

FORZAS CENTRAIS

1. Modelos do universo

2. Movemento circular

2.1 Conceptos básicos

- a) Repaso de conceptos cinemáticos do movemento circular*
- a) Momento dunha forza respecto a un punto*
- b) Momento angular*
- c) Conservación do momento angular*

2.2 Forzas Centrais

A preocupación polo coñecemento do universo mantivo en vilo durante séculos a filósofos e pensadores dende a época Aristotélica (arredor do S. III a. C). Arredor de 2400 anos teñen pasado dende as primeiras explicacións coñecidas sobre a posición da Terra no Universo, os movementos do Sol e o resto de obxectos celestes. E durante estes 2400 anos, varios foron os modelos propostos dende o propio Aristóteles ate Isaac Newton, pasando por ilustres físicos e astrónomos como Ptolomeo, Copérnico ou Galileo Galilei.

O obxectivo desta quincena consiste en entender os conceptos básicos e aprender a utilizar as ferramentas matemáticas e físicas para un mellor coñecemento do Universo. Para iso repasaremos o movemento circular e as magnitudes relacionadas con él, como momento angular e forzas centrais. Todos estes conceptos abrirán a porta do tema seguinte, comzando por analizar as leis de Kepler como preludio á Lei da Gravitación Universal de Isaac Newton.

1. Modelos do universo

Para tentar explicar os movementos dos astros no Universo, propuxéronse varios modelos ao longo dos anos. O motivo de discordia principal consistía en situar á Terra ou ao Sol no centro do Universo. Xa na época dos filósofos gregos existían diverxencias: Aristóteles foi un dos grandes defensores do modelo xeocéntrico e debido ao seu grande prestixio, este modelo estivo aceptado durante séculos. Pero tamén na época grega había defensores do heliocentrismo, como Aristarco de Samos:

1.1. Modelo xeocéntrico. Consiste en situar á Terra no centro do Universo, e o resto de astros xirando arredor dela. Era un modelo moi intuitivo: cando calquera persoa de nós mira ao ceo durante horas, ve como se move o resto de obxectos celestes, pero aparentemente a Terra permanece estática. Este modelo foi proposto por Aristóteles, e perfeccionado posteriormente por Ptolomeo (hai que pensar que este modelo tivo vixencia durante máis de 1800 anos, de forma que en todo este tempo, foise perfeccionando o coñecemento das traxectorias dos planetas coñecidos, o que implicaba facer pequenas modificacións a este modelo para que os datos coincidiran co modelo proposto)

1.2. Modelo heliocéntrico. Consiste en situar ao Sol no centro do Universo. Foi proposto inicialmente por Aristarco de Samos en época de Aristóteles, pero non tivo aceptación. Posteriormente, Copérnico apostou por este modelo xa no século XV e inicios do XVI. Anos despois, Galileo Galei construíu un telescopio para ollar ao universo e apostou tamén polo modelo Heliocéntrico, case a costa da súa vida, pois foi xulgado pola inquisición por herexe. (Cabe ter en conta que a doutrina católica defendía o modelo xeocéntrico, posto que o Universo era unha creación divina, e non cabía outra posibilidade que non fose que Deus puxera á Terra no centro do Universo)

2. Movemento Circular

Para poder entender o movemento dos astros, é imprescindible lembrar as magnitudes que se poñen en xogo para a análise do movemento circular. Ademais de lembrar as magnitudes de cinemática angular, aquí repasaremos aquelas magnitudes que teñen que ver cos momentos angulares de partículas que se moven.

2.1. Conceptos básicos:

Estudaremos neste momento dúas magnitudes que nos darán a clave para entender as Leis de Kepler e, posteriormente, a Lei da Gravitación Universal de Newton. Estas dúas

magnitudes son o Momento dunha forza respecto a un punto e o momento angular dunha partícula en movemento. Remataremos este apartado estudando o Teorema de Conservación do momento angular.

a) Repaso de conceptos cinemáticos do movemento circular

A cinemática é a parte da Física que estuda os movementos dos corpos. A dinámica, é a parte da Física que estuda as causas que provocan os movementos dos corpos. Vemos claramente que existe unha relación moi estreita entre ámbolos dous ámbitos, de forma que debemos ter claros e frescos os principais conceptos de cinemática para dominar a dinámica.

Cando queremos facer unha análise do movemento dun corpo, debemos centrar os nosos esforzos en varias magnitudes coas que dito movemento quedará perfectamente definido. Resumindo, esas variables serán, a saber:

- Espacio, distancia que recorre un obxecto en movemento: s , medido en metros
- Posición, ubicación dun obxecto respecto ao orixe do sistema de coordenadas: r , medido en metros.
- Tempo, intervalo de tempo durante o cal o obxecto se move: t , medido en segundos
- Velocidade, variación da posición dun obxecto nun tempo determinado: v , medido en m/s
- Aceleración, variación da velocidade dun obxecto nun tempo determinado: a , medido en m/s^2 .

Todas as unidades veñen dadas no sistema internacional (S.I). Cabe ter en conta que tanto a posición como a velocidade e a aceleración son magnitudes vectoriais, de forma que debemos dar dirección e sentido dos respectivos vectores. O espazo non é magnitude vectorial, e só se usa en casos en que non resolvablen os problemas de forma vectorial (principalmente en cursos máis baixos).

Tendo claras estas magnitudes, as ecuacións que nos proporcionan datos sobre os movementos son as seguintes:

$$\Delta r = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2; \quad a = \frac{V_f - V_0}{t}; \quad V_f^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta r$$

Estas tres ecuacións resumen totalmente todo tipo de movementos rectilíneos. Tendo en conta que:

- Se falamos de movemento rectilíneo e uniforme, non hai aceleración, polo tanto todos os sumandos que leven aceleración son cero, e non hai velocidade final e inicial, xa que coinciden
- Se falamos de movementos de caída libre ou tiros horizontal ou parabólico, só temos que cambiar a variable aceleración, a , pola variable aceleración da gravidade, g , con valor constante $9,81 \text{ m/s}^2$.

Se deixamos de lado o movemento rectilíneo e nos centramos no movemento curvilíneo, e máis exactamente, no movemento circular, podemos facer un paralelismo entre as magnitudes lineais e angulares e entre as súas respectivas ecuacións.

Como podemos ver na táboa seguinte, podemos relacionar o espazo recorrido en liña recta co ángulo barrido en movemento circular, do mesmo xeito que podemos relacionar a velocidade lineal coa angular e a aceleración lineal coa angular.

Magnitudes lineais	Magnitudes angulares
Espacio ou distancia, s (metros)	Ángulo barrido, θ (radianes)
Velocidade lineal, v (metros/segundo)	Velocidade angular, ω (radianes/segundo)
Aceleración lineal, a (metros/segundo ²)	Aceleración angular, α (radianes/segundo ²)

Desta forma, podemos pasar sempre da magnitude lineal á angular (falando sempre de movementos circulares) mediante: $A = B \cdot r$

Donde A é a magnitude lineal, B é a magnitude angular correspondente, e r o radio do círculo que describe a traxectoria do obxecto. É dicir:

$$s = \theta \cdot r; \quad v = \omega \cdot r \quad \text{e} \quad a = \alpha \cdot r$$

E con esta conversión entre magnitudes lineais e angulares, podemos escribir as ecuacións que describen o movemento circular por similitude co lineal.

Ecuacións movemento lineal	Ecuacións movemento angular
$\Delta r = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$\theta = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$
$a = \frac{V_f - V_0}{t}$	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$
$V_f^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta r$	$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \theta$

Por último, para rematar este repaso cinemático de forma resumida, tampouco hai que esquecer que a aceleración lineal en realidade consta de dúas compoñentes, chamadas intrínsecas, que son a aceleración normal (a_n) e a aceleración tanxencial (a_t). Cálculanse matematicamente do seguinte xeito:

- $a_t = \frac{dv}{dt}$ (ou o que é o mesmo: $a_t = \frac{V_f - V_0}{t}$)
- $a_n = \frac{v^2}{r}$ (onde v é a velocidade e r o radio de xiro)

Como se pode ver, en movemento rectilíneo sempre se fala única e exclusivamente de aceleración tanxencial, e de feito xa se lle chama só aceleración. Isto é debido a que, no movemento rectilíneo a aceleración normal vale cero, xa que o radio de xiro dunha liña recta é o infinito). En movementos circulares, en cambio, si cabe ter en conta esta diferenciación entre aceleración normal e tanxencial.

EXEMPLO: Se o radio das rodas dun vehículo é de 15,9 cm, ¿Cantas voltas dará unha roda para recorrer 1 km? Se o vehículo circula a 108 km/h, calcula a velocidade angular das rodas.

O primeiro que debemos facer é poñer todos datos que se nos facilitan en unidades do sistema internacional, coma sempre. Así teremos unhas rodas de radio $r = 0,159$ m

$$\text{dun vehículo que circula a } 108 \cdot \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 30 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Cando nos piden un número de voltas que da unha roda, non é máis que ter en conta que cada volta son 2π radiáns, así que en realidade nos piden o ángulo θ que logo podemos pasar a voltas: $s = \theta \cdot r$, é dicir $1000 = \theta \cdot 0,159 \Rightarrow \theta = 6289 \text{ radiáns}$, que

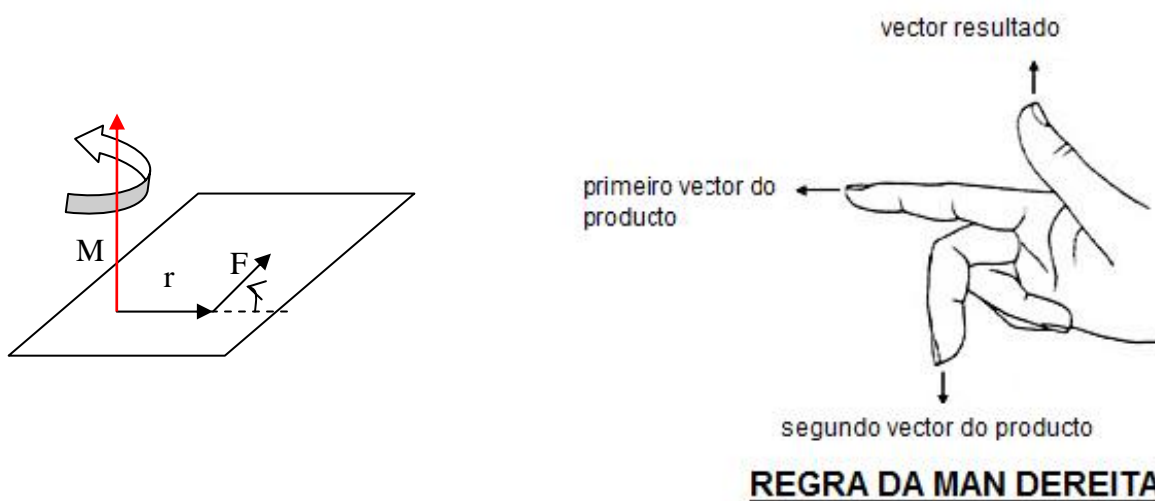
$$\text{pasados a voltas serán } 6289 \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ volta}}{2\pi \text{ rad}} = 1001 \text{ voltas}.$$

Por outra banda, queremos calcular a velocidade angular a partires da lineal, utilizando a ecuación: $v = \omega \cdot r$, é dicir $30 = \omega \cdot 0,159 \Rightarrow \omega = 188,7 \text{ rad/s}$

b) Momento dunha forza respecto a un punto

O momento dunha forza respecto a un punto é un vector chamado \vec{M} que se calcula como o produto vectorial da forza polo vector de posición que une o punto e a forza. Matematicamente: $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

Polas características do produto vectorial, sabemos que o módulo do vector momento M calcúlase como $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$, e que a dirección do vector é perpendicular ao plano formado polos vectores \vec{r} e \vec{F} , con sentido segundo a regra do parafuso ou da man dereita (o sentido de avance dun parafuso que xirase dende r ate F polo camiño máis curto, ver figura)



Para a aplicación da regra da man dereita, podemos ver que neste caso o dedo pulgar sería o que indica o sentido de M ; o dedo índice indica o sentido de r ; e o dedo corazón indica o sentido de F .

Para a aplicación da regra do parafuso, podemos ver no debuxo da esquerda que ao “barrer” dende r ate F xiramos de forma antihoraria; se estivésemos movendo un parafuso nese mesmo sentido, estaría avanzando cara arriba, é dicir, desenroscándose, tal e como marca o vector M en vermello no debuxo da esquerda.

EXEMPLO: a) Calcula o momento dunha forza $F = (0,0,2) \text{ N}$ aplicada sobre o punto $A (0, 1, 0) \text{ m}$;

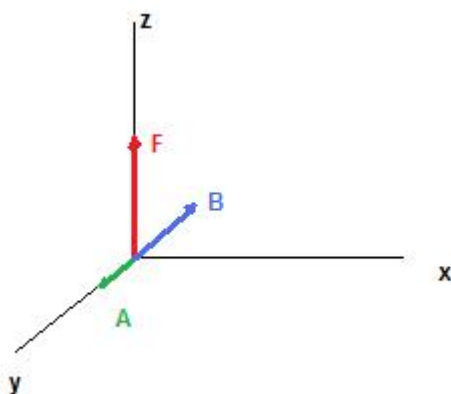
b) Calcula o momento da mesma forza aplicada sobre o punto B (0, -2, 0) m. Fai os debuxos correspondentes.

Para resolver estes problemas, usaremos o cálculo matricial:

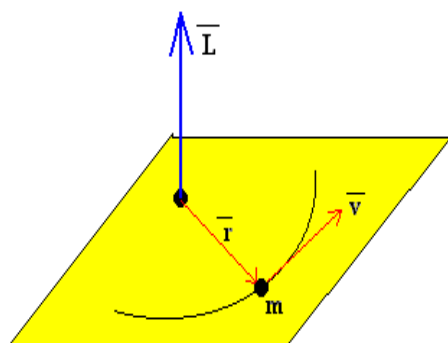
$$a) \vec{M}_a = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \vec{i} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$b) \vec{M}_b = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \vec{i} \text{ N}\cdot\text{m}$$

Para comprobar coa regra da man dereita ou do parafuso se os datos obtidos se corresponden co sentido que debería levar o vector momento \vec{M} , debemos tentar ubicar os vectores nun sistema de eixes coordenados.



c) Momento angular dunha partícula en movemento.



DEFINICIÓN: O momento angular dunha partícula respecto a un punto é o produto vectorial da súa posición, \vec{r} , respecto a ese punto pola súa cantidade de movemento \vec{p}

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

(a dirección e o sentido de \vec{L} ven dada pola regra da man dereita ou do parafuso)

Como a cantidade de movemento, \vec{p} , calcúlase como o produto da masa pola velocidade lineal (é dicir, $p = m \cdot v$), tamén podemos calcular o

momento angular como $L = m \cdot r \cdot v$.

NOTA: O momento angular dunha partícula en movemento ten unha gran importancia no estudo do movemento dos astros. Ven a confirmar a 2ª Lei de Kepler que se verá no seguinte tema.

d) Teorema de conservación do momento angular.

Se o sumatorio de todos os momentos das forzas exteriores que actúan sobre un sistema é cero, entón o momento angular dese sistema permanece constante.

De forma matemática podemos escribir: $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$

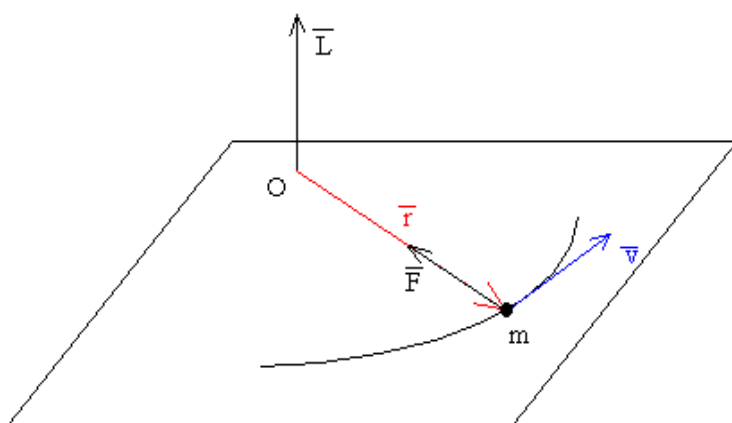
Pódese demostrar de forma simple este teorema tendo en conta as ecuacións matemáticas tanto de \vec{L} como de \vec{M} , de forma que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ ¹, polo tanto, cando o momento das forzas é cero, a

variación do momento angular ten que ser cero tamén, e polo tanto $\vec{L} = cte$.

Notar que no propio enunciado do Teorema aparece implicitamente que as forzas interiores do sistema non afectan ao valor do momento total. Para que as forzas exteriores teñan momento cero, débese cumprir polo menos unha destas dúas condicións (Lembrar a ecuación $M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$):

- Que a forza pase exactamente polo eixo de xiro, de forma que o módulo do vector de posición $r = 0$.
- Que a forza F sexa paralela ao vector de posición r , de forma que o ángulo sexa 0° e o valor do $\sin 0^\circ = 0$.

2.2. Forzas Centrais:



Unha forza é central cando o vector de posición do obxecto sobre o que actúa esa forza é paralelo ao propio vector forza. No debuxo seguinte pódese apreciar a posición do obxecto con masa m , situado a unha distancia r da orixe. A forza que actúa sobre o obxecto é F , e ten unha dirección paralela ao propio vector de posición.

Faise tremendamente importante sinalar que todas as forzas centrais cumpren o

¹ Esta é a expresión dunha derivada dunha ecuación simple respecto ao tempo, que expresa a variación do momento angular respecto ao mesmo. Realmente non é necesaria a derivación para facer problemas, pero si é interesante para entender a dedución matemática, que é realmente simple ao saber derivar.

Teorema de Conservación do Momento Angular explicado anteriormente, debido a que se o produto vectorial $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = r \cdot F \cdot \text{sen} \alpha$ e dicimos que os vectores \vec{r} e \vec{F} son paralelos, esto implica que o ángulo que forman é 0° , e como o $\text{sen } 0^\circ = 0$, o momento $\vec{M} = 0$, e polo tanto a momento angular será constante.

Esto sucede para TODAS AS FORZAS CENTRAIS, e todos os movementos de planetas e satélites están sometidos a forzas centrais (xa veremos que as forzas de atracción gravitatoria son todas elas forzas centrais), de forma que podemos concluír, antes de comezar a explicar as Leis de Kepler do tema seguinte, que todos os movementos celestes cumpren o Teorema de Conservación de Momento Angular.