$E = \frac{2}{3} - 0,66 = \frac{2}{3} - \frac{66}{100} = \frac{2}{3} - \frac{33}{50} = \frac{1}{150} ; e = \frac{\frac{1}{150}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Se o número é irracional, non coñecemos o seu valor exacto e polo tanto non podemos calcular o erro absoluto, pero si acoutalo, é dicir, saber que é menor que certo número.

Por exemplo, se tomamos 3,14 polo número $\pi = 3,141592654\dots$ ¿que erro cometemos? Sabemos que o número π está comprendido entre $3,14 < \pi < 3,15$; logo o erro absoluto é

$$E = \pi - 3,14 < 3,15 - 3,14 = 0,01$$

Como $e = \frac{E}{\pi}$ é menor que a fracción $\frac{0,01}{3,14}$, entón $e = \frac{E}{\pi} < \frac{0,01}{3,14} =$

$$0,00318 = 0'318 \%$$

8. Potencias

8.1. Potencias de expoñente enteiro

A definición de potencias esixe que os expoñentes sexan maiores que 1, pero ao dividir potencias da mesma base é posible atopar potencias con expoñente cero, como 5^0 , con expoñente un, como 5^1 , e con expoñente negativo, como 5^{-2} .

Dar sentido a estas situacións igualándoas cos resultados obtidos ao simplificar fraccións os termos das cales son potencias da mesma base.

Observa os exemplos seguintes:

Simplificando	Dividindo potencias	Igualando resultados
$\frac{5^3}{5^3} = 1$	$\frac{5^3}{5^3} = 5^0$	$5^0 = 1$
$\frac{5^4}{5^3} = 5$	$\frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5^1$	$5^1 = 5$
$\frac{5^3}{5^5} = \frac{1}{5^2}$	$\frac{5^3}{5^5} = 5^{3-5} = 5^{-2}$	$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

A xeneralización destes resultados permítenos dar a seguinte definición:

Se a é un número real calquera e n un número natural, entón

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a ; a^0 = 1 ; a^1 = a ; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Nos exemplos seguintes aplicamos a definición:

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} ; 5^{-1} = \frac{1}{5} = 0,2 ; \frac{1}{36} = \frac{1}{6^2} = 6^{-2}$$

8.2. Operacións coas potencias de expoñente enteiro

As operacións coas potencias de expoñente natural son:

- Produto: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Cociente: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- Potencia dun produto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- Potencia dun cociente: $(a : b)^n = a^n : b^n$

Potencia elevada a outra potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

As operacións que se poden realizar coas potencias de expoñente enteiro seguen as mesmas regras que as de expoñente natural. Vexámolo e comprobemos resultados.

- Produto de potencias da mesma base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$4^5 \cdot 4^{-3} = 4^5 \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{4^5}{4^3} = 4^2 \quad \text{ó} \quad 4^5 \cdot 4^{-3} = 4^{(5+(-3))} = 4^2$$

- Cociente de potencias da mesma base: $a^n : a^m = a^{n-m}$

$$5^{-3} : 5^4 = \frac{1}{5^3} : 5^4 = \frac{1}{5^3 \cdot 5^4} = \frac{1}{5^7} = 5^{-7} \quad \text{ó} \quad 5^{-3} : 5^4 = 5^{-3-4} = 5^{-7}$$

- Potencia dun produto $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$4^{-3} \cdot 5^{-3} = \frac{1}{4^{-3}} \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{1}{(4 \cdot 5)^3} = \frac{1}{20^3} = 20^{-3} \quad \text{ó} \quad 4^{-3} \cdot 5^{-3} = (4 \cdot 5)^{-3} = 20^{-3}$$

- Potencia dun cociente: $(a : b)^m = a^m : b^m$

$$4^{-3} : 5^{-3} = \frac{1}{4^{-3}} : \frac{1}{5^3} = \frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \quad \text{ó} \quad 4^{-3} : 5^{-3} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$$

Potencia doutra potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$$(2^{-5})^3 = \left(\frac{1}{2^5}\right)^3 = \frac{1}{2^{15}} = 2^{-15} \quad \text{ó} \quad (2^{-5})^3 = 2^{-5 \cdot 3} = 2^{-15}$$

9. Números en notación científica

En moitas informacións aparecen cantidades moi grandes ou moi pequenas e que se adoitan escribir como un produto dun decimal, maior que un e menor que dez, e unha potencia de dez. Por exemplo, se nos din que masa dun átomo de hidróxeno é 0,000 000 000 000 000 000 001 675 gramos, esta cantidade tan pequena, por comodidade, escríbese como $1,675 \times 10^{-24}$ gramos. Se pola contra, nos din que a masa da Terra que é 5 976 000 000 000 000 000 000 000 kg, entón expresámolo así: $5,976 \times 10^{24}$ kg. Este xeito de expresar os números decimais grandes ou pequenos chámase notación científica.

Un **número escrito en notación científica** componse dun número decimal maior que un e menor que dez multiplicado por unha potencia de dez.

Xa coñecemos o efecto de multiplicar por unha potencia de dez; cando multiplicamos un decimal por 10^n , movemos a coma n lugares cara á dereita; se o multiplicamos por 10^{-n} , que é o mesmo que dividir por 10^n , movemos a coma n lugares á esquerda.

Exemplos

1. Expresar en notación científica: 0,004 56

Solucion:

O primeiro factor é 4,56 e, como movemos a coma tres lugares á dereita, para contrarrestar esta operación, o segundo será 10^{-3} . Logo, $0,004\ 56 = 4,56 \times 10^{-3}$

2. Expresar como decimal: $4,835 \times 10^8$

Solucion:

Este exercicio é máis doado, xa unicamente consiste en mover a coma oito lugares a dereita $4,835 \times 10^8 = 483\ 500\ 000$

Vexamos agora como se opera con este tipo de números. Para sumar e restar números en notación científica, é necesario que todos teñan a mesma potencia de 10, se isto non acontece sacamos factor común á menor potencia de 10, e logo sumamos.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 6,31 \cdot 10^8 + 4,325 \cdot 10^{10} - 5,13 \cdot 10^5 &= 6,31 \cdot 10^3 \cdot 10^5 + 4,325 \cdot 10^5 \cdot 10^5 - 5,13 \cdot 10^5 = \\
 &= (6,31 \cdot 10^3 + 4,325 \cdot 10^5 - 5,13) \cdot 10^5 = (6310 + 432500 - 5,13) \cdot 10^5 = \\
 &= 438804,87 \cdot 10^5 = 4,3880487 \cdot 10^{10}
 \end{aligned}$$

A

operación de sacar factor común, empregada no exemplo, consiste en expresar como unha multiplicación unha serie de sumandos nos que repite un factor, así

$$a \cdot b - a \cdot c + d \cdot a - f \cdot a = a \cdot (b - c + d - f)$$

Ao multiplicar e dividir números en notación científica unicamente temos que observar as regras de multiplicación e división de potencias da mesma base. Por exemplo, se se trata de multiplicar $3,68 \cdot 10^7$ con $8,63 \cdot 10^{-5}$, o resultado sería:

$$3,68 \cdot 10^7 \cdot 8,63 \cdot 10^{-5} = 31,7584 \cdot 10^{7-5} = 31,7584 \cdot 10^2 = 3,17584 \cdot 10^3$$

e se se trata de dividir:

$$3,68 \cdot 10^7 : 8,63 \cdot 10^{-5} = 0,4264194 \cdot 10^{7-(-5)} = 0,4264194 \cdot 10^{12} = 4,264194 \cdot 10^{11}$$

3. Expresar en notación científica:

- a) 453 000 000 000 000
- b) 0,000 000 000 000 000 354

Solución:

$$a) 453\,000\,000\,000\,000 = 4,53 \cdot 10^{14} ; b) 0,000\,000\,000\,000\,000\,354 = 3,54 \cdot 10^{-16}$$

4. Realiza as seguintes operacións:

- a) $1,23 \cdot 10^6 - 3,21 \cdot 10^8 + 2,31 \cdot 10^9$
- b) $4,74 \cdot 10^{-9} \cdot 8,2 \cdot 10^{16}$
- c) $5,67 \cdot 10^7 : 9,2 \cdot 10^6$

Solución:

$$a) 1,23 \cdot 10^6 - 3,21 \cdot 10^8 + 2,31 \cdot 10^9 = (1,23 - 3,21 \cdot 10^2 + 2,31 \cdot 10^3) \cdot 10^6 = (1,23 - 321 + 2310) \cdot 10^6 = 1990,23 \cdot 10^6 = 1,99023 \cdot 10^9;$$

$$b) 4,74 \cdot 10^{-9} \cdot 8,2 \cdot 10^{16} = 38,868 \cdot 10^{-9+16} = 38,868 \cdot 10^7 = 3,8868 \cdot 10^8$$

$$c) 5,67 \cdot 10^7 : 9,2 \cdot 10^6 = 0,6163043 \cdot 10^{7-6} = 6,163043$$

10. Radicais

Unha forma simbólica de manexar algúns números reais é mediante radicais; veremos qué son os radicais e cómo se opera con eles.

10.1. Raíz enésima (n-sima)

Chamamos raíz enésima de número a , e simbolizámolo por, $\sqrt[n]{a}$ a outro número b que cumpre $b^n = a$. É dicir,

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se } b^n = a$$

Ao símbolo $\sqrt[n]{a}$ chamáselle radical, ao número n chamáselle índice da raíz e a a radicando

Se o índice é 2, a raíz chámase cadrada. Se o índice é 3, a raíz chámase cúbica. Para o cálculo das raíces dun número, salvo nos casos moi sinxelos, empregamos a calculadora

10.2. Potencias de expoñente racional

Como consecuencia da definición da raíz enésima podemos expresar o radical $\sqrt[n]{a}$ como una potencia de expoñente racional

$$\sqrt[n]{a} = (a)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{xa que} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = (a)^{\frac{n}{n}} = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}, \quad \text{xa que} \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = (a)^{\frac{m \cdot n}{n}} = a^m$$

e polo tanto as operacións con radicais son iguais que as operacións con potencial de expoñente fraccionario.

Do mesmo modo que hai fraccións equivalentes existen, tamén, radicais equivalentes.

Dous radicais son equivalentes se escritos como potencias teñen expoñentes equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \quad \text{xa que} \quad \frac{m}{n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p}$$

A equivalencia de radicais permite dúas cousas:

- Simplificar radicais.
- Reducir radicais ao mesmo índice.

Vexamos exemplos destas operacións

Exemplos

1. Simplificar $\sqrt[3]{64}, \sqrt[4]{162}, \sqrt[6]{a^4}$

Solución

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{64} &= \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 \\ \sqrt[4]{162} &= \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 3 \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[6]{a^4} &= a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} \end{aligned}$$

2. Reducir os radicais $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{50}$, $\sqrt[6]{20}$ ao mesmo índice

Solución:

Hai que atopar radicais equivalentes aos dados, pero co mesmo índice. Achamos o m.c.m. $(2, 3, 6) = 6$. E polo tanto

$$\sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{8^3}; \quad \sqrt[3]{50} = 50^{\frac{1}{3}} = 50^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{50^2}; \quad \sqrt[6]{20} = 20^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{20}$$

3. Calcular a) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$ b) $(\sqrt[3]{a^2})^6$

Solución:

$$a) \sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \left(\sqrt[3]{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}; \quad b) (\sqrt[3]{a^2})^6 = \left(a^{\frac{2}{3}} \right)^6 = a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

Producto de raíces de igual índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Esta operación emprégase para sacar un factor dun radical, como por exemplo

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Cociente de raíces de igual índice:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Produto e cociente de raíces de distinto índice.

Para multiplicar e dividir radicaís con distinto índice hai que transformalos noutros equivalentes, e logo multiplicar e dividir segundo o caso.

Exemplos

1. Calcula $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{50}}{\sqrt[6]{20}}$

Solución:

Como vimos no exemplo 2 o m. c. m. (2, 3, 6) = 6 entón:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{50}}{\sqrt[6]{20}} &= \frac{\sqrt[6]{8^3} \cdot \sqrt[6]{50^2}}{\sqrt[6]{20}} = \frac{\sqrt[6]{8^3 \cdot 50^2}}{\sqrt[6]{20}} = \sqrt[6]{\frac{8^3 \cdot 50^2}{20}} = \sqrt[6]{\frac{2^9 \cdot (5^2 \cdot 2)^2}{20}} = \sqrt[6]{\frac{2^9 \cdot 5^4 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 5}} \\ &= \sqrt[6]{2^9 \cdot 5^3} = \sqrt[6]{(2^3 \cdot 5)^3} = \sqrt[6]{40^3} = 40^{\frac{3}{6}} = 40^{\frac{1}{2}} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Suma de radicais

Para sumar radicais é preciso que teñan o mesmo índice e o mesmo radicando, doutro modo non se poden sumar.

Por exemplo,

$$\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} = \sqrt{3^3} + \sqrt{2^4 \cdot 3} - \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = \\ = 3\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Racionalización dos denominadores

Antes de uso xeneralizado das calculadoras era moi incómodo dividir un número por un radical, e buscábase o modo de converter esa división noutra en que o divisor fose enteiro. Para iso establecéronse regras, chamadas regras de **racionalizar** os denominadores, e son as seguintes:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m \cdot b^{n-m}}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

$$\frac{a}{c - \sqrt{b}} = \frac{a(c + \sqrt{b})}{(c - \sqrt{b})(c + \sqrt{b})} = \frac{a(c + \sqrt{b})}{c^2 - \sqrt{b}^2} = \frac{a(c + \sqrt{b})}{c^2 - b}$$

Se en vez de $c + \sqrt{b}$ temos $c - \sqrt{b}$, enton multiplicamos e dividimos por $c + \sqrt{b}$

$$\text{E por último: } \frac{a}{\sqrt{c} - \sqrt{b}} = \frac{a(\sqrt{c} + \sqrt{b})}{(\sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{b})} = \frac{a(\sqrt{c} + \sqrt{b})}{(\sqrt{c})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{a(\sqrt{c} + \sqrt{b})}{c - b}$$

Exemplos

1. Racionaliza as seguintes fraccións : $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$, $\frac{3}{2 + \sqrt{7}}$, $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{2^{4-3}}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^{4-3}}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3 \cdot 2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$$

$$\frac{3}{2 + \sqrt{7}} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt{7})}{(2 + \sqrt{7}) \cdot (2 - \sqrt{7})} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt{7})}{2^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt{7})}{4 - 7} = -(2 - \sqrt{7}) = \sqrt{7} - 2$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{aligned}$$