

1. ÁNGULOS NA CIRCUNFERENCIA
2. ARCO CAPAZ
3. POTENCIA
4. EIXE E CENTRO RADICAL

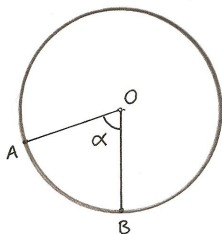
1. ÁNGULOS NA CIRCUNFERENCIA

Un ángulo respecto dunha circunferencia pode serlle alleo ou relacionarse con ela. Para que exista relación os lados do ángulo teñen que ser secantes á circunferencia (se os lados do ángulo cortan á circunferencia por dous puntos) ou ser tanxentes a ela (se o lado do ángulo ten un punto de contacto coa circunferencia).

Casos: ángulo central, ángulo interior, ángulo exterior, ángulo circunscrito, ángulo semiinscrita e ángulo inscrito.

Ángulo central

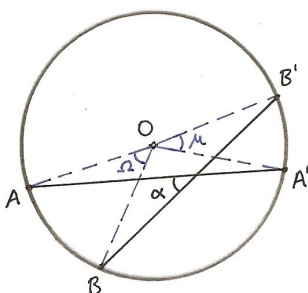
O vértice do ángulo coincide co centro e os lados cos radios da circunferencia. O ángulo central é proporcional ao arco abarcado. A amplitude angular da circunferencia é 360° e a súa lonxitude é $2\pi r$.



$$\frac{\hat{\alpha}}{\widehat{AB}} = \frac{360^\circ}{2\pi r} ; \frac{\hat{\alpha}}{\widehat{AB}} = \frac{180^\circ}{\pi r} ; \hat{\alpha} \cdot \pi r = \widehat{AB} \cdot 180^\circ ; \boxed{\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AB} \cdot 180^\circ}{\pi r}}$$

Ángulo interior

Ten o vértice na circunferencia. O seu valor é igual á semisuma dos ángulos centrais correspondentes a α e ao seu oposto polo vértice.



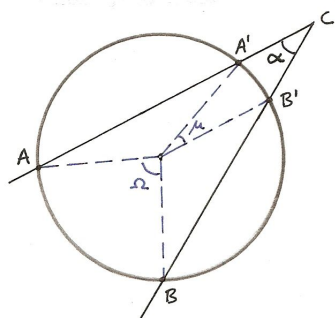
$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{\text{suma dos ángulos centrais}}{2}} ; \hat{\alpha} = \frac{\omega + \mu}{2}$$

Ângulo exterior

Ângulo circunscrito

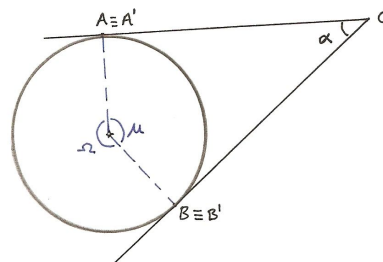
En ambos os dous o vértice é exterior á circunferencia, sendo os seus lados secantes, no caso do ângulo exterior, e tanxentes no circunscrito.

No ângulo exterior e circunscrito é igual á semidiferencia dos ângulos centrais correspondentes aos arcos **AB** e **A'B'**.



$$\hat{\alpha} = \frac{\text{diferença dos ângulos centrais}}{2}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\Omega - \mu}{2}$$

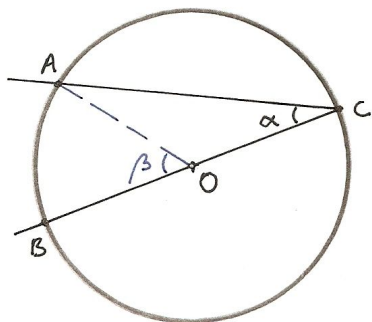


Ângulo inscrito

Ângulo semiinscrito

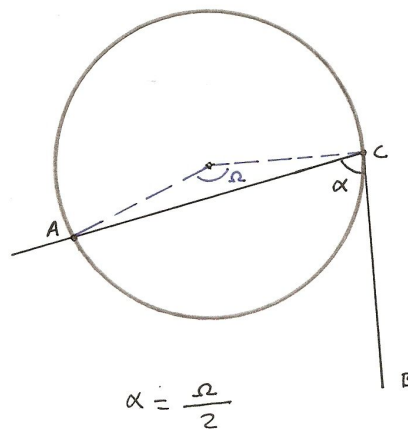
En ambos os dous o vértice é un punto da circunferencia, sendo os seus lados cordas, no caso do ângulo inscrito, e sendo un lado corda e outro tanxente no semiinscrito.

O ângulo inscrito e semiinscrito é igual á metade da súa central.



$$\beta = 2\alpha ; \alpha = \frac{\beta}{2}$$

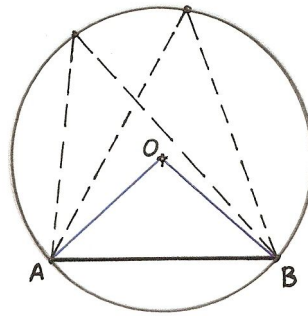
$$\hat{\alpha} = \frac{\text{ângulo central}}{2}$$



$$\alpha = \frac{\Omega}{2}$$

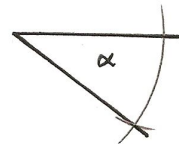
2. ARCO CAPAZ

Se analizamos o ángulo inscrito obsérvase que tomando unha corda **AB** fixa, poden trazarse unha serie de ángulos inscritos que abranguen o mesmo arco, ou o que é igual, correspóndelles o mesmo ángulo central e como consecuencia todos os ángulos con vértice na circunferencia e extremos **A** e **B**, teñen o mesmo valor angular.

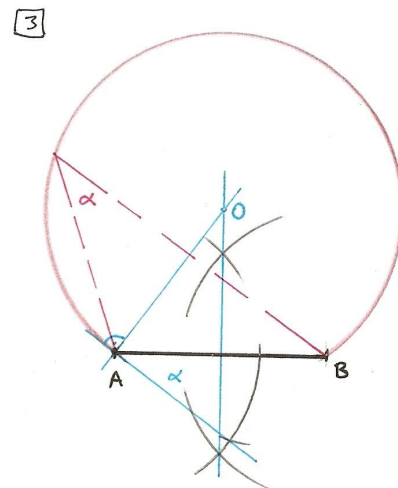
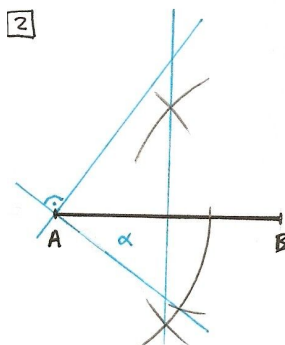
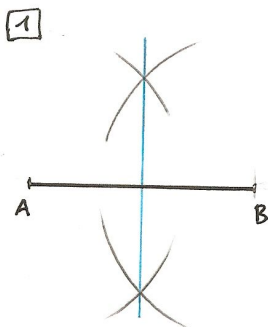


A isto chámase *arco capaz dun segmento AB para un ángulo α* . Denomínase así ao lugar xeométrico dos puntos do plano dende os cales a vai un segmento baixo un ángulo determinado.

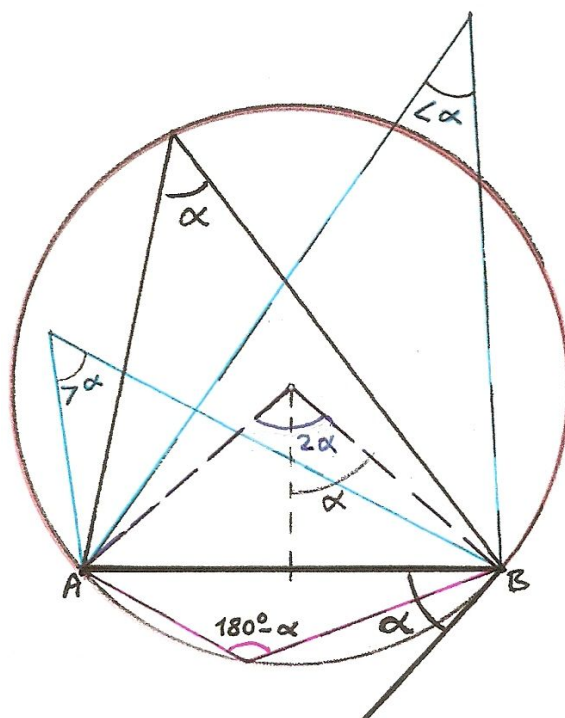
Para atopar o arco capaz sendo os datos o segmento **AB** e o ángulo α . Procédese así:



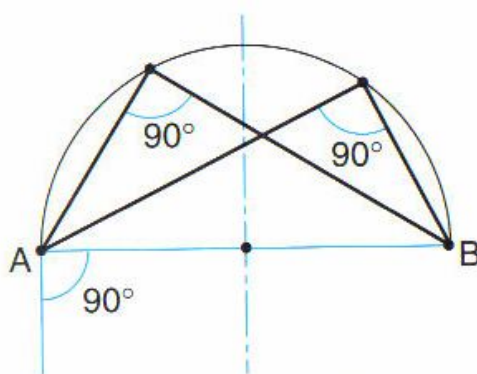
- 1) Trazar a mediatriz do segmento **AB**.
- 2) Por un extremo **A** do segmento, situar o ángulo α y trazar en **A** á perpendicular ao lado libre do ángulo dato.
- 3) O punto onde se cortan a mediatriz e a perpendicular determina o centro do arco buscado.



Cun valor α para o ángulo inscrito, o central vale 2α , o interior é maior que α e o exterior é menor que α . O arco complementario ao arco capaz dá valores $180^\circ - \alpha$. O ángulo α será menor que 180° xa que non existen ángulos maiores ou iguais que 180° inscritos nunha circunferencia.



Así, o arco capaz de 90° resulta ser media circunferencia.



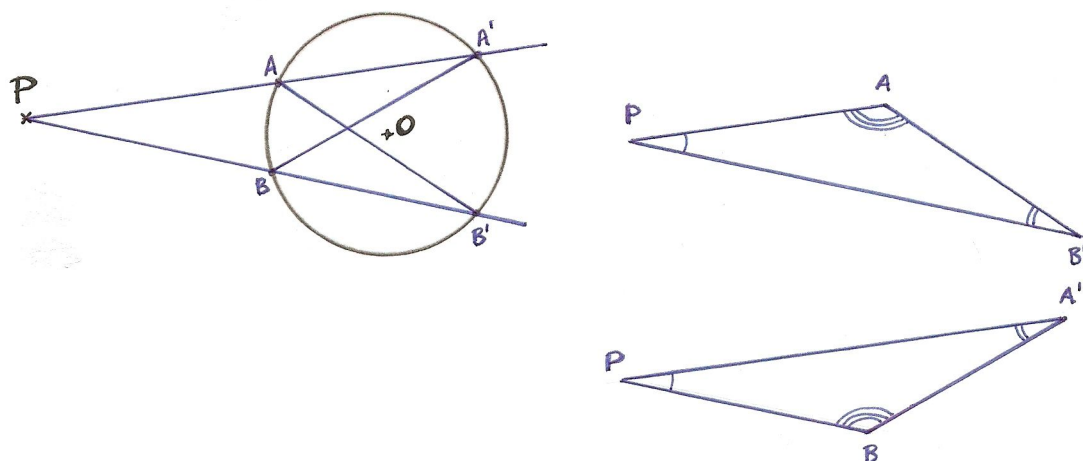
Unha das súas aplicacións, entre outras, é o *medio proporcional* ou *media xeométrica*.

3. POTENCIA

Cando relacionamos un punto **P** cunha circunferencia, xorde a idea de *potencia*.



Deste xeito trazando dende **P** secantes á circunferencia e unindo debidamente obtéñense dous triángulos semellantes. **PAB'** e **PA'B**.



Como consecuencia o ángulo en **P** é igual nos dous triángulos por ser coincidente.

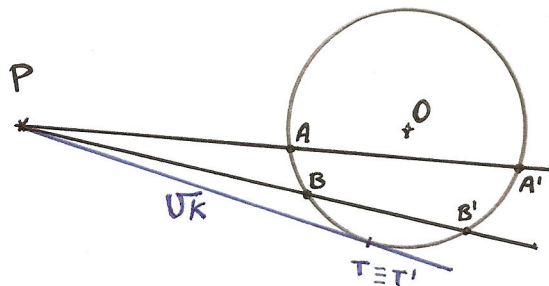
A' = B' pois son ángulos inscritos que abranguen igual arco **AB**.

Polo tanto, se dúas parellas de ángulos son iguais, a terceira haberá de selo tamén, xa que a suma dos ángulos dun triángulo é sempre **180°**. Entón **A = B**

Debido a esta semellanza tense que:

$$PA / PB = PB' / PA' \quad ; \quad PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$

O produto de dous segmentos situados nunha mesma recta, limitados por un punto **P** e a súa intersección coa circunferencia (**A** e **A'**) é unha cantidade constante, que se representa coa letra **K**.



$$PA \cdot PA' = K$$

A isto coñéceselle como potencia dun punto respecto dunha circunferencia.

A posición límite da secante é unha tanxente, sendo o punto de tanxencia un punto dobre, **T** coincide **T'**, polo tanto tamén é dobre o segmento, **PT** coincide **PT'**. Así temos:

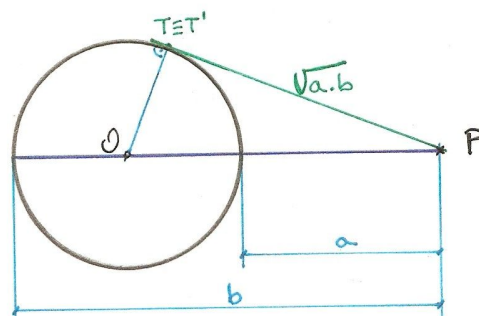
$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = \dots = PT \cdot PT' = PT^2 = K \text{ de onde: } PT = \sqrt{K} = \text{media xeométrica}$$

P = Centro de potencia

K = Constante. Valor de potencia.

\sqrt{K} = Media Xeométrica

Potencia do punto. Así, elixindo un segmento dobre (tanxente dende **P**) e a secante que pasa polo centro **O**.



$$\text{Tense: } PT^2 = a \cdot b \quad ; \quad PT = \sqrt{a \cdot b}$$

Como aplicación da media xeométrica, podemos atopar a **RAÍZ** cadrada dun segmento,

$$\text{pois si: } x^2 = a \cdot b \quad ; \quad x = \sqrt{a \cdot b}$$

Facendo que **b** sexa igual a **1** (**b** = 1 unidade), temos que $x = \sqrt{a \cdot 1}$; $x = \sqrt{a}$

Por exemplo:

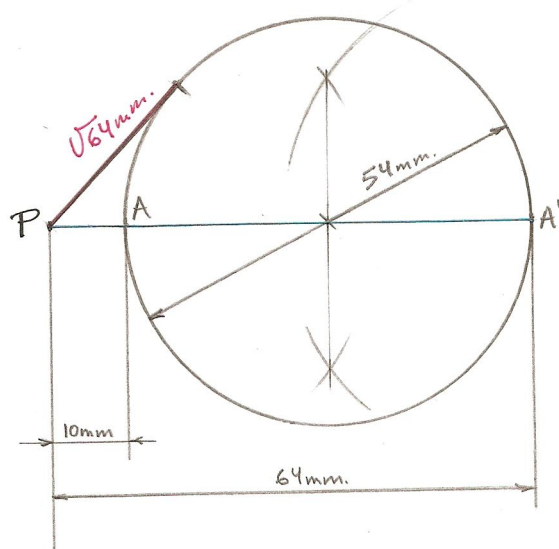
Para atopar a raíz cadrada de **64**

Pasos:

1) Situamos un segmento **PA'** de valor **64** mm.

- 2) Dende **P** tomamos **10 mm** como unidade, e coa diferenza trazamos unha circunferencia (de diámetro 54 mm).
- 3) Trazamos a tanxente dende **P** á circunferencia que nos dará o valor da raíz cadrada de **64**

$\sqrt{64}$



$$\begin{aligned} PA &= 10 \text{ mm} \\ AA' &= 54 \text{ mm} = \emptyset \\ PA' &= 64 \text{ mm} \end{aligned}$$

Para obter a raíz cadrada de **320**

Sendo a cantidade maior opérase segundo se indica:

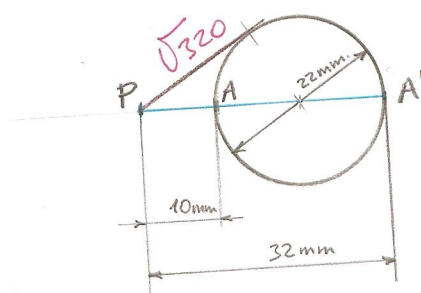
$$\sqrt{320} = \sqrt{32 \cdot 10}$$

$$320 : 10 = 32 \text{ mm}$$

$$PA' = 32 \text{ mm}$$

$$AA' = 22 \text{ mm}$$

$$PA = 10 \text{ mm}$$



$$\sqrt{32} = 5'6$$

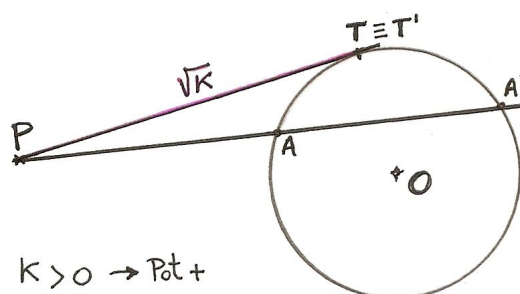
$$\sqrt{10} = 3'16$$

$$5'6 \cdot 3'16 = 17'6$$

SEGMENTOS REPRESENTATIVOS DE POTENCIA

Chámase así ao segmento que é *medio proporcional* ou *media xeométrica* de todas as parellas de segmentos de potencia.

POTENCIA POSITIVA. Cando o punto é *exterior* á circunferencia. O segmento tanxente á circunferencia representa o valor de **K**. Sendo **K** maior que cero a potencia é positiva.

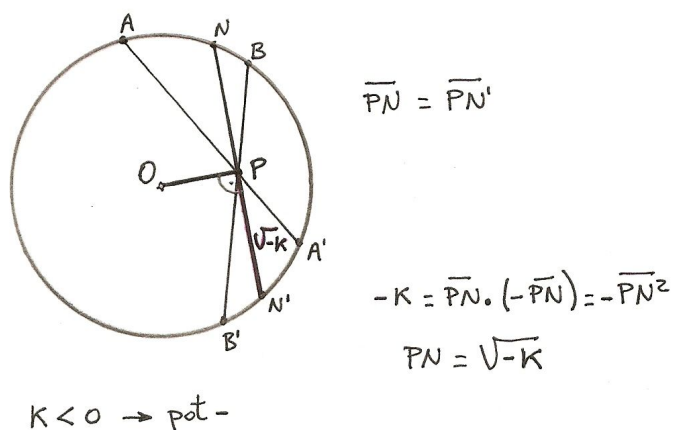


POTENCIA NEGATIVA. Cando o punto é *interior* á circunferencia. Podemos trazar infinitas secantes que pasen por **P**, a secante **AA'**, a secante **BB'**, vaise producir unha constante os valores da cal van ser positivos e negativos.

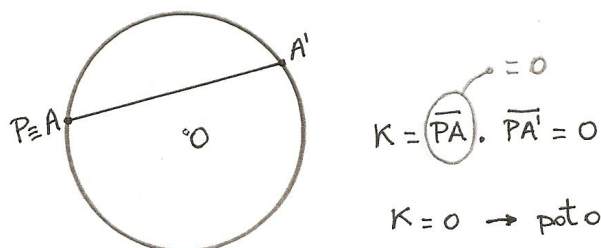
$$-K = PA \cdot (-PA') = PB \cdot (-PB')$$

Cando a secante que pasa por **P** é perpendicular ao segmento **OP** teremos un caso particular no que os dous segmentos formados son iguais (**NP = PN'**). O segmento NP (ou **PN'**) representa o valor de **-K**.

Sendo **K** menor que cero a potencia é negativa.



POTENCIA NULA. Cando o punto pertence á circunferencia. Trátase dunha potencia nula porque non hai solución. **K = PA (= 0) · PA' = 0**

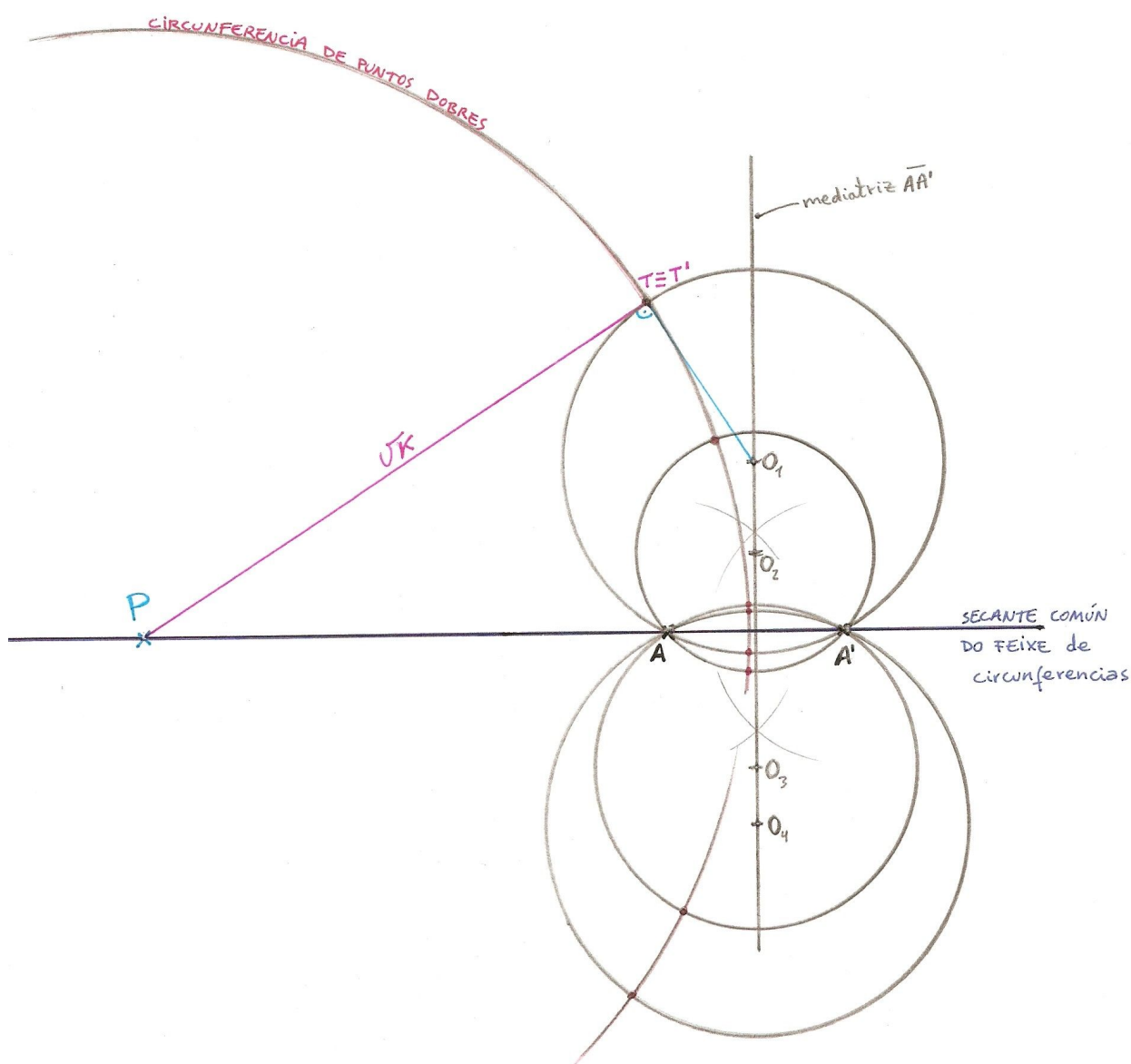


POTENCIA DUN PUNTO RESPECTO A UN FEIXE DE CIRCUNFERENCIAS

Dados dous puntos **A** e **A'**, e trazado un feixe de circunferencias que pasan por eles, os centros das cales estarían situados na mediatriz do segmento **AA'**, a recta determinada polos devanditos puntos sería a secante común a todas as circunferencias do devandito feixe.

Se tomamos un punto exterior **P** pertencente á secante, o produto de **PA · PA'** será o mesmo para todas elas, polo tanto tamén haberá de selo **PT · PT'** que é igual **PT²**.

Prodúcese unha constante na que as tanxentes trazadas dende **P** ás circunferencias do feixe teñen o mesmo valor. $PT^2 = K$; $PT = \sqrt{K}$



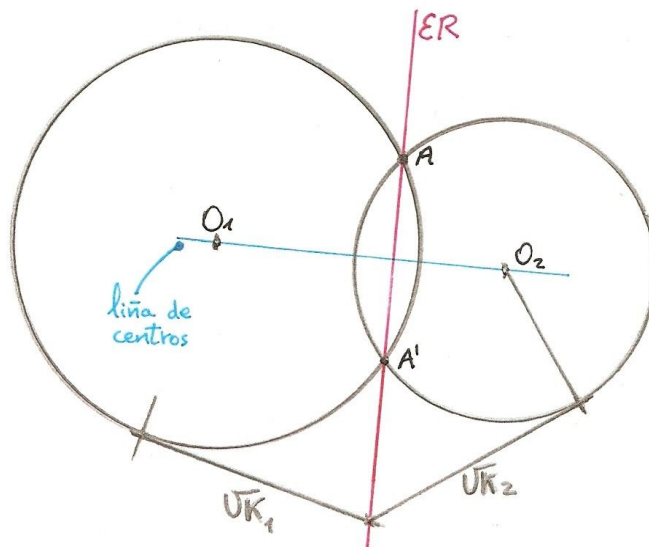
4. EIXE E CENTRO RADICAL

Enlazando co anterior, ademais do punto **P** existen máis puntos aliñados dende os cales a potencia é igual para as circunferencias do feixe. A esa liña chámase Eixe Radical (**ER**). Así podemos definir:

EIXE RADICAL de dúas circunferencias como o lugar xeométrico dos puntos do plano que cumpren igual valor de potencia respecto ás dúas.

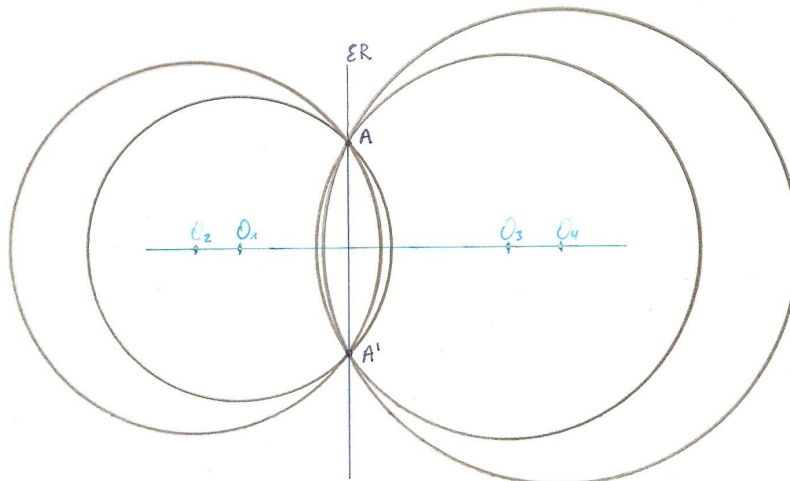
O Eixe Radical é sempre perpendicular á liña de centros, e dende un punto calquera del prodúcese unha constante ($K_1 = K_2$).

Como xa se observou o **ER de dúas circunferencias secantes**, é a secante común formada polos puntos **A** e **A'** que teñen potencia nula respecto a cada circunferencia.

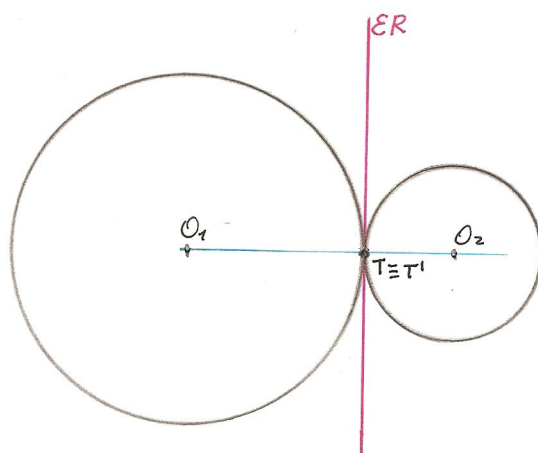


Feixe de circunferencias secantes

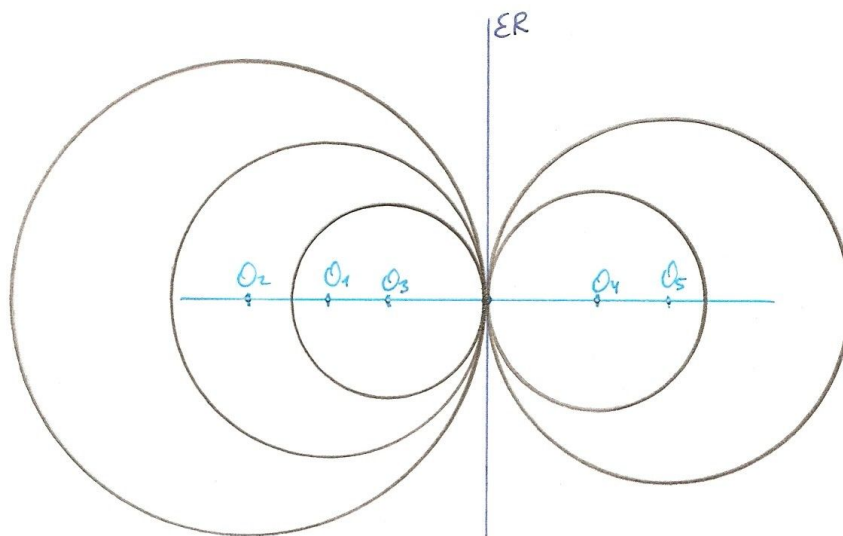
Eixe Radical, vai ser común a todas as circunferencias que pasen por **A** e **A'**.



ER de dúas circunferencias tanxentes. Tanto se son exteriores como interiores, o punto de tanxencia ten potencia nula para ambas as dúas circunferencias, e por iso é un punto do Eixe Radical. Así, o Eixe Radical é a tanxente común.



Todas as circunferencias que pasen polo devandito punto de tanxencia pertencen ao *Feixe de circunferencias tanxentes*.



ER de dúas circunferencias disxuntas (que poden ser exteriores ou interiores)

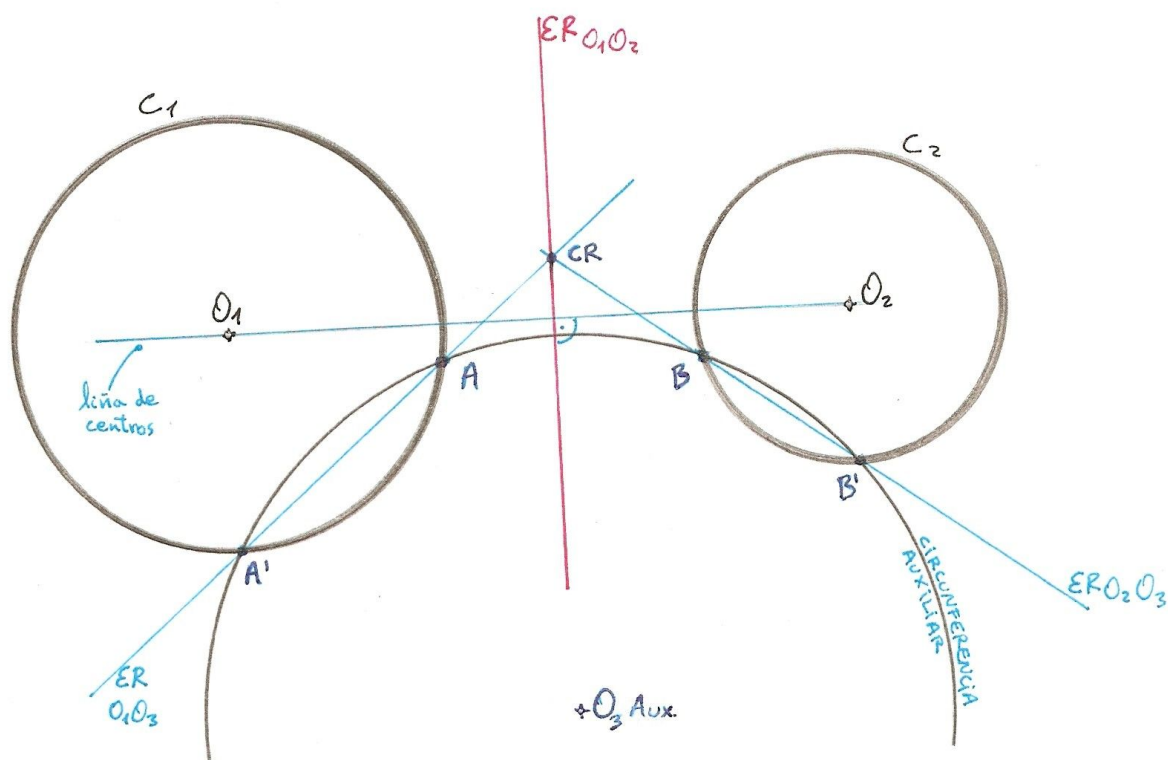
Para poder explicar o *ER de dúas circunferencias de circunferencias disxuntas* debemos saber antes que é o Centro Radical de tres circunferencias.

Defínese CENTRO RADICAL (**CR**) de tres circunferencias como o punto que ten igual potencia respecto das tres; resulta ser punto de intersección dos Eixes Radicais das circunferencias tomadas de dous en dous.

Tendo isto presente, dadas dúas circunferencias disxuntas exteriores podemos atopar o Eixe Radical, xa que, unha circunferencia arbitraria auxiliar O_3 (que sexa secante ás outras dúas circunferencias dadas) proporciona dous puntos secantes de potencia nula. Para C_1 e C_3 serían A e A' e para C_2 e C_3 serían B e B' . Obtemos así dous Eixes Radicais que ao cortarse nos dan un punto de igual potencia para C_1 , C_2 (e C_3) chamado Centro Radical (CR). A perpendicular dende CR á liña de centros defínenos o Eixe Radical de C_1 e C_2 .

Os pasos para trazar ER de dúas circunferencias disxuntas serían:

- 1) Debuxar unha circunferencia auxiliar calquera que sexa secante ás circunferencias dato, que darán puntos secantes, para C_1 e C_3 (auxiliar) serían A e A' e para C_2 e C_3 (auxiliar) serían B e B' .
- 2) Debuxar o eixe radical que forma os puntos A e A' , trazando por eles unha perpendicular á liña de centros O_1O_3 . Teremos o eixe radical de C_1 e C_3 (auxiliar).
- 3) Facer o mesmo nos puntos B e B' . Teremos o eixe radical de C_2 e C_3 (auxiliar)
- 4) Ambos eixes radicais se cortan nun punto chamado centro radical (CR). Nel trazamos una perpendicular a liña de centros O_1O_2 , e obtemos o eixe radical das circunferencias disxuntas C_1 e C_2 .



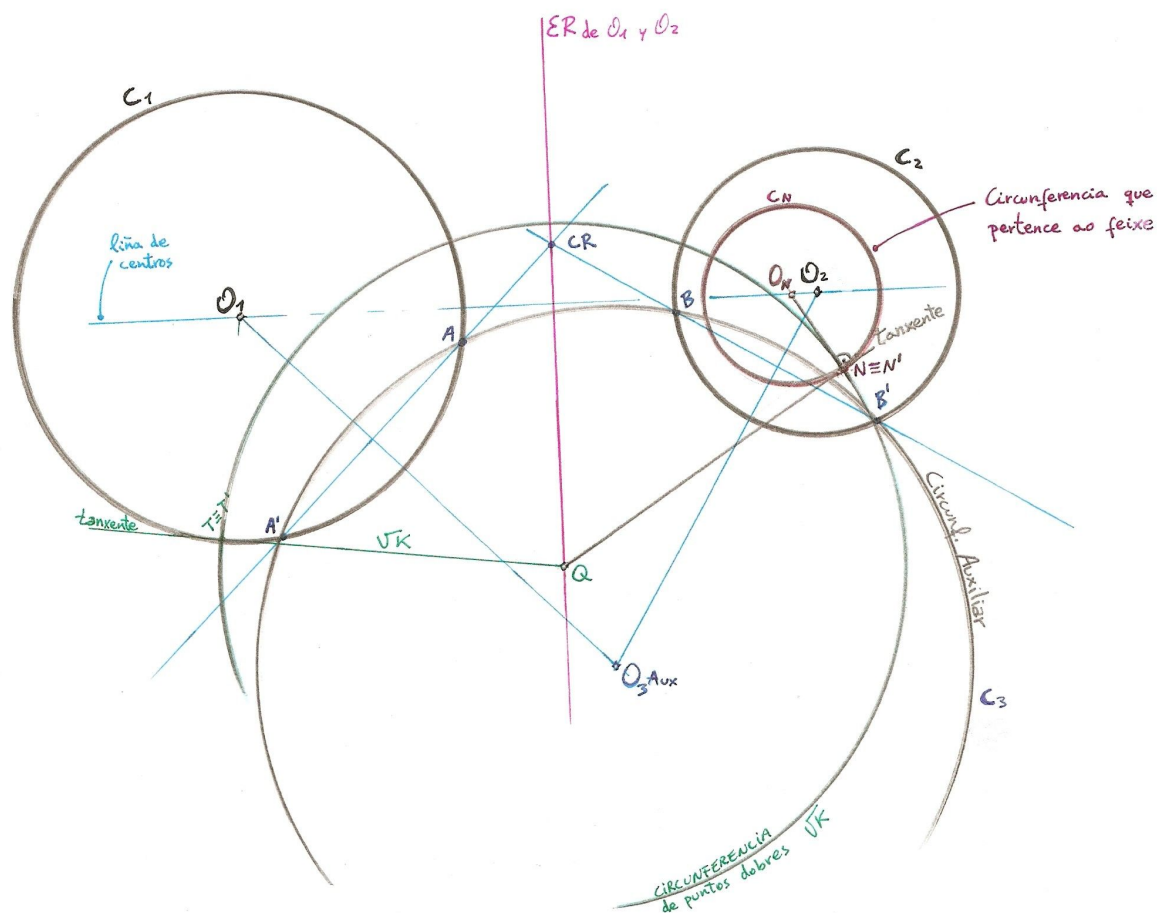
Pode darse o caso de que as dúas circunferencias exteriores fosen de igual radio, entón, o Eixe Radical coincidiría coa mediatriz da liña de centros.

Para trazar as circunferencias que pertencen a un *Feixe non secante*, tómasse un punto calquera **Q** do Eixe Radical, e dende él trázase a tanxente a unha das circunferencias para obter o valor de igual potencia **K**. A circunferencia \sqrt{K} é de puntos dobres, é dicir, está formada polos posibles puntos de tanxencia das circunferencias que forman o feixe.

Así, se tomamos un punto calquera **N**, de dita circunferencia, e enlazámolo con **Q** obtemos unha tanxente dunha circunferencia que pertence ao feixe. Polo primeiro principio de tanxencias trazamos unha perpendicular á tanxente que cortará á liña de centros nun punto (**O_N**) que será o centro da circunferencia que pertence ao feixe.

Os pasos para trazar unha circunferencia que pertence a un feixe non secante serían:

- 1) Escollemos un punto calquera do Eixe Radical, por exemplo **Q**, e dende él trázase a tanxente a unha das circunferencias, por exemplo **C₁**. Esta tanxente nos determina o valor da circunferencia \sqrt{K} . Con centro en **Q** e radio ata o punto dobre **T** debuxamos a circunferencia de puntos dobres.
- 2) Escollemos un punto calquera da circunferencia \sqrt{K} , por exemplo **N** e o enlazamos co punto **Q**. A liña **QN** é a tanxente da circunferencia que pertence o feixe e que queremos debuxar.
- 3) Aplicamos o primeiro principio de tanxencias, e dicir, trazamos o radio perpendicular á tanxente **QN**, que cortará á liña de centros **O₁O₂** nun punto que será o centro da circunferencia que pertence o feixe (**O_N**).
- 4) Con centro en **O_N** e radio hasta **N** debuxamos a circunferencia que pertence ao feixe.



CENTRO RADICAL de tres circunferencias

Xa definimos o centro radical, agora imos trazar o centro radical de tres circunferencias disxuntas, empreñando os conceptos vistos ata agora.

Os pasos para trazar o CENTRO RADICAL de tres circunferencias serían:

- 1) Debuxamos unha circunferencia auxiliar calquera que sexa secante a dúas das circunferencias dato, por exemplo C_1 e C_2 e atopamos o seu eixe radical (seguir os pasos no apartado **ER** de dúas circunferencias disxuntas). A liña debuxada será o **ER** de C_1 e C_2 .
- 2) A continuación debuxamos outra circunferencia auxiliar que sexa secante a outras dúas circunferencias dato, por exemplo C_2 e C_3 e atopamos o seu eixe radical. A liña debuxada será o **ER** de C_2 e C_3 .
- 3) Ambos os dous eixes radicais cortaranse nun punto chamado centro radical (**CR**).
- 4) Se trazamos dende o centro radical (**CR**) unha tanxente a unha das circunferencias dato, teremos a circunferencia de puntos dobres \sqrt{K} . Dende o **CR** as tanxentes trazadas a calquera das circunferencias teñen o mesmo valor.

