

MOVEMENTOS VIBRATORIOS

1. Movemento periódico

2. Movemento vibratorio

2.1 Movemento vibratorio harmónico simple. (m.h.s.)

a) Cinemática do m.h.s

b) Dinámica do m.h.s

2.2 Enerxía dun oscilador mecánico

a) Enerxía cinética dun oscilador

b) Enerxía potencial dun oscilador

c) Enerxía mecánica dun oscilador

3. Exemplos de osciladores mecánicos

3.1 O resorte

3.2 O péndulo

No curso anterior estudiamos o movemento de corpos baixo o efecto dunha forza constante, o que dá lugar a unha aceleración constante (o chamado movemento rectilíneo uniformemente acelerado); ocorre, en non poucos casos, que a forza que actúa sobre o corpo é variable, se esta variación é periódica (vaise repetindo a intervalos iguais de tempo) dará lugar a movementos característicos que reciben o nome de movementos periódicos.

Nesta quincena propoñémonos afrontar o estudio deste tipo de movemento moi característico e frecuente, e que garda unha enorme relación con outro movemento xa visto: o movemento circular uniforme.

Para poder comprender os contidos deste tema é preciso que nos apoiemos en tres ferramentas matemáticas moi útiles en física, coma son as razóns trigonométricas, as derivadas e os vectores (vistos o ano anterior pero que iremos recordando a medida que fagan falta).

1. Movemento periódico.

Dise que un movemento é periódico cando repite as súas características (posición, velocidade e aceleración) cada certo tempo; o caso máis sinxelo de movemento periódico é o movemento circular uniforme, así se estudiamos (por exemplo) o movemento do extremo do segundeiro dun reloxo veremos que cada certo tempo, neste caso 60 segundos, este extremo se atopa na mesma posición e coa mesma velocidade e aceleración, en resumo, o movemento se repite.

Isto nos dá pé a definir dous conceptos fundamentais:

Período (T): É o tempo necesario para que se complete un ciclo, é dicir, o tempo transcorrido entre dous estados de movemento idénticos (no exemplo anterior $T=60s$), no Sistema Internacional a súa unidade é o segundo (s).

Frecuencia (f): Defínese coma o número de ciclos que completa o movemento por unidade de tempo, matematicamente é o inverso do período: $f= 1/T$. A súa unidade no Sistema Internacional é o hertz (Hz) ou s^{-1} (no exemplo anterior $f= 1/60$ Hz).

Os movementos periódicos son comúns no noso entorno: a lúa xira o redor da terra cun período de 27,3 días, a terra xira o redor do sol cun período dun ano, o movemento das agullas dun reloxo ou dun péndulo tamén son movementos periódicos.

Exemplo: Un movemento circular uniforme completa 30 voltas por minuto, calcula a súa frecuencia e o seu período:

Solución:

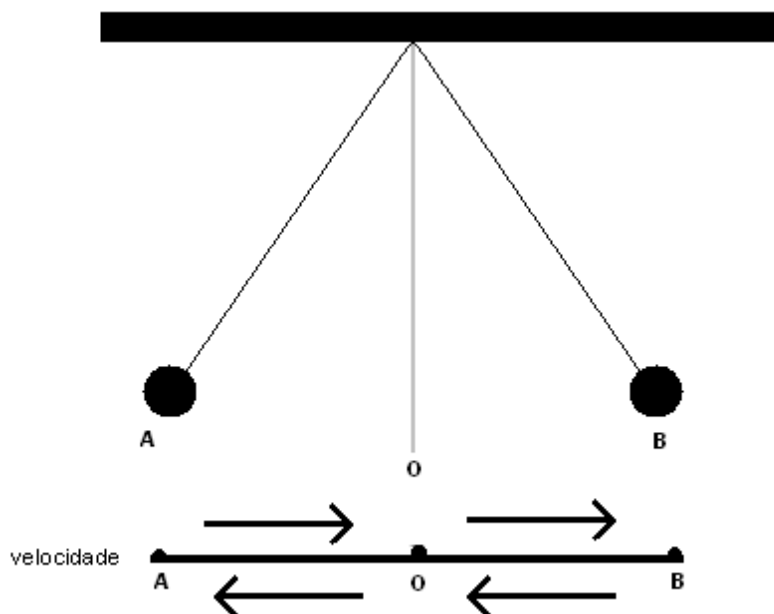
$$\text{Frecuencia} = \frac{30 \text{ voltas}}{60 \text{ s}} = 0,5 \text{ Hz}$$

$$\text{Período} = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,5 \text{ Hz}} = 2 \text{ s}$$

2. Movemento vibratorio.

Hai un tipo de movementos periódicos nos cales o corpo ten unha posición estable, chamada posición de equilibrio, e ao separalo de esta posición o corpo tende a recuperala, pero

no momento de chegar a ela (debido a inercia que posúe) non se detén e continúa o movemento á vez que vai reducindo a súa velocidade, ata chegar a un punto no que se detén e dende o cal volve cara a posición de equilibrio, repetindo este movemento de forma periódica; este tipo de movemento se denomina **oscilatorio ou vibratorio**, a vibración dun diapasón, a oscilación dun péndulo ou a vibración dun resorte son exemplos de movementos vibratorios.



Coma vemos na figura, se separamos o extremo do péndulo da posición de equilibrio (O), ata deixalo na posición A, aparecerá unha forza que o dirixe cara a posición O, ó chegar a O o péndulo ten unha certa velocidade polo que seguirá o seu avance (cada vez con menor velocidade) ata que se detén a dereita da posición de equilibrio, outra vez comezará un movemento cara O, repetíndose unha e outra vez e dando lugar a un movemento vibratorio.

Estes movementos teñen unhas características comúns:

- Consideramos nulos os rozamentos co que a oscilación se realiza sen perda de enerxía.
- A oscilación completa é o movemento realizado entre dous estados idénticos (no noso exemplo $A \rightarrow O \rightarrow B \rightarrow O \rightarrow A$) o tempo necesario para realizar unha oscilación completa é un período.
- A distancia máxima entre a posición do péndulo e a de equilibrio chámase **Amplitude** da vibración.
- A distancia entre a posición do péndulo e a de equilibrio (nun instante calquera) chamase **Elongación**.

2.1. Movemento vibratorio harmónico simple (m.h.s.)

Falamos agora dos movementos vibratorios que poden ser descritos matematicamente facendo uso de funcións harmónicas dunha soa variable, as funcións seno e coseno. Estes movementos son característicos de corpos elásticos e están producidos por forzas proporcionais ao desprazamento respecto da posición de equilibrio (chamada **elongación**) e orientadas cara esta, forzas descritas pola chamada **Lei de Hooke**: $F = -k \cdot x$, onde F representa á forza recuperadora, k é unha constante e x a elongación.

a) Cinemática do m.h.s.:

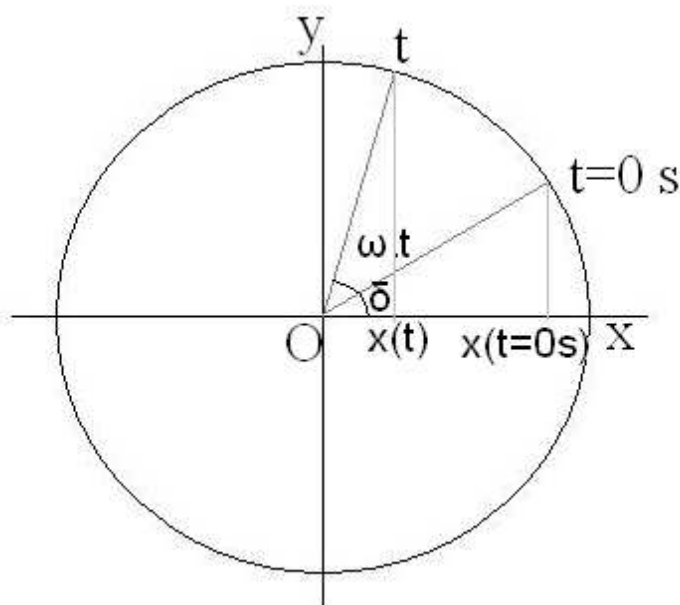
A ecuación do movemento harmónico simple é:

$$x = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \delta) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \delta\right) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

Onde;

- A elongación (x) representa a posición relativa ó punto de equilibrio.
- A amplitude (A) é o valor absoluto máximo da elongación.
- A frecuencia (f) (xa definida con anterioridade).
- O período (T) (xa definido con anterioridade).
- A frecuencia angular (ω) defínese matematicamente coma $\omega = 2\pi \cdot f$, e as súas unidades no Sistema internacional son $\frac{rad}{s}$.
- A fase inicial (δ) é nula cando no instante inicial ($t=0$ s) a elongación da partícula coincide coa amplitude.

Para entender mellor isto observamos a relación existente entre o m.h.s. e o m.c.u. do mesmo período. Resulta que o m.h.s se pode considerar coma a proxección do movemento circular sobre o eixo horizontal, onde o raio da circunferencia representa a amplitude do movemento:



En ocasións a ecuación anterior se escribe na forma: $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ isto equivale a modificar o valor da fase inicial engadíndolle $\pi/2$, é dicir:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi) = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \delta + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

Exemplo: A elongación dunha partícula ven dada pola ecuación: $x = 5 \cdot \text{sen}(\pi \cdot t + \pi/3)$, (en unidades do S.I.) determina os parámetros do m.h.s.

Solución:

Amplitude: Ven dada na ecuación, $A = 5 \text{ m}$

Frecuencia angular: Ven dada na ecuación, $\omega = \pi \text{ rad/s}$

Fase: A ecuación está posta en función do seno, polo tanto haberá que engadirlle $\pi/2$, desta forma nos queda, $\delta = \pi/3 + \pi/2 = 5\pi/6 \text{ rad}$

Frecuencia = $\omega/2\pi = 0,5 \text{ Hz}$

Periodo = $\frac{1}{f} = \frac{1}{0,5 \text{ Hz}} = 2 \text{ s}$

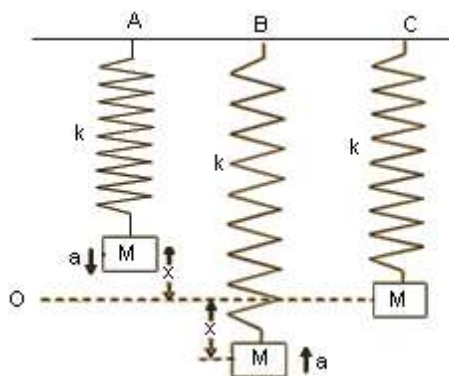
As ecuacións da velocidade e da aceleración obtéñense derivando a ecuación da posición con respecto ó tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)] = A \cdot [\omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)] = -A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$$

Tamén podemos expresar a velocidade en función da elongación:

$$v = A \cdot \omega \cdot (\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2(\omega \cdot t + \delta)}) = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t + \delta)} = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [-A \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)] = -A \cdot \omega \cdot [\omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)] = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta) = -\omega^2 \cdot x$$



Coa axuda do debuxo e as ecuacións deducidas observa os seguintes feitos:

- A velocidade e a aceleración tamén son funcións periódicas.
- Para cada punto x existe un valor de velocidade e aceleración, pero mentres que a aceleración sempre ten o mesmo sentido (dirixido cara O) o sentido da velocidade depende do sentido do movemento (oposto a O á ida e dirixido a O á volta).
- A velocidade toma o seu valor máximo no centro, é nula nos extremos ($x=A$ e $x=-A$)

por contra a aceleración é nula no centro e é máxima nos extremos.

b) Dinámica do m.h.s

O movemento harmónico simple é acelerado cando a partícula se aproxima á posición de equilibrio, e é retardado cando se aparta desta, isto quere dicir que a forza que da lugar ó movemento é unha **forza recuperadora**, é dicir tende a levar ó obxecto á posición de equilibrio.

Recordando do curso pasado a chamada **Lei de Hooke** $F = -k \cdot x$, se lle unimos a isto á **Lei da Dinámica** $F = m \cdot a$ e a expresión da aceleración que acabamos de deducir $a = -\omega^2 \cdot x$ chegaremos a seguinte conclusión:

$$F = m \cdot a = -\omega^2 \cdot m \cdot x = -k \cdot x \Rightarrow k = \omega^2 \cdot m$$

A constante k é unha característica do oscilador chamada constante recuperadora e ten coma unidades no Sistema internacional N/m.

Exemplo: Cólganse de dous resortes idénticos dúas masas, sendo a frecuencia da primeira (ω_a) dúas veces maior ca da segunda (ω_b), calcula a relación entre as masas.

Solución:

Se os resortes son idénticos o valor da constante recuperadora tamén o será ($k_a = k_b$), polo tanto: $\omega_a^2 \cdot m_a = \omega_b^2 \cdot m_b$,

Despexando nos queda $m_a/m_b = \omega_b^2/\omega_a^2$;

E como $\omega_a^2 = 4 \cdot \omega_b^2$; ó substituír obtemos $m_a/m_b = \omega_b^2/4 \cdot \omega_b^2 = \frac{1}{4}$

Polo tanto $4 \cdot m_a = m_b$

2.2. Enerxía dun oscilador mecánico:

Denomínase oscilador mecánico a todo sistema material animado cun m.h.s., a xustificación deste nome está en que estes sistemas posúen enerxía cinética e potencial, ou, o que é o mesmo, enerxía mecánica.

Enerxía cinética dun oscilador.

A enerxía cinética ven dada pola expresión $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, e $v = \pm \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$ (coma xa deducimos), substituíndo a segunda expresión na primeira chegamos a:
 $E_c = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$ sabendo que $k = \omega^2 \cdot m$, obtemos finalmente: $E_c = \frac{1}{2}k \cdot (A^2 - x^2)$ que é a expresión matemática da enerxía cinética en función da elongación.

Para determinar a enerxía cinética en función do tempo deberemos basearnos en que $v = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta)$, e na fórmula $E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2$, o que nos leva a

$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \delta)$ facendo novamente uso de que $k = \omega^2 \cdot m$, obtemos

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot kA^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \delta)$$

Enerxía potencial dun oscilador.

A Enerxía potencial é o traballo que debe realizarse para trasladar o oscilador dende a posición de equilibrio ate unha posición x , vencendo a forza recuperadora. Como no produto escalar forza por distancia, a forza é proporcional á distancia, debemos integrar os valores a deformación a unha distancia x e a posición de equilibrio $x=0$.

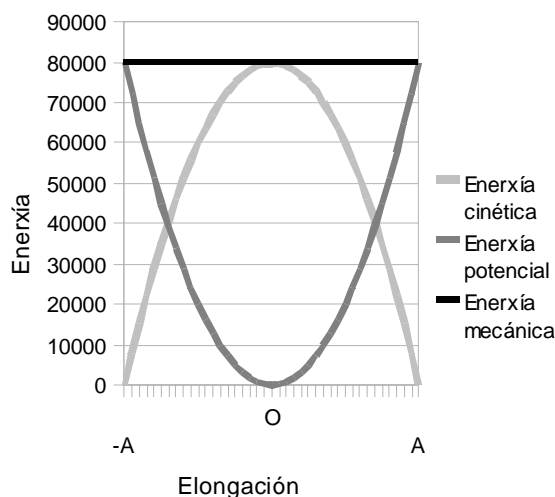
$$W=E_p=\int_0^x F \cdot dx = \int_0^x k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Enerxía mecánica dun oscilador.

É a suma da enerxía cinética e a enerxía potencial:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} \cdot kx^2 = \frac{1}{2} \cdot kA^2$$

Na seguinte gráfica podemos ver graficamente como varían estas enerxías en función da elongación (para a realización da mesma empregamos un oscilador de $k=400$ N/m e $A=20$ m).



Observamos na gráfica que nun oscilador harmónico a enerxía mecánica non depende da posición, so depende das características do oscilador (k) e da amplitude do movemento.

Dixemos que no caso do m.h.s. non existen rozamentos, polo que a enerxía mecánica é constante o que supón que amplitude do movemento tamén o será.

Existen dous puntos nos cales os valores da enerxía cinética e potencial coinciden, isto ocorre en $x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$.

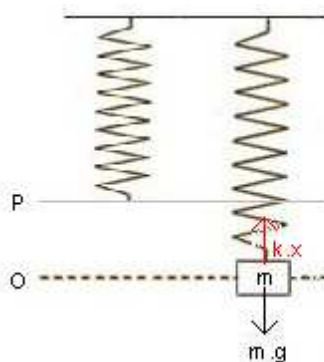
3. Exemplos de osciladores mecánicos.

Unha masa colgada dun resorte e un péndulo simple son dous exemplos de osciladores fáciles de observar, que nos permiten visualizar as características do m.h.s.

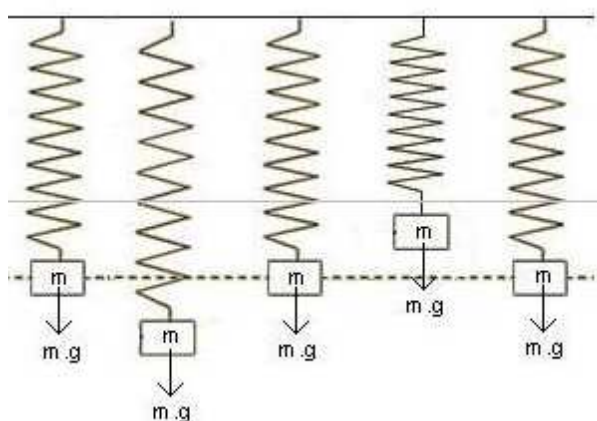
3.1. O resorte.

Temos un resorte de constante elástica k , enganchado dun dos seus extremos, vemos

que non está deformado sendo a posición de equilibrio do outro extremo o punto P. Se colgamos unha masa do extremo libre dun resorte e o deixamos caer suavemente, o resorte se estirará, sendo a nova posición de equilibrio o punto O, se chamamos x o alongamento experimentado polo resorte, e de acordo a Lei de Hooke, no equilibrio teremos que $m \cdot g = k \cdot x$



Se desprazamos verticalmente a masa unha distancia x_1 a forza recuperadora será maior que o peso dando lugar a unha aceleración vertical e cara arriba, ao chegar a posición de equilibrio, por inercia, a masa seguirá ascendendo cun movemento retardado, ata que se pare e comece a baixar, así indefinidamente dando lugar a un m.h.s. coma o que se ilustra na imaxe.



Calculemos o valor de dita aceleración:

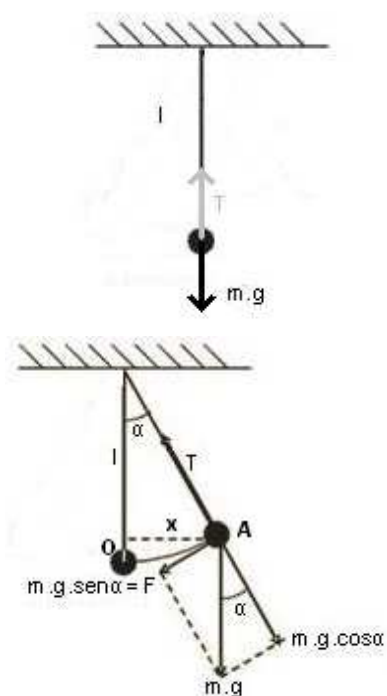
$$\sum F = k \cdot x + k \cdot x_1 - m \cdot g \quad (\text{Réstanse porque teñen sentidos contrarios}).$$

$$\text{Como } m \cdot g = k \cdot x_1 \text{ nos quedará } a = k \cdot \frac{x_1}{m}$$

$$\text{Recordemos (xa deducido) que } a = \omega^2 \cdot x_1; \text{ co cal } \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{Tamén deducimos que } \omega = 2\pi \cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3.2. O péndulo.



Chámase péndulo simple ó sistema formado por unha pequena masa suspendida dun fío inextensible e que realiza un movemento libre de rozamentos.

O péndulo se atopa en repouso cando o a posición do fío coincide coa vertical, xa que nesta posición o peso da esfera é compensado pola tensión do fío.

Se separamos a esfera da posición de equilibrio, un pequeno ángulo α , para colocala na posición A, o sistema xa non se atopará en equilibrio. Ó descompoñer o peso da bola nos queda que $m \cdot g \cdot \cos \alpha$ é compensada pola tensión do fío, sen embargo a outra compoñente ($m \cdot g \cdot \sin \alpha$) queda sen compensar e tende a levar á bola cara a posición de equilibrio O, $m \cdot g \cdot \sin \alpha$ é unha forza recuperadora.

Por trigonometría sabemos que $l \cdot \sin \alpha = x$, do que podemos deducir que $\sin \alpha = x/l$ (para pequenos ángulos podemos aproximar que x coincide co valor do arco formado polo fío dende A a O)

Tomando a expresión da forza recuperadora e substituíndo o deducido chegamos a: $\frac{m \cdot g \cdot x}{l} = k \cdot x$ (Lei de Hooke).

Na páxina 6 deste documento vimos que $k = \omega^2 \cdot m$, o que nos leva a: $\frac{m \cdot g \cdot x}{l} = \omega^2 \cdot m \cdot x$, e unha vez simplificado $\omega^2 = \frac{g}{l}$, sabendo que a relación existente

entre o periodo e a frecuencia angular é $T = \frac{2\pi}{\omega}$, obtemos a seguinte expresión: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

Desta fórmula extraemos as seguintes conclusións:

- O movemento pendular é periódico.
- O periodo dun péndulo non depende do ángulo inicial de desprazamento respecto a posición de equilibrio, nin do valor da masa pendurada.
- O periodo depende unicamente da lonxitude do fío e do valor da aceleración da gravidade no lugar onde se produza a oscilación.