

Sección 1 - Exercicios de autoavaliación

- 1.- Un punto material describe un movemento harmónico simple (m.h.s.) de $f = 50\text{Hz}$, calcula o seu periodo e a súa frecuencia angular.
- 2.- Un móbil describe un m.h.s. de 10 cm de amplitude e π s de periodo, sabemos que no instante inicial se atopa na posición de máxima elongación positiva, escribe a ecuación do movemento.
- 3.- Un móbil describe un m.h.s. entre os puntos $A = (1,0)$ m e $B = (-1,0)$ m, a frecuencia do movemento é $0,5\text{ s}^{-1}$, e sabemos que o instante inicial o móbil atópase no punto A; pídese calcular:
 - a) O valor da frecuencia angular.
 - b) A ecuación da posición.
 - c) A posición no instante $t = 0,5$ s.
 - d) A ecuación da velocidade.
 - e) A velocidade cando se atopa na posición 0,5
 - f) A velocidade máxima.
- 4.- Indica cal é a distancia total percorrida durante un periodo por un móbil que describe un m.h.s. de amplitude A.
- 5.- Unha partícula que describe un m.h.s. presenta os seguintes valores: $v_{\max} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ e $A = 0,05\text{m}$; calcula ω .
- 6.- Dado o m.h.s. de ecuación $x = 2 \cdot \sin(\pi \cdot t)$ (en unidades do S.I.) se pide:
 - a) Escribe a ecuación da velocidade.
 - b) Calcula a velocidade máxima.
- 7.- Nun oscilador harmónico o valor numérico da velocidade máxima é 20 veces menor que o da aceleración máxima, calcula o periodo.
- 8.- Unha masa de 0,5 kg unida a un resorte de $K = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ oscila sobre unha superficie horizontal e sen rozamento cunha amplitude de 10 cm. Calcula:
 - a) A enerxía mecánica do sistema.
 - b) A velocidade máxima.
 - c) A enerxía cinética e potencial para $x = 8$ cm.
 - d) A posición na cal a velocidade é $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- 9.- No extremo dun resorte colga unha masa de 500 g, se engadimos outra de 500 g o resorte estírase 2 cm; o retirar a segunda masa a primeira empeza a oscilar. Calcula a frecuencia das oscilacións.
- 10.- Un péndulo de 0,9910 m de lonxitude bate segundos, calcula o valor da gravidade no lugar do experimento.
- 11.- Un móbil describe un m.h.s. de 20 cm de amplitude e 2,5 s de periodo, escribe a ecuación da elongación nos seguintes casos:
 - a) No instante inicial $x = A$.
 - b) No instante inicial $x = 0$ e $v > 0$.
 - c) No instante inicial $x = 0$ e $v < 0$.
- 12.- Temos un péndulo do que pendura unha masa de 500 g e que ten unha lonxitude de 1 m, pídese:
 - a) Calcula a frecuencia de oscilación.
 - b) Se para comezar o separamos 60° da posición de equilibrio e o deixamos oscilar ¿cal será a velocidade ao pasar pola posición de equilibrio?
- 13.- Temos unha masa de 1kg pendurada dun resorte de $k = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, desprazamos o sistema 0,1

cara abaixo e soltamos, determina a velocidade máxima e o periodo do m.h.s.

14.- Unha masa m realiza un m.h.s. de frecuencia 1 Hz e amplitude 5 cm, se lle engadimos outra masa de 300 g a frecuencia do movemento é 0,5 Hz:

a) Determina o valor da masa m e da constante do resorte.

b) Se o segundo movemento posúe a mesma enerxía mecánica que o primeiro ¿cal é a súa amplitude?

15.- Un astronauta fai oscilar un péndulo na lúa, observando que o seu periodo é 4,4s, calcula a lonxitude do péndulo sabendo que a gravidade nese punto é $1,75 \frac{m}{s^2}$.

Solucións:

$$1.- T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50Hz} = 0,02s; \omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 50Hz = 100\pi \frac{rad}{s}$$

2.- A ecuación do movemento terá unha das seguintes formas: $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ ou $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$ (é igual se collemos unha ou outra, a única diferenza estará no valor obtido para a fase)

En primeiro lugar imos calcular o valor da frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{rad}{s}$

Agora calcularemos o valor da fase facendo so da condición inicial: $x(t=0) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) = A \Rightarrow \cos(\delta) = 1 \Rightarrow \delta = 0rad$; co cal a ecuación nos queda $x = 10 \cdot \cos(2 \cdot t)$

$$3.- a) \omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 0,5s^{-1} \Rightarrow \omega = \pi \frac{rad}{s}$$

b) Temos que determinar a amplitude, neste caso a distancia entre a posición de equilibrio e a máxima desviación é 1 m. Por outra banda debemos determinar a fase: $x(t=0) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) = A \Rightarrow \cos(\delta) = 1 \Rightarrow \delta = 0rad$; co cal a ecuación nos queda $x = 1 \cdot \cos(\pi \cdot t)$

c) $x(t=0,5s) = 1 \cdot \cos(\pi \cdot 0,5) = 0 \Rightarrow$ no instante $t=0,5s$ o móbil atópase na posición de equilibrio.

$$d) v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)] = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) \Rightarrow v = -\pi \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

$$e) v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v(x=0,5) = \pm \pi \cdot \sqrt{1^2 - 0,5^2} = 2,72 \frac{m}{s}$$

$$f) v_{\max} \Rightarrow x = 0m \Rightarrow v_{\max} = \pm \pi \cdot \sqrt{1^2 - 0^2} = \pi \frac{m}{s}$$

4.- Supoñamos un móbil que oscila entre os puntos **X** e **W**, pasando pola posición de equilibrio **O**, tal como vimos na teoría $\overline{XO} = \overline{OW} = \text{Amplitude}$, durante un periodo realizará o seguinte percorrido: $X \rightarrow O \rightarrow W \rightarrow O \rightarrow X$, no que cada un dos pasos ten unha lonxitude igual a amplitude A polo que a lonxitude total percorrida será $4 \cdot A$.

$$5.- v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}; v_{\max} \Rightarrow x = 0m \Rightarrow v_{\max} = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2} = \omega \cdot A \Rightarrow \omega = \frac{v_{\max}}{A} = \frac{25 \frac{m}{s}}{0,05m} = 500 \frac{rad}{s}$$

6.- a) Cunha primeira ollada á ecuación podemos extraer os seguintes parámetros: $A = 2m$ e $\omega = \pi \frac{\text{rad}}{s}$.

Para simplificar o problema (e poder orientarnos por exercicios anteriores) imos a traballar coa ecuación do movemento expresada polo coseno, para iso temos que recordar o seguinte:

$\sin \alpha = \cos \alpha - \frac{\pi}{2}$, desta forma nos queda: $x = 2 \cdot \sin(\pi \cdot t) = 2 \cdot \cos\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ e sabendo (ex. 3)

que $v = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta)$ obteremos $v = -2\pi \cdot \sin\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$b) v_{\max} = \omega \cdot A \Rightarrow v_{\max} = 2m \cdot \pi \frac{\text{rad}}{s} = 2\pi \frac{m}{s}$$

7.- Sabemos que $v_{\max} = \omega \cdot A$ e $a_{\max} = \omega^2 \cdot A$; $\frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{\omega^2 \cdot A}{\omega \cdot A} = \omega = 20 \frac{\text{rad}}{s}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20 \frac{\text{rad}}{s}} = 0,1\pi \text{ s.}$$

$$8.- a) E_m = \frac{1}{2} k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (0,1)^2 = 0,25 J$$

$$b) E_m = E_{c \max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_m}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25}{0,5}} = 1 m/s$$

$$c) E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = E_m = \frac{1}{2} 50 \cdot (0,08)^2 = 0,16 J$$

$$E_m = E_p + E_c \Rightarrow E_c = E_m - E_p = 0,25 - 0,16 = 0,09 J$$

$$d) k = \omega^2 \cdot m \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0,5}} = 10 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$v = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{4} \cdot \omega^2 \cdot A^2 - \frac{1}{4} \cdot \omega^2 \cdot x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\omega^2 \cdot A^2 - 4 \cdot v^2}{\omega^2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{10^2 \cdot 0,1^2 - 4 \cdot 0,2^2}{10^2}} = 0,091 m$$

9.- A forza que provoca o alongamento é o peso da segunda masa de 500g

$$F = k \cdot x = m \cdot g \Rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0,5 \cdot 9,8}{0,02} = 245 N/m; f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{245}{0,5}} = 3,52 s^{-1}$$

10.- Se o péndulo bate segundos (é dicir chega a un punto no que $x = \pm A$ cada segundo) o seu periodo será $T = 2s$. O periodo dun péndulo ven dado pola expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,9910}{2^2} = 9,781 m/s^2$$

11.- A ecuación do m.h.s. é: $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$, neste caso $A = 0,2m$ e $\omega = \frac{2\pi}{T} = 0,8\pi \text{ rad/s}$, único que nos queda é determinar a fase para cada un dos casos.

a) $x(t=0) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) = A \Rightarrow \cos(\delta) = 1 \Rightarrow \delta = 0$

A ecuación será: $x = 0,2 \cdot \cos(0,8\pi \cdot t)$

b) $x(t=0) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) = 0 \Rightarrow \cos(\delta) = 0 \Rightarrow \delta = \pm \frac{\pi}{2}$, debemos recorrer a ecuación da

velocidade para determinar a fase. $v(t=0) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) > 0 \Rightarrow \sin(\delta) < 0 \Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{2}$

A ecuación será: $x = 0,2 \cdot \cos\left(0,8\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$

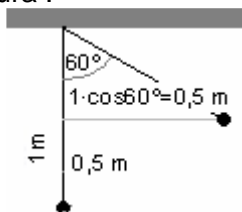
c) $x(t=0) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) = 0 \Rightarrow \cos(\delta) = 0 \Rightarrow \delta = \pm \frac{\pi}{2}$, debemos recorrer a ecuación da

velocidade para determinar a fase. $v(t=0) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) < 0 \Rightarrow \sin(\delta) > 0 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$

A ecuación será: $x = 0,2 \cdot \cos\left(0,8\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

12.- a) $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{9,8}{1}} \approx 0,5s^{-1}$

b) Desprezando os rozamentos, o que temos é un problema de conservación da enerxía no que unha enerxía potencial gravitatoria inicial ($m \cdot g \cdot h_i$) convértese en enerxía cinética ($\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2$) de forma que $v_f = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_i} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5} = 3,13m/s$; o valor de h_i calcúlase por trigonometría tal e como aparece na figura .



13.- a) A velocidade será máxima na posición de equilibrio ($x=0$), posición na que se cumpre

$$E_m = E_c \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k \cdot A^2}{m}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 0,1^2}{1}} = 0,5m/s$$

b) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 1,26s$

14.- a) $f_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 1Hz$ e $f_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m+0,3}} = 0,5Hz \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m+0,3}}} = 2$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{m+0,3}{m}} \Rightarrow 4 = \frac{m+0,3}{m} \Rightarrow 4 \cdot m = m+0,3 \Rightarrow m = 0,1kg$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = f_1^2 \cdot 4\pi^2 \cdot m \xrightarrow{\text{sustituindo}} k = 3,95 \text{ N/m}$$

b) $E_m = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2 \cdot E_m}{k}}$; se a enerxía mecánica é a mesma e a constante tamén (é o mesmo resorte) entón a amplitude tamén será a mesma $A = 0,05m$

$$15.- T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = \frac{4,4^2 \cdot 1,75}{4\pi^2} = 0,86m$$