

## Sección 7 - Exercicios de autoavaliación

Exercicio nº 1.-

Calcula os seguintes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x^2 + 2x + 3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 9}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{6-3x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \log x$

g)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{4x-8}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+3}{x^2-x-2}$

i)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x^3+8}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$

Exercicio nº 2.-

Calcula o seguinte límite e estudia o comportamento da función :

A) Á esquerda e á dereita de  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9}$$

B) Pola esquerda e pola dereita de  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2 + 2x}$$

Exercicio nº 3.-

Resolve o seguinte límite e interprétalo gráficamente.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6}$$

Exercicio nº 4.-

Calcula os límites seguintes:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^4 + 3x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3}{1 - x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 1}{x^4 + 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^4}{1 - x^2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + x + x^2} - x)$

Exercicio nº 5.-

Calcula os seguintes límites e representa a información que obteñas:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x - x^4)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right)$

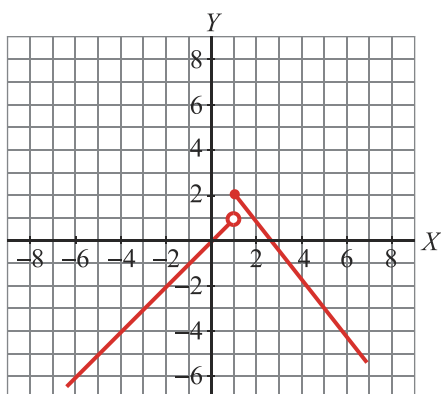
Exercicio nº 6.-

Acha os seguintes límites e representa gráficamente os resultados que obteñas:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{(2 - x)^3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x^3}{x^2 - 1}$

Ejercicio nº 7.-

A seguinte gráfica corresponde á función  $f(x)$ :



Di si é continua ou no en  $x = 1$  e en  $x = 2$ . Se en algun dos puntos no é continua, indica cal é a causa da discontinuidade.

Ejercicio nº 8.-

Estuda a continuidade de a)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$       b)  $f(x) = \frac{x^2-3x}{2x-6}$

Exercicio nº 9.-

a) Estudia a continuidade de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Halla el valor de  $k$  para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$ :



$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercicio nº 10.-

Acha as asíntotas verticais da seguinte función e sitúa a curva respecto a elas:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$$

Exercicio nº 11.-

Calcula a asíntota horizontal da función  $y = \frac{3}{8-x}$

Exercicio nº 12.-

Dada a función  $y = \frac{2x^4}{x^3 + 5}$  pescuda se ten asíntota oblicua

# Solucións dos exercicios

Exercicio nº 1.-

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x^2 + 2x + 3} = \frac{4}{9 + 6 + 3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 - 9} = \sqrt{0} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x^2 + x + 1} = \frac{-1}{4 + 2 + 1} = \frac{-1}{7}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{6 - 3x} = \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \log x = \log 1 = 0$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{4x - 8} = \frac{6}{0} \Rightarrow \text{calculamos os límites laterais ao quedar un número}$$

partido por cero:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{6}{4x - 8} = \frac{6}{0^-} = -\infty$  (proba con 1,99);

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{6}{4x - 8} = \frac{6}{0^+} = \infty \text{ (proba con 2,01)}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{3(-1) + 3}{(-1)^2 - (-1) - 2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Factorizamos o numerador e denominador, sabendo que  $x + 1$  é un factor, Obtendo

$3(x + 1), (x + 1)(x - 2)$ , respectivamente. O límite valerá:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x - 2)} = \frac{3}{(1 - 2)} = -1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8} = \frac{(-2)^2 - (-2) - 6}{(-2)^3 + 8} = \frac{4 + 2 - 6}{-8 + 8} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación}$$

Factorizamos numerador e denominador obtendo:

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3); \quad x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 3)}{(x^2 - 2x + 4)} &= \frac{(-2 - 3)}{(-2)^2 - 2(-2) + 4} = \frac{-5}{12} \end{aligned}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + 1} - 1}{x} = \frac{\sqrt{1} - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{2x+1}+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1-1}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{2x+1}+1)} = \frac{2}{(\sqrt{1}+1)} = 1
 \end{aligned}$$

Exercicio nº 2.-

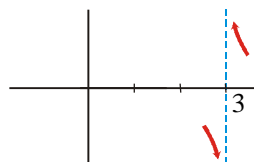
A)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

Calculamos os límites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 9} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 9} = +\infty$$



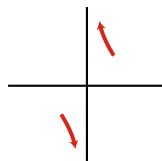
B)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x(x+2)}$$

Calculamos os límites laterais:

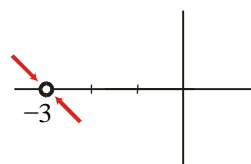
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x^2 + 2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2 + 2x} = +\infty$$



Exercicio nº 3.-

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)^2}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)}{(x-2)} = 0$$



Exercicio nº 4.-

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^4 + 3x} = \frac{\infty}{\infty}$  indeterminación  $\approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3}{1 - x^2} = \frac{\infty}{-\infty}$  indeterminación  $\approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-4) = -4$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 1}{x^4 + 2} = \frac{\infty}{\infty}$  indeterminación  $\approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x = \infty$

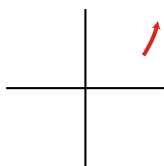
d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^4}{1 - x^2} = \frac{-\infty}{-\infty}$  indeterminación  $\approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x) = \infty - \infty$  indeterminación  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - x)(\sqrt{x^2 + 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 3} + x} =$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = 0$

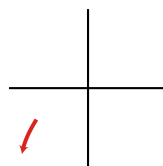
f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + x + x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1 + x + x^2} - x)(\sqrt{1 + x + x^2} + x)}{\sqrt{1 + x + x^2} + x} =$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2 - x^2}{\sqrt{1 + x + x^2} + x} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

Exercicio nº 5.-

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x - x^4) = -\infty$

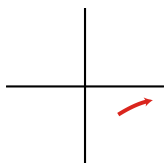


b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) = -\infty$

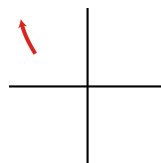


Exercicio nº 6.-

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{(2 - x)^3} = 0$



b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x^3}{x^2 - 1} = +\infty$



Exercicio nº 7.-

En  $x=1$  non é continua porque presenta un salto nese punto. Observamos que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

En  $x=2$  sí é continua.

Exercicio nº 8.-

a) Neste caso os posibles puntos de descontinuidade son aqueles que anulan o denominador. Resolvemos a ecuación:  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ . Para saber se son discontinuidades de salto infinito ou discontinuidades evitables (indeterminacións) substituímos estes valores na función:

$$f(1) = \frac{1^2 + 1}{0} = \frac{2}{0} \Rightarrow \text{en } x=1, f \text{ presenta unha descontinuidade inevitable de salto infinito.}$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{0} = \frac{2}{0} \Rightarrow \text{en } x=-1, f \text{ presenta outra descontinuidade inevitable de salto infinito.}$$

Resumindo,  $f$  é continua en  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ , e presenta discontinuidades inevitables de salto infinito en  $-1$  e  $1$ .

b) Resolvemos a ecuación:  $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ , e substituímos este valor na función:

$f(x) = \frac{3^2 - 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 6}$  Indeterminación. Para resolver a indeterminación factorizamos os polinomios e calculamos o límite cando  $x \rightarrow 3$  e se este límite existe definimos  $f(3) =$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{2x - 6}$$

Factorizamos:  $x^2 - 3x = x(x - 3)$ ,  $2x - 6 = 2(x - 3) \Rightarrow f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{2(x - 3)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$$

Así,  $f$  é continua en  $\mathbb{R}$  e presenta unha descontinuidade evitable en  $x=3$ .

Exercicio nº 9.-

a)

Si  $x \neq 1$ , a función é continua.

Si  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 1) = 2 \end{aligned} \right\}$$

Non é continua en  $x=1$  porque  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ . É dicir, non ten límite nese punto.

b)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= k \\ f(1) &= 3 \end{aligned} \right\}$$

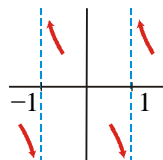
Para que sexa continua en  $x=1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ .

Ha de ser  $k = 3$ .

Exercicio nº 10.-

- $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 1$ .
- as asíntotas verticais son  $x = -1$  y  $x = 1$ .
- Posición da curva respecto a elas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} &= -\infty & \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} &= -\infty & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} &= +\infty \end{aligned}$$



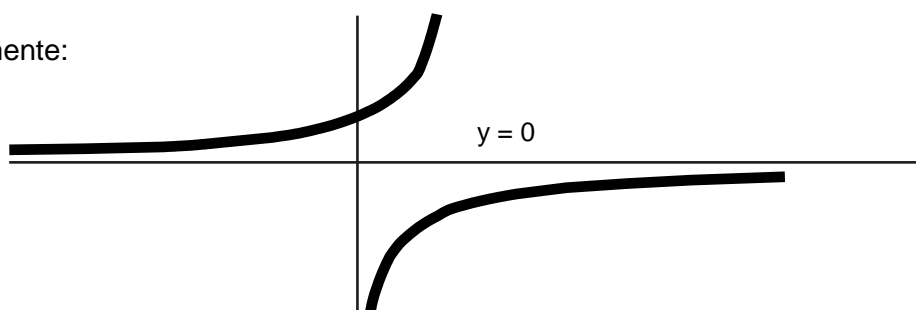


Exercicio nº 11.-

$$y - y_H = \frac{3}{8-x} - 0 = \frac{3}{8-x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{8-x} > 0 \text{ cando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y - y_H < 0 \Rightarrow y < y_H \\ \frac{3}{8-x} < 0 \text{ cando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y - y_H > 0 \Rightarrow y > y_H \end{cases}$$

Como  $y - y_H < 0$  cando  $x \rightarrow \infty$ , e vai por debaixo de  $y_H$ , e inversamente, como  $y - y_H > 0$  cando  $x \rightarrow -\infty$ , e vai por enriba de  $y_H$ .

Graficamente:



Exercicio nº 12.-

$$y = \frac{2x^4}{x^3+5} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4}{x^3+5} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x = \pm\infty \text{ non ten}$$

asíntota horizontal

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x^4}{x^3+5}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4}{x^4+5x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4}{x^4} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x^4}{x^3+5} - 2x \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 - 2x(x^3+5)}{x^3+5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-10x}{x^3+5} = 0$$

A asíntota oblicua ten por ecuación  $y_{ob} = 2x$ . Para representala collemos os puntos e (-3, -6) e (3, 6). A función achégase á asíntota oblicua do seguinte xeito:

$$y - y_{ob} = \frac{2x^4}{x^3+5} - 2x = \frac{2x^4 - 2x(x^3+5)}{x^3+5} = \frac{-10x}{x^3+5} = \frac{-10x}{x^3} = \frac{-10}{x^2} < 0$$

$\Rightarrow y$

$-y_{ob} < 0 \Rightarrow y < y_{ob} \Rightarrow y$  vai por debaixo de  $y_{ob}$

Graficamente sería:

