

CAMPO ELÉCTRICO

1. Forza electrostática

1.1. Carga eléctrica

1.2. Forza entre cargas en repouso: lei de Coulomb. Principio de superposición

2. Campo electrostático

2.1. Descripción e representación do campo eléctrico desde un punto de vista dinámico

- a) *Intensidade de campo eléctrico*
- b) *Principio de superposición do campo eléctrico*
- c) *Representación do campo eléctrico mediante liñas de forza*

2.2. Descripción e representación do campo eléctrico desde un punto de vista enerxético

- a) *Enerxía potencial eléctrica*
- b) *Enerxía potencial dun sistema de n cargas*
- c) *Potencial do campo eléctrico*
- d) *Potencial debido a un sistema de n cargas*
- e) *Diferenza de potencial entre dous puntos dun campo eléctrico. Superficies equipotenciais. Diferenza de potencial nun campo eléctrico uniforme*

2.3. Relación entre a intensidade de campo eléctrico, \vec{E} , e o potencial eléctrico, V

2.4. Movemento de partículas cargadas nun campo eléctrico uniforme

- a) *Movemento de partículas que inciden na dirección do campo*
- b) *Movemento de partículas que inciden perpendicularmente ó campo*

2.5. Cálculo do campo eléctrico e o potencial mediante o teorema de Gauss

- a) *Teorema de Gauss*
- b) *Aplicacións do teorema de Gauss ó cálculo do campo \vec{E}*
- c) *Aplicacións do teorema de Gauss ó cálculo do potencial V*

1. Forza electrostática

1.1. Carga eléctrica

A carga eléctrica é a propiedade da materia que sinalamos coma causa da interacción electromagnética.

A súa unidade no Sistema Internacional é o culombio (C), que se define como a cantidade de carga que atravesa unha sección de condutor nun segundo cando a intensidade de corrente é de un amperio.

As propiedades fundamentais da carga eléctrica son:

- Experimentalmente compróbase que existen dous tipos de carga, que desde hai tempo se chaman positiva e negativa. Todas as cargas dunha clase repélense entre si, mentres que atraen ás da outra clase.
- A carga consérvase. A carga total (suma alxebrica das positivas e negativas) dun sistema illado non varía. Nun proceso de electrización non hai creación de carga eléctrica, simplemente hai transición da carga eléctrica dun corpo a outro.
- A carga está cuantizada. Calquera valor da carga é múltiplo dunha carga elemental: a do electrón (e^-) ou a do protón, sendo estas iguais en valor absoluto: $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

1.2. Forza entre cargas en repouso: lei de Coulomb. Principio de superposición

En 1785, Charles Augustin de Coulomb enunciou a lei que expresa o valor da forza que se exercen mutuamente dúas cargas eléctricas:

A forza de atracción ou repulsión entre dúas cargas eléctricas puntuais é directamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao cadrado da distancia que as separa.

$$F \propto \frac{QQ'}{r^2}$$

E como a forza é unha magnitude vectorial, podemos escribir a expresión anterior da seguinte forma:

$$\vec{F} = k \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}_r \quad [1]$$

Nesta expresión, \vec{u}_r é un vector unitario na dirección da recta que une as cargas Q e Q' e cuxo sentido apunta cara a unha separación relativa das cargas (figura 1). Dese modo, se as cargas son de distinto signo, a forza ten signo negativo, o que significa que a interacción é atractiva.

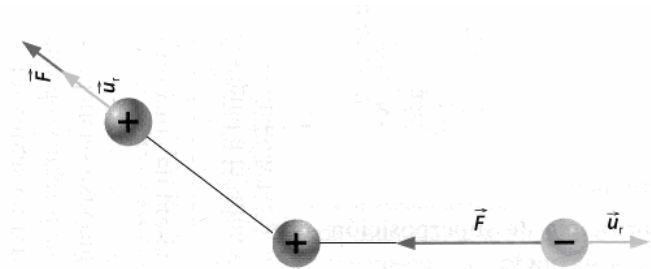


Figura 1

A constante k que figura na expresión [1] ten, no baleiro, o seguinte valor:

$$k \cong 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Con todo, e velaquí unha das diferenzas máis notables entre a interacción electrostática e a gravitatoria (a pesar da súa similitude matemática), o valor da constante k depende do medio no que se atopen as cargas. Non é, pois, unha constante universal como o era G , independente do medio. Por iso, é común expresar o valor de k en función doutra constante coñecida como constante dieléctrica do medio ou permitividade do medio, ϵ :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

No caso do baleiro, o valor aproximado da permitividade, ϵ_0 , é: $\epsilon_0 \cong 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$. Do seu cociente aparece a permitividade relativa ϵ_r : $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

Posto que o medio co que traballaremos sempre no presente curso será o baleiro, substituíndo na expresión [1], temos:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}_r$$

Como resumo, podemos establecer que a forza que describe a interacción electrostática entre dúas cargas:

- Varía conforme ao inverso do cadrado da distancia.
- É central e, xa que logo, conservativa.
- Ten un valor que depende do medio, a diferenza do que ocorre coa interacción gravitatoria.

Exemplo

A que distancia debemos situar no baleiro dúas cargas positivas, $Q_1 = Q_2 = +5\mu\text{C}$, para que se repelan cunha forza de 6 N?

Dato: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2}$

Solución: despegando na lei de Coulomb a distancia entre as cargas, r , e substituíndo, con todas as magnitudes en unidades do SI:

$$r = \sqrt{\frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{F}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{6}} = 0,19 \text{ m}$$

▪ Principio de superposición aplicado a fuerzas eléctricas

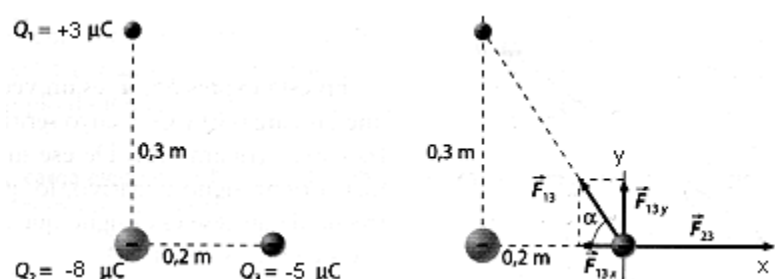
Se en vez dunha carga son varias as cargas puntuais (Q_2, Q_3, \dots), a forza total exercida sobre a carga puntual Q_1 obtense sumando (vectorialmente) todas as forzas individuais exercidas sobre a carga Q_1 . É o que coñecemos como principio de superposición.

$$\vec{F} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots$$

Exemplo

Determina a forza que actúa sobre a carga Q_3 da seguinte figura.

Dato: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$



Solución: a forza total que actúa sobre a carga Q_3 é igual á suma vectorial das forzas que sobre a devandita carga exercen as demais. Isto é:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

Para o cálculo de ambas as forzas, facemos uso da lei de Coulomb. Así, a forza coa que Q_3 atrae a Q_1 é:

$$F_{13} = k \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0,3^2 + 0,2^2) \text{ m}^2} = 1,04 \text{ N}$$

que en forma vectorial é:

$$\vec{F}_{13} = -1,04 \cos \alpha \vec{i} + 1,04 \sin \alpha \vec{j} = -0,58 \vec{i} + 0,87 \vec{j} \text{ N}$$

Do mesmo xeito, a forza coa que Q_3 repele a Q_2 é:

$$F_{23} = k \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}^2} = 9 \text{ N}$$

que en forma vectorial é:

$$\vec{F}_{23} = 9 \vec{i} \text{ N}$$

Polo tanto, a forza total é:

$$\vec{F}_{total} = 8,42\vec{i} + 0,87\vec{j} \text{ N}$$

Co que o seu valor é:

$$F_{total} = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} = 8,46 \text{ N}$$

2. Campo electrostático

Campo é a rexión do espazo cuxas propiedades son alteradas pola presenza dunha carga.

Elixiremos magnitudes que representen as devanditas propiedades en función da posición (intensidade do campo e potencial). Así, do mesmo xeito que fixemos coa interacción gravitatoria, distinguiremos entre o campo e o efecto do campo sobre unha partícula testemuña:

- Campo, que é definido por:
 - A súa intensidade en cada punto, desde unha perspectiva dinámica da interacción.
 - O seu potencial en cada punto, desde un punto de vista enerxético da interacción.
- Efecto do campo sobre unha partícula testemuña, que se traduce en:
 - A forza que actúa sobre a partícula situada nun punto, desde unha perspectiva dinámica da interacción.
 - A enerxía potencial asociada á posición relativa da partícula no campo, desde un enfoque enerxético da interacción.

2.1. Descrición e representación do campo eléctrico desde un punto de vista dinámico

Cando falamos de punto de vista dinámico, queremos dicir que centraremos a nosa atención nas forzas que operan sobre o sistema para describir a interacción que ten lugar nel.

a) Intensidade de campo eléctrico

Se en lugar de considerar a forza que actúa sobre unha carga calquera Q' situada nun punto do campo, nos centramos na forza que actúa sobre a unidade de carga positiva colocada nese punto, eliminaríamos a variable allea ao campo.

Defínese intensidade do campo eléctrico¹, \vec{E} , nun punto como a forza que actúa sobre a unidade de carga testemuña positiva colocada en devandito punto. É dicir:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'}$$

A unidade de intensidade do campo eléctrico no Sistema Internacional é o newton partido por culombio (N/C).

Segundo esta definición, a intensidade do campo eléctrico ou simplemente o campo eléctrico nun punto orixinado por unha carga puntual Q é:

¹ Frecuentemente úsase o termo campo eléctrico ou vector intensidade do campo eléctrico.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'} = \frac{k \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}_r}{Q'}$$

Xa que logo:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Como se deduce da expresión anterior, a intensidade do campo eléctrico diminúe coa distancia, e tendo en conta as características do vector unitario \vec{u}_r , podemos afirmar que:

- É radial e diminúe co cadrado da distancia, polo tanto trátase dun campo central.
- O seu sentido depende do signo de Q. Se a carga é negativa, o campo eléctrico diríxese cara á carga, se é positiva, alónxase de esta.

Isto quere dicir que o sentido do campo coincide co sentido do movemento que adquiriría unha carga testemuña positiva colocada en repouso nun punto do campo.

A afirmación anterior pode comprobarse a partir da expresión [2] da intensidade do campo:

$$\vec{F} = Q'\vec{E} \quad [2]$$

Desta expresión despréndese que, se Q' é positiva, a forza que actuaría sobre ela ten o sentido do campo e, xa que logo, a carga Q' afástase de Q. Pola contra, se a carga Q' fose negativa, a forza e a intensidade do campo teñen sentidos opostos, e Q' achégase a Q.

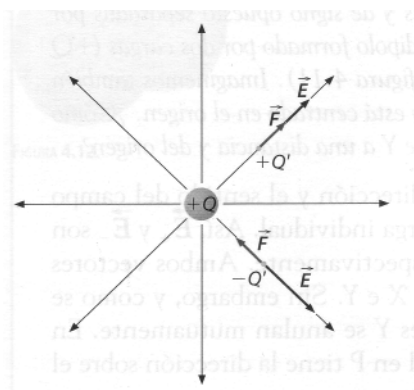


Figura 2

b) Principio de superposición do campo eléctrico

O principio de superposición cúmprese tamén para a intensidade do campo eléctrico.

A intensidade do campo creado por un número calquera de cargas puntuais é igual á suma vectorial dos campos creados por cada unha das cargas nese punto.

Matemáticamente exprésase da seguinte forma:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = k \left(\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \right) \vec{u}_{r_i}$$

Exemplo

Dadas dúas cargas eléctricas, $Q_1 = 100 \mu C$ situada en A (-3,0) e $Q_2 = -50 \mu C$, situada en B (3,0) (as coordenadas en metros), calcula o valor do campo eléctrico no punto (0,0).

Dato: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$

Solución: aplicando o principio de superposición:



$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 10^5 \text{ NC}^{-1} \Rightarrow \vec{E}_1 = 10^5 \vec{i} (\text{NC}^{-1})$$

$$E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{3^2} = 5 \cdot 10^4 \text{ NC}^{-1} \Rightarrow \vec{E}_2 = 5 \cdot 10^4 \vec{i} (\text{NC}^{-1})$$

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 10^5 \vec{i} + 5 \cdot 10^4 \vec{i} = 1,5 \cdot 10^5 \vec{i} (\text{NC}^{-1})$$

c) Representación do campo eléctrico mediante liñas de forza

O campo eléctrico pode representarse graficamente por medio dunhas liñas imaxinarias, chamadas liñas de forza ou liñas de campo, as cales son tanxentes en cada punto á dirección do vector intensidade de campo eléctrico, \vec{E} , e asignámoslle o mesmo sentido que o do vector \vec{E} .

Cando o campo é creado por unha soa carga puntual, as liñas de forza representan as traxectorias que seguirían as cargas positivas abandonadas no campo, sendo radiais, xa que as forzas electrostáticas son centrais. Por convenio saen das cargas positivas (fontes) ou do infinito e terminan no infinito ou nas cargas negativas (sumidoiros) (figura 3).

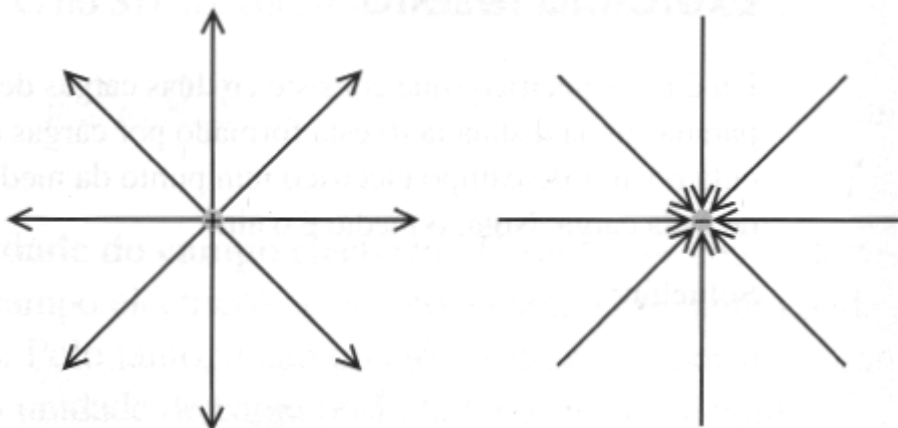


Figura 3

Para o caso de dúas cargas puntuais de igual valor, as liñas de forza son as indicadas a continuación, segundo se trate de cargas de distinto signo ou de igual signo (figura 4).

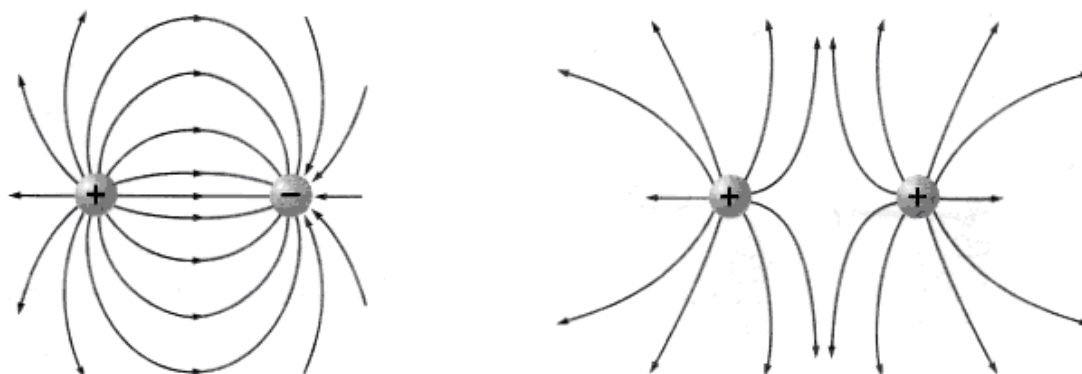


Figura 4

Dúas liñas non poden cortarse nunca como consecuencia do principio de superposición. A cada punto do espazo lle corresponde un único vector \vec{E} resultante; como as liñas de forza son tanxentes a \vec{E} , en un mesmo punto non pode haber dúas liñas de forza.

2.2. Descrición e representación do campo eléctrico desde un punto de vista enerxético

Ao igual que ocorre coa interacción gravitatoria, a interacción descrita pola lei de Coulomb é conservativa. Este feito é consecuencia do seu carácter central. Esta propiedade conservativa permítenos asociar unha enerxía potencial á posición relativa dunha carga testemuña no seo dun campo eléctrico.

a) Enerxía potencial eléctrica

O signo da enerxía potencial asociada á interacción electrostática depende do signo das cargas que interveñen. Esta é unha das características que distinguen a interacción electrostática da gravitatoria (que é sempre negativa).

Analicemos agora cal é a expresión da enerxía potencial electrostática en función do signo das cargas que interveñen.

O traballo realizado polo campo orixinado por unha **carga Q positiva** para achegar desde o infinito ata unha distancia r da orixe unha carga calquera ven dado pola expresión:

$$W = \int_{\infty}^r \vec{F} d\vec{r}$$

- **Cargas de distinto signo.**

Se as cargas son de distinto signo, a forza é atractiva, terá signo negativo.

$$F = -k \frac{QQ'}{r^2}$$

Polo que:

$$W = -kQQ' \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = -kQQ' \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = k \frac{QQ'}{r}$$

Vemos que o traballo é positivo o que significa que é o campo o que realiza o traballo de acercamento debido ó carácter atractivo da interacción. E posto que a forza eléctrica é conservativa, o traballo solo depende do punto inicial e final:

$$W = -\Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(r) = 0 - E_p(r)$$

Por tanto, a enerxía potencial asociada á interacción electrostática entre cargas de distinto signo é negativa:

$$E_p(r) = -k \frac{QQ'}{r}$$

- **Cargas do mesmo signo.**

Seguimos o mesmo procedemento ca no caso anterior, pero coma neste caso a forza entre cargas é repulsiva, terá signo positivo:

$$F = k \frac{QQ'}{r^2}, \text{ e por tanto}$$

$$W = kQQ' \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = kQQ' \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r = -k \frac{QQ'}{r}$$

Neste caso vemos que o traballo realizado pola forza eléctrica para achegar cargas do mesmo signo é negativo, o que significa que o campo non realiza o traballo de acercamento e que, debido ó carácter repulsivo da interacción, para achegar cargas do mesmo signo, debemos realizar traballo contra o campo.

Razoando de igual forma ca no caso anterior, deducimos que a enerxía potencial asociada á interacción electrostática entre cargas do mesmo signo é positiva:

$$E_p(r) = k \frac{QQ'}{r}$$

Como consecuencia, a enerxía potencial do sistema aumenta co acercamento, como corresponde a unha interacción repulsiva.

b) Enerxía potencial dun sistema de n cargas

Se o sistema está formado por máis de dúas cargas, a enerxía potencial total obtense calculando a enerxía potencial por cada par de cargas e sumando alxebraicamente todos os termos. Por exemplo, se o sistema está constituído por tres cargas, a enerxía potencial do sistema será:

$$E_{p\text{ sistema}} = k \left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} \right)$$

c) *Potencial do campo eléctrico.*

Para definir o campo desde unha perspectiva enerxética, establecemos como magnitude representativa do mesmo o potencial do campo, V , en un punto, entendido como a enerxía potencial que correspondería á unidade de carga testemuña positiva colocada nese unto.

É dicir, se Q' é a carga testemuña colocada en dito punto, entón:

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{Q'}$$

Por tanto, no caso de cargas puntuais, o potencial do campo terá a forma:

$$V(r) = k \frac{Q}{r}$$

En consecuencia:

- O potencial nun punto é negativo se a carga que orixina o campo é negativa.
- O potencial é positivo se a carga que orixina o campo é positiva.

A unidade de potencial eléctrico no Sistema Internacional é o julio por cuolombio (J/C), que se denomina voltio (V).

Co concepto de enerxía potencial eléctrica, $W_{AB} = -(E_{pB} - E_{pA})$, e de potencial eléctrico, $V_A = \frac{E_{pA}}{Q'}$, podemos relacionar a diferenza de potencial eléctrico entre dous puntos co traballo feito pola forza conservativa do campo:

$$\left. \begin{array}{l} W_A^B = -\Delta E_p \\ \Delta E_p = Q' \cdot \Delta V \end{array} \right\} \Rightarrow W_A^B = -Q' \cdot \Delta V = -Q' \cdot (V_B - V_A)$$

En función do traballo, o potencial eléctrico creado por unha carga Q representa o traballo -cambiado de signo- feito pola forza conservativa do campo para levar a unidade de carga positiva desde o infinito ata o punto considerado. Equivale ao traballo que nós temos que facer para levar con velocidade constante a unidade de carga positiva desde o infinito ata ese punto.

d) *Potencial debido a un sistema de n cargas*

No caso de ter varias cargas puntuais ($Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$), o potencial nun punto debido a todas elas é a suma alxebrica dos potenciais orixinados por cada unha delas por separado. É dicir:

$$V_{total} = \sum_{i=1}^n V_i = k \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \dots + \frac{Q_n}{r_n} \right) = k \left(\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \right)$$

Polo tanto, a enerxía potencial que adquire unha carga Q' colocada en dito punto é:

$$E_p = Q'V_{total}$$

Exemplo

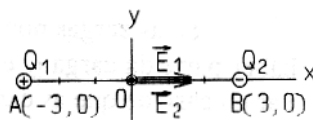
Dadas dúas cargas eléctricas, $Q_1 = 100 \mu C$ situada en A (-3,0) e $Q_2 = -50 \mu C$, situada en B (3,0) (as coordenadas en metros), calcula:

- O valor do potencial no punto (0,0).
- O traballo que hai que realizar para trasladar unha carga de -2 C dende o infinito ata (0,0)

Dato: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$

Solución: aplicamos a fórmula para o cálculo do potencial creado por un sistema de n cargas sendo neste caso $n = 2$

$$V_{total} = \sum_{i=1}^2 v_i = k \left(\sum_{i=1}^2 \frac{Q_i}{r_i} \right)$$



$$V_0 = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{100 \cdot 10^{-6}}{3} + \frac{(-50 \cdot 10^{-6})}{3} \right) = 1,5 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$$b) W_{\infty}^0 = -Q' \cdot \Delta V = -Q' \cdot (V_0 - v_{\infty}) = -Q' \cdot (V_0 - 0)$$

$$W_{\infty}^0 = -(-2) \cdot (1,5 \cdot 10^5 - 0) = 3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Como o traballo calculado é positivo, é realizado de forma espontánea pola forza do campo: a carga de -2 C desprázase por acción da forza do campo desde o infinito ata o punto (0,0): as cargas negativas desprázanse espontaneamente desde as zonas de menos potencial ($V_{\infty} = 0 \text{ V}$) ás de máis potencial ($V_{(0,0)} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ V}$)

e) *Diferenza de potencial entre dous puntos dun campo eléctrico. Superficies equipotenciais. Diferenza de potencial nun campo eléctrico uniforme*

Cando situamos unha carga de proba Q' no seo dun campo eléctrico, este exerce sobre ela unha forza $\vec{F} = Q'\vec{E}$. Esta forza realiza un traballo a medida que a carga desprázase baixo a súa acción no campo. Así pois, o traballo realizado polo campo ao desprazar a carga entre dous puntos calquera A e B é:

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = Q' \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

Este traballo, como corresponde ao carácter conservativo da forza dada pola lei de Coulomb, non depende da traxectoria, senón unicamente do punto inicial e do final. Debido tamén a este carácter conservativo, o traballo realizado ao desprazar a carga entre A e B tradúcese nunha diminución da enerxía potencial; de modo que:

$$-\Delta E_p = Q' \int_A^B \vec{E} d\vec{r} \Rightarrow \Delta E_p = -Q' \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

Polo que:

$$E_p(B) - E_p(A) = -Q' \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

Pola definición de potencial, V , nun punto, podemos escribir:

$$\frac{E_p(B) - E_p(A)}{Q'} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

A diferenza de potencial entre dous puntos A e B equivale ao traballo que debe realizarse contra o campo para desprazar a unidade de carga testemuña desde A ata B, supondo que non varía a súa enerxía cinética:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} d\vec{r} \quad [3]$$

Isto débese a que a integral que aparece na expresión [3] representa o traballo que realiza o campo por unidade de carga. Con todo, o signo negativo indica que o traballo por unidade de carga efectúase en contra do campo.

Debido ao carácter conservativo que ten a interacción electrostática é posible establecer que, se a unidade de carga testemuña se despraza sempre en sentido perpendicular ao campo en cada un dos puntos (de maneira que $d\vec{r}$ é perpendicular a \vec{E}), o traballo é cero, o que significa que non existe variación de potencial.

Todos os puntos que teñen o mesmo valor de potencial conforman o que se denomina unha **superficie equipotencial**. En cada punto de devandita superficie, o vector \vec{E} é perpendicular a ela. Se non fose así, o campo tería unha compoñente paralela á superficie que podería actuar sobre as cargas e efectuar un traballo eléctrico, o cal está en contra da propiedade fundamental das superficies equipotenciais en tanto que son superficies de traballo nulo.

Logo:

Cando unha carga se despraza por unha superficie equipotencial, o campo eléctrico non realiza traballo algún sobre ela.

$$\left. \begin{array}{l} W_A^B = -\Delta E_p \\ \Delta E_p = Q' \cdot \Delta V \end{array} \right\} \Rightarrow W_A^B = -Q' \cdot \Delta V = -Q' \cdot (V_B - V_A)$$

E dado que sobre unha superficie equipotencial V é constante,

$$\Delta V = 0 \text{ e } W = 0$$

Por outra banda, dúas superficies equipotenciais non se poden cortar, xa que nos puntos de corte habería dous valores de potencial.

E por último, a superficie dun condutor cargado e en equilibrio é unha superficie equipotencial; do contrario, as cargas desprazaríanse sobre ela, o que entra en contradición coa condición de equilibrio.

Exemplo

Unha carga de $+5\,\mu\text{C}$ encóntrase na orixe de coordenadas. Calcula:

- O potencial que esta carga crea nos puntos (en metros) (8,0,0), (0,8,0) e (0,0,8)
 - Estes puntos pertencen a unha superficie equipotencial?
- Supón que a carga se atopa no baleiro.

Dato: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$

Solución: O potencial creado por unha carga puntual calcúlase coa fórmula: $V(r) = k \frac{Q}{r}$

$$V = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{8} = 5625 \text{ V}$$

O potencial é o mesmo para os tres puntos

b) Os puntos que teñen o mesmo potencial forman parte dunha superficie (ou liña) equipotencial, polo que os tres puntos indicados pertencen a unha superficie equipotencial.

- **Diferencia de potencial nun campo eléctrico uniforme**

Unha consecuencia de especial importancia obtense da expresión da diferenza de potencial se consideramos que o campo eléctrico é uniforme. Neste caso, \vec{E} sale fora da integral ao ser constante, polo que se obtén:

$$V_B - V_A = -\vec{E} \int_A^B d\vec{r} = -\vec{E} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

O desprazamento entre A e B será:

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Consideremos o caso máis simple no cal o campo eléctrico ten a dirección do eixe X e que por tanto, $\vec{E} = E\vec{i}$.

Así pois, ao facer o produto escalar, obterase:

$$V_B - V_A = -E(x_B - x_A)$$

Ou ben:

$$V_B - V_A = -Ed$$

onde d é a distancia entre os puntos A e B medida na dirección do campo.

Exemplo

Un campo eléctrico uniforme de valor 500 N/C ten a dirección do eixe X. Se se deixa en liberdade unha carga de $+5\mu\text{C}$ que se atopa inicialmente en repouso na orixe de coordenadas, ca será a diferenza de potencial entre a orixe e o punto (0,6)?

Solución: A diferenza de potencial entre ambos os dous puntos será:

$$V_B - V_A = -Ed = -500 \cdot 6 = -3000 \text{ V}$$

2.3. Relación entre a intensidade de campo eléctrico, \vec{E} , e o potencial eléctrico, V

A partir das expresións deducidas no apartado anterior, podemos establecer a relación entre as dúas formas de representar o campo eléctrico: mediante potenciais ou mediante intensidades. Imos analizar, pois, como pasar dunha representación escalar do campo (en función do potencial) a unha representación vectorial (en función da intensidade).

Empecemos polo exemplo máis sinxelo: o dun campo eléctrico constante na dirección do eixo X. Nese caso, e segundo vimos:

$$V_B - V_A = -E(x_B - x_A) \Rightarrow \Delta V = -E_x \Delta x$$

Se consideramos un desprazamento diferencial dx , a expresión anterior, escrita en forma diferencial, será:

$$dV = -E_x dx$$

Xa que logo:

Podemos coñecer o valor dun campo eléctrico uniforme derivando a expresión do potencial con respecto á coordenada en función da cal varía e antepondo o signo negativo:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

En consecuencia, o campo quedaría expresado como segue:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{i}$$

Con todo, o máis frecuente é que o potencial varíe en función das tres coordenadas x, y e, z. Nese caso, podemos determinar as compoñentes do campo eléctrico derivando parcialmente o potencial con respecto a cada unha das coordenadas (recorda que iso significa derivar con respecto a unha coordenada supoñendo que as demais son constantes). É dicir:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

E, xa que logo:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) = -\vec{\text{grad}} V$$

O operador gradiente adoita escribirse a miúdo como "operador nabla ($\vec{\nabla}$) vectorial"; así, teremos que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Exemplo

O potencial en certa rexión varía segundo a expresión:

$$V(r) = 3x^3y + 2xy^4z - y^4z^2 \text{ V}$$

Deduce a expresión para o campo eléctrico en dita rexión e calcula o seu valor no punto (2,2,2).

As compoñentes rectangulares de campo son:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(9x^2y + 2y^4z) \text{ N/C}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -(3x^3 + 8xy^3z - 4y^3z^2) \text{ N/C}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -(2xy^4 - 2y^4z) \text{ N/C}$$

Por tanto:

$$\vec{E} = -(9x^2y + 2y^4z)\vec{i} - (3x^3 + 8xy^3z - 4y^3z^2)\vec{j} - (2xy^4 - 2y^4z)\vec{k} \text{ N/C}$$

Substituíndo as coordenadas do punto obtense:

$$\vec{E}(2,2,2) = -136\vec{i} - 152\vec{j} \text{ N/C}$$

cuxo valor é:

$$E(2,2,2) = \sqrt{(-136)^2 + (-152)^2} = 203,96 \text{ N/C}$$

2.4. Movemento de partículas cargadas nun campo eléctrico uniforme

Aplicaremos agora os coñecementos que adquirimos nesta unidade, combinados cos que sabemos de mecánica, para analizar o movemento de partículas cargadas no seo dun campo eléctrico uniforme.

a) Movemento de partículas que inciden na dirección do campo

Supoñamos que unha partícula cargada de masa m e carga Q incide nunha rexión onde existe un campo eléctrico uniforme, \vec{E} , cunha velocidade inicial \vec{v}_0 que ten a dirección e sentido do campo. Desde o instante en que a partícula entra na devandita rexión, actúa sobre ela unha forza $\vec{F} = Q\vec{E}$ na dirección do campo. O traballo que realiza esa forza sobre a partícula cando esta se

despraza unha distancia d é:

$$W = -Q\Delta V = -Q(-Ed) = QEd$$

Como consecuencia deste traballo, a partícula alcanza unha velocidade final v , de xeito que a variación de enerxía cinética nese traxecto é igual ao traballo realizado polo campo. Se supoñemos que a masa da partícula se mantén constante, entón:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = QEd \Rightarrow v^2 = v_0^2 + \frac{2QEd}{m}$$

Desto conclúese que:

- Se a carga é negativa, a súa velocidade irá diminuindo ata inverter o seu movemento
- A igualdade de velocidade inicial e carga, alcanzan maior velocidade as partículas máis lixeiras.

Exemplo

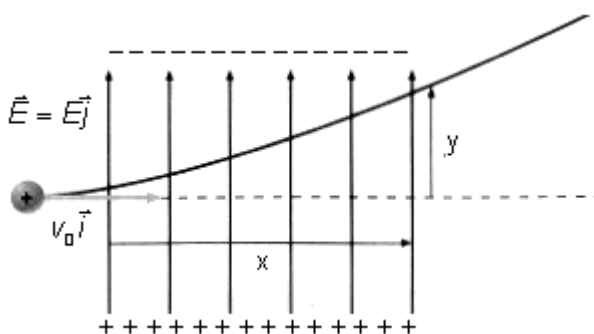
Un electrón que ten unha velocidade inicial de $3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ introdúcese nunha rexión na que existe un campo eléctrico uniforme dirixido ao longo da dirección do movemento do electrón. Cal é a intensidade do campo eléctrico se o electrón percorre 20 cm desde a súa posición inicial antes de deterse?

Solución: a variación da enerxía cinética neste traxecto é igual ao traballo realizado polo campo. Como neste caso a velocidade final é nula:

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = QEd \Rightarrow E = -\frac{mv_0^2}{2Qd} = -\frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^5)^2}{2 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot 0,2} = 1,28 \text{ N/C}$$

b) Movemento de partículas que inciden perpendicularmente ó campo

Supoñamos que a partícula anterior, cargada positivamente, entra con velocidade inicial $v_0 \vec{i}$ nunha rexión onde existe un campo eléctrico uniforme \vec{E}_j , como se indica na figura.



Ao entrar na rexión, actúa sobre a partícula unha forza perpendicular a súa traxectoria inicial de valor $F_y = QE$. En consecuencia, prodúcese unha aceleración na dirección do campo que terá como valor:

$$QE = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{QE}{m}$$

Por tanto, o seu movemento na dirección do eixe X virá dado por:

$$x = v_0 t$$

mentres que na dirección do eixe Y será:

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{QE}{2m} t^2$$

Combinando ambas expresións, podemos obter a ecuación da súa traxectoria, que é a dunha parábola:

$$y = \frac{QE}{2mv_0^2} x^2$$

2.5. Cálculo do campo eléctrico e o potencial mediante o teorema de Gauss

Vimos como achar o campo eléctrico creado por unha carga puntual e que para calcular o creado por unha distribución discreta de cargas aplicamos o principio de superposición. Agora ben, como calculamos o campo eléctrico creado por unha distribución continua de carga eléctrica?

O teorema de Gauss permítenos determinar o campo eléctrico creado por distribucións continuas de carga con algunhas simetrías sinxelas.

Antes de enunciar o teorema de Gauss, é necesario introducir unha magnitude chamada fluxo eléctrico.

O fluxo do campo eléctrico ou fluxo eléctrico, Φ , é unha medida do número de liñas de forza que atravesan unha superficie dada.

Para o cálculo do fluxo eléctrico distinguimos dúas posibles situacións:

- Campo uniforme e superficie plana
- Campo variable e superficie calquera

- **Campo uniforme e superficie plana**

Definimos o vector \vec{S} coma un vector perpendicular á superficie S e de módulo igual ó valor desa superficie.

O fluxo eléctrico é igual ó produto escalar:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES \cos \theta$$

O fluxo eléctrico representa o número de liñas de campo que atravesan a superficie S', que é a proxección de S na dirección perpendicular as liñas de campo (figura 5).

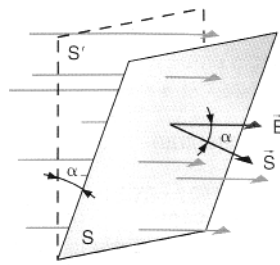


Figura 5

- Campo variable e superficie calquera**

Dividimos a superficie S en pequenos elementos infinitesimais dS , e para cada un deles definimos o seu correspondente vector superficie $d\vec{S}$, perpendicular á superficie infinitesimal e de módulo dS (figura 6).

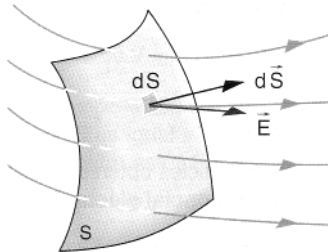


Figura 6

O fluxo total a través da superficie S obtense sumando todas as contribucións

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

a) *Teorema de Gauss*

O fluxo eléctrico que atravesa unha superficie pechada depende unicamente da carga eléctrica total que hai no seu interior e do medio no que se atopa. Este resultado recóllese no teorema de Gauss:

O fluxo do campo \vec{E} debido a unha carga puntual Q a través dunha superficie cerrada S é igual a cero se a carga é exterior ao recinto limitado pola superficie S, e igual a $\frac{Q}{\epsilon}$ se a carga é interior ao mesmo; ou en termos matemáticos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{se } Q \text{ é exterior} \\ \frac{Q}{\epsilon} & \text{se } Q \text{ é interior} \end{cases}$$

onde o símbolo \oint indica que a integral propia do fluxo se estende sobre unha superficie pechada.

En forma máis abreviada é posible expresar o enunciado do teorema de Gauss do modo seguinte:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon}$$

Exemplo

Tres cargas: $Q_1 = -10 \mu\text{C}$, $Q_2 = 4 \mu\text{C}$ e $Q_3 = 6 \mu\text{C}$, están situadas, respectivamente, nos puntos (0,0), (5,0) e (0,3), coordenadas que veñen dadas en metros. Calcula:

- O fluxo do campo eléctrico a través dunha esfera con centro a carga Q_1 e 4 m de raio.
- Cal sería o fluxo para unha esfera con igual centro e de 6 m de raio?

Solución:

a) A esfera de 4 m de raio, con centro en Q_1 , contén no seu interior as cargas Q_1 e Q_3 , de xeito que a carga neta no seu interior é: $Q_{\text{net}} = -4 \mu\text{C}$

Aplicando o teorema de Gauss podemos coñecer o fluxo a través da devandita esfera:

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{Q_{\text{total}}}{\epsilon_0} = 4 \cdot \pi \cdot k_0 \cdot Q = 4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^{-6}) = -4,52 \cdot 10^5 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-1}$$

O signo menos significa que entran pola superficie da esfera máis liñas de forza das que saen.

b) Se a esfera é de 6 m de raio, as tres cargas estarían pechadas no seu interior, sendo a carga neta cero, o que significaría que saírían pola superficie da esfera o mesmo número de liñas de forza que as que entraran, resultando o fluxo nulo.

b) Aplicacións do teorema de Gauss ó cálculo do campo \vec{E}

O teorema de Gauss facilita notablemente o cálculo do campo \vec{E} debido a distribucións continuas de carga sempre e cando estas teñan unha forma xeométrica suficientemente sinxela e simétrica. O procedemento consta, basicamente, das seguintes etapas:

1. Elíxese unha superficie gaussiana (imaxinaria e pechada) sobre a que aplicar o teorema de Gauss, con dúas condicións: que a superficie pase polo punto P no que se desexa calcular o campo \vec{E} e que respecte -ou conveña a- a xeometría (cilíndrica, esférica, etc.) da distribución.

2. Calcúlase o fluxo do vector \vec{E} a través dela tendo en conta que só se a xeometría da distribución e, por tanto, da superficie gaussiana correspondente é suficientemente simétrica será posible despexar finalmente o campo E da integral.

3. Aplícase o teorema de Gauss $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon}$ e despéxase o módulo do campo \vec{E} .

No que segue utilizaremos reiteradamente o anterior procedemento no estudo do campo electrostático debido a diferentes distribucións continuas de carga, lineais, superficiais e volumínicas, respectivamente.

a) Campo debido a unha distribución rectilínea homoxénea e indefinida de carga

Sexa λ a densidade lineal de carga da distribución. Ao ser esta homoxénea, $\lambda = \frac{Q}{l}$, sendo Q a carga total e l a lonxitude da "liña de carga".

Dada a simetría da distribución elixiremos como superficie gaussiana unha superficie cilíndrica que pasa polo punto P separado unha distancia r da liña de carga.

O fluxo de estará \vec{E} formado, en principio, pola contribución debida ao fluxo a través das bases máis a do fluxo a través da superficie lateral.

O feito de supor a distribución indefinida equivale a admitir que é o suficientemente longa como para desprezar a superficie das bases fronte á lateral e, por conseguinte, o fluxo correspondente. Xa que logo, o fluxo total Φ virá dado por

$$\Phi = \Phi_{lat} = \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

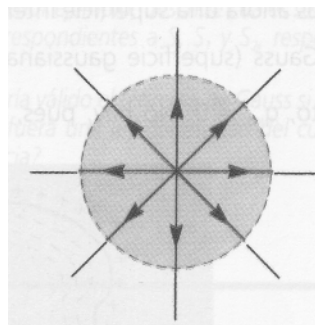
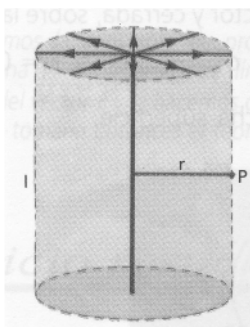


Figura 7

Dada a simetría radial das liñas de forza, é dicir, do campo \vec{E} , os vectores \vec{E} e $d\vec{S}$ son paralelos, de modo que $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$ e a equidistancia da superficie gaussiana respecto da liña de carga asegura que E é constante sobre toda a superficie de integración; por tanto,

$$\Phi = \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{lat}} E \cdot dS = E \int_{S_{lat}} dS = E S_{lat} = E \cdot 2\pi r l$$

Aplicando o teorema de Gauss, tense: $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon} = \frac{\lambda l}{\epsilon}$

e combinando as dúas últimas ecuacións, resulta: $E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon}$

é dicir, $E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon}$, ou en forma vectorial, $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} \vec{u}_r$.

Exemplo

Sobre un fío metálico rectilíneo de 3,0 m de lonxitude situado no baleiro deposítase unha cantidade de carga eléctrica $Q = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ C}$. Determina a intensidade do campo E nun punto

simétrico respecto dos extremos do fío e que dista 0,20 m deste.

Dato: $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Solución: segundo o teorema de Gauss, o campo debido a unha distribución de carga rectilínea, homoxénea e indefinida ven dada por

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon}$$

e nunha primeira aproximación un fío condutor cargado pode considerarse como unha distribución lineal de carga.

Dado que, ademais, se trata dunha distribución homoxénea ou uniforme de carga, λ é constante e igual ao cociente entre a carga total distribuída Q e a lonxitude do fío, l , $\lambda = \frac{Q}{l}$; por tanto,

$$E = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0} = \frac{2k_0 Q}{lr} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 0,2} = 12 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

b) Campo nas proximidades da superficie dun condutor

En todo corpo condutor cargado, illado e en equilibrio a carga distribúese uniformemente pola superficie; trátase, xa que logo, dunha distribución continua e superficial de carga con densidade superficial $\sigma = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{S}$, sendo Q a carga libre presente no condutor e S a súa superficie total. En tales casos o campo \vec{E} é perpendicular á superficie do condutor; de non selo, a compoñente do campo paralelo a devandita superficie sería distinta de cero e actuaría sobre as cargas libres producindo o seu desprazamento, o cal está en contra da hipótese inicial de equilibrio das cargas.

De acordo co anterior, a elección da superficie gaussiana para o cálculo de corresponderá \vec{E} a unha superficie cilíndrica de base $d\vec{S}$ elemental que contén o punto no que se desexa calcular \vec{E} como a representada na figura 8.

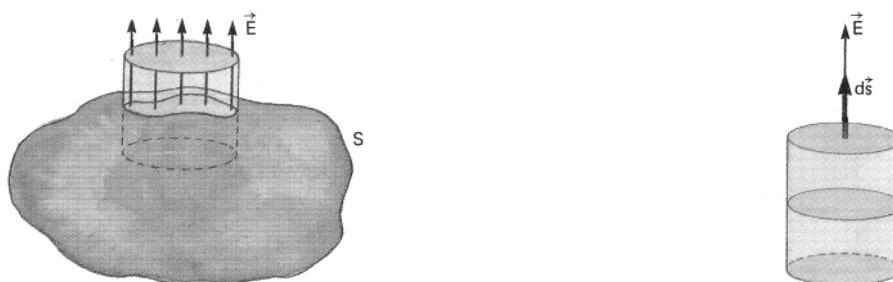


Figura 8

O fluxo a través da superficie lateral será nulo, pois as liñas de forza son paralelas a devandita superficie; o fluxo a través da base inferior é nulo, pois o campo no interior do condutor é nulo $E = 0$, logo o fluxo total será igual ao fluxo a través da base superior; é dicir,

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS.$$

Aplicando o teorema de Gauss, tense: $d\Phi = \frac{dQ}{\epsilon} = \frac{\sigma dS}{\epsilon}$, onde dQ é o elemento de carga contido no interior da superficie gaussiana cilíndrica.

Igualando as expresións anteriores, resulta:

$$E dS = \sigma \frac{dS}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

c) Campo debido a unha lámina cargada nas proximidades da súa superficie.

Procedendo de forma análoga ao caso anterior tense que o fluxo lateral é nulo, logo o fluxo total será igual á suma do fluxo; neste caso, a través das dúas bases da superficie gaussiana cilíndrica, é dicir, $\Phi = ES + ES = 2ES$.

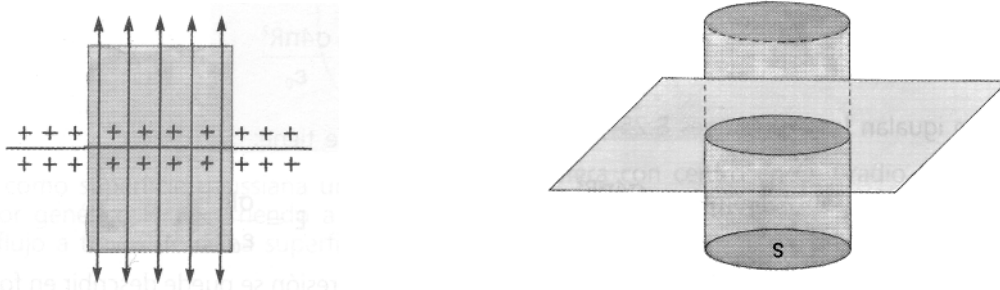


Figura 9

Segundo o teorema de Gauss: $\Phi = \frac{Q}{\epsilon} = \frac{\sigma S}{\epsilon}$

logo

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

d) Campo debido a unha esfera condutora

Debido ao comportamento dos condutores, anteriormente descrito, unha esfera condutora cargada constitúe unha distribución superficial, homoxénea e esférica de carga, algo así como un cascarón esférico de carga. A esfera en cuestión poderá ser ou non maciza de masa, pero se é metálica estará oca de carga libre. Sexa R o radio da esfera, O o seu centro, P o punto xenérico onde se desexa calcular o campo, r a distancia de O a P e $\sigma = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{S_{\text{esf}}} = \frac{Q}{4\pi R^2}$ a densidade superficial de carga constante sobre a esfera condutora.

➤ En puntos interiores ($r < R$)

De acordo co establecido anteriormente no interior dun condutor cargado, illado e en equilibrio, o campo é cero, logo tamén neste caso será $E = 0$.

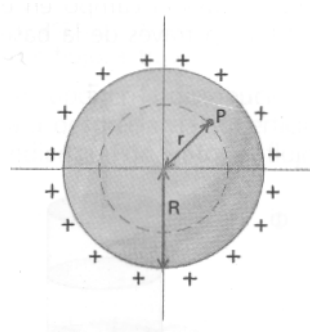


Figura 10

➤ En puntos exteriores ($r > R$)

Elixiendo como superficie gaussiana unha esfera con centro en O e radio r , o fluxo a través seu virá dado por

$$\Phi = \int_{S_{\text{gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{\text{gauss}}} E \cdot dS = E \int_{S_{\text{gauss}}} dS = E 4\pi r^2$$

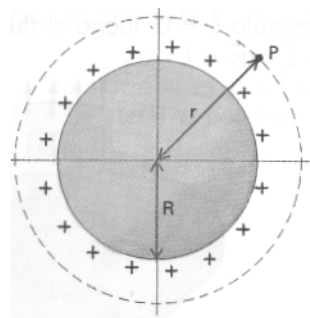


Figura 11

xa que, debido á simetría da distribución, o campo correspondente presenta unha configuración radial, sendo \vec{E} paralelo a $d\vec{S}$ en calquera punto da esfera gaussiana S_{gauss} , co cal $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$. Pero, ademais, ao ser a esfera gaussiana concéntrica respecto da esfera cargada, o valor ou módulo do campo \vec{E} é constante en todos os puntos daquela, o que fai posible sacar E da integral correspondente.

Aplicando agora o teorema de Gauss sobre a devandita superficie gaussiana na esfera condutora e expresando Φ en función da densidade superficial de carga σ , resulta:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon} = \frac{\sigma S_{\text{esf}}}{\epsilon} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon} \quad [4]$$

E igualando

$$E 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon r^2}$$

Se se desexa expresar E en función da carga total Q depositada sobre a esfera condutora,

combinando as ecuacións anteriores, resulta:

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \quad \text{ou, en forma vectorial, } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{u}_r$$

Cando se compara a anterior ecuación coa que corresponde ao campo debido a unha carga puntual, apréciase que son idénticas. Xa que logo, pódese concluír que o campo debido a unha esfera condutora cargada (distribución superficial e homoxénea de carga) é igual ao campo que produciría toda a carga da esfera suposta concentrada no seu centro xeométrico O.

➤ Na superficie (r=R)

A expresión do campo nos puntos da superficie obtérase facendo $r = R$ na ecuación 4, co que resulta $E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, como corresponde á superficie de calquera condutor.

c) Aplicacións do teorema de Gauss ó cálculo do potencial V

A relación existente entre o potencial e o campo permite usar as expresións de \vec{E} obtidas mediante o teorema de Gauss, para calcular a expresión do potencial V debido á distribución continua de carga correspondente, dun modo relativamente sinxelo. Ese é o procedemento que aplicaremos a continuación a algunhas distribucións continuas de interese.

➤ Potencial debido a unha distribución rectilínea, homoxénea e indefinida de carga

Do apartado 2.2.e) temos que

$$V(r) = -\int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} + V(r_0)$$

Dado que, neste caso, \vec{E} é central, $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot dr$. Ademais, e según o teorema de Gauss, $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$; por tanto,

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} + V(r_0) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} [\ln r]_{r_0}^r + V(r_0)$$

Recordando que $-\ln r = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$, a anterior expresión pode escribirse na forma

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \left[\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{r_0} \right] + V(r_0)$$

Co fin de deixar V como unha función solo de r convén, neste caso, elixir a orixe de potenciais en $r_0 = 1$. Deste modo, $\ln \frac{1}{r_0} = \ln 1 = 0$, e o facer, por convenio, $V(r_0) = 0$, resulta, finalmente,

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{1}{r}$$

onde λ é a densidade lineal de carga da distribución e r a distancia do punto P á liña de carga considerada.

Neste caso a condición implícita adicional é $V(1)=0$, de modo que solo con esta condición é válida a anterior ecuación de V como función de r .

➤ **Potencial debido a unha distribución superficial, homoxénea e esférica de carga (esfera condutora)**

1) *En puntos exteriores ($r > R$)*

A expresión do módulo do campo \vec{E} , tamén central, en puntos exteriores, ven dada pola ecuación (deducida no apartado 2.4.a):

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon r^2}$$

Por tanto, e de acordo coa ecuación $V(r) = -\int_{r_0}^r \vec{E} d\vec{r} + V(r_0)$, temos que,

$$V(r) = -\int_{r_0}^r \frac{\sigma R^2}{\epsilon r^2} + V(r_0) = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon r^2} \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_0}^r + V(r_0)$$

é dicir,

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] + V(r_0)$$

facendo $r_0 = \infty$ e $V(r_0 = \infty) = 0$ resulta, finalmente,

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon r}$$

2) *En puntos da superficie ($r=R$)*

Para determinar a expresión de V nos puntos da superficie basta con facer $r=R$ na ecuación anterior, co que resulta:

$$V(R) = \frac{\sigma R}{\epsilon}$$

3) *En puntos interiores ($r < R$)*

Para os puntos interiores $E = 0$, e recurrido de novo á ecuación xenérica $V(r) = -\int_{r_0}^r \vec{E} d\vec{r} + V(r_0)$, agora con $r_2 = r$ e $r_1 = R$, tense:

$$V(r) = -\int_R^r E dr + V(R)$$

e, por tanto,

$$V(r) = V(R) = \frac{\sigma R}{\epsilon}$$

E dicir, o potencial no interior é constante, como corresponde á integral de cero, e coincide co que posúe unha esfera na superficie. A figura 12 ilustra graficamente a variación de V coa distancia neste tipo de distribución de carga.

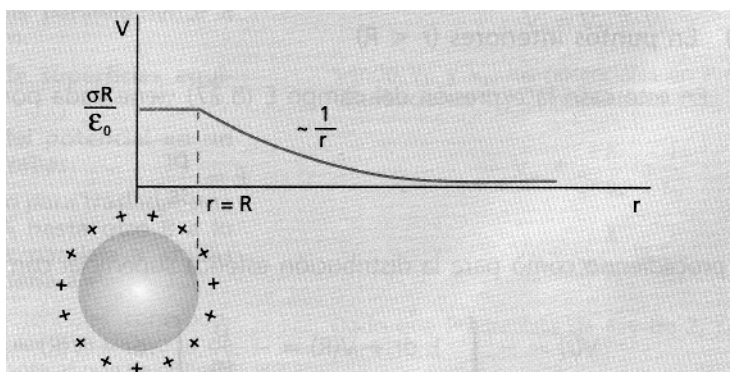


Figura 12

Volvendo de novo á expresión de V para puntos exteriores e recordando que ao ser homoxénea a densidade superficial σ é constante e igual a $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$, apréciase que expresada en función da carga total Q depositada na esfera, a ecuación do potencial tomará, neste caso, a mesma forma que a que correspondería a unha carga puntual Q situada no centro da esfera. En efecto,

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{R^2}{\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$$

o que simplifica moito este tipo de distribucións.

Exemplo

Sobre unha esfera metálica de 8 cm de raio deposítase unha carga neta de $-4\mu\text{C}$. Calcular o potencial electrostático (supoñendo que o medio é o baleiro).

- Sobre a superficie.
- Nun punto interior situado a 4 cm do centro O da esfera.
- Nun punto exterior situado a 15 cm de O .

Solución: A carga neta distribúese nos corpos metálicos unicamente sobre a súa superficie, de modo que a esfera metálica cargada comportarase como unha distribución superficial e esférica de carga, é dicir, como un cascarón de carga esférico. En tal caso, é sabido que o potencial electrostático ven dado por:

$$V = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} & \text{para puntos exteriores } (r > R) \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} & \text{para puntos interiores ou para puntos da superficie } (r \leq R) \end{cases}$$

Dado que a distribución de carga é homoxénea e esférica, terase:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

co cal para as anteriores expresións de V convértense en:

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & (r \leq R) \end{cases}$$

que corresponden á expresión do potencial para unha carga puntual Q . De acordo co anterior terase:

a) Sobre a superficie:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^{-6})}{8 \cdot 10^{-2}} = -4,5 \cdot 10^5 \text{ V}$$

b) Nun punto interior:

O potencial é constante no interior e igual ó da superficie

c) Nun punto exterior:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^{-6})}{15 \cdot 10^{-2}} = -2,4 \cdot 10^5 \text{ V}$$