

UNIDADE 2 – MATEMÁTICA FINANCIERA

1 Logaritmos decimais e neperianos

1.1 Definición

Chámase **logaritmo de base n**, positiva e distinta dun, dun número x , a outro número y que é o expoñente ao que hai que elevar a base a para reproducir o número dado x ; escríbese:

$$\log_a x = y$$

$$a^y = x$$

A operación para achar logaritmos é a logaritmación, operación inversa da potenciación, e o seu obxecto é calcular o expoñente cando se coñecen a base e o valor da potencia.

Por exemplo, $\log_3 81 = 4$; posto que $3^4 = 81$

E x e m p l o s

1. Calcula $\log_2 32$.

Solución: Será un número y , tal que $2^y = 32$. Como $32 = 2^5$, queda $2^y = 2^5$, potencias iguais da mesma base teñen expoñentes iguais, polo que $y = 5$. Logo escribimos:

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

2. Calcula $\log_2 \frac{1}{16}$

Solución: Será un número y , tal que $2^y = \frac{1}{16}$. Como $\frac{1}{16} = 2^{-4}$; queda $2^y = 2^{-4}$, polo que $y = -4$. Se escribe:

$$\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$$

3. Calcula $\log_3 3$.

Solución: Será un número y tal que $3^y = 3$; polo tanto $y = 1$, entón $\log 3 = 1$

Observa que o logaritmo da base é sempre 1, $\log_a a = 1$ $a^1 = a$

4. Calcula $\log_3 1$

Solución: Será un número y tal que $3^y = 1$; polo tanto $y = 0$, entón $\log_3 1 = 0$

Observa que o logaritmo de 1 en calquera base é 0, $\log_a 1 = 0$ $a^0 = 1$

5. Calcula $\log_3 0$

Solución: Será un número y tal que $3^y = 0$. Como as potencias dan sempre resultados positivos, podemos afirmar:

O número cero non ten logaritmo.

6. Calcula $\log_3(-4)$

Solución: Será un número y tal que $3^y = -4$. Como no exemplo anterior, recordamos que as potencias dan sempre números positivos, polo tanto:

Os número negativos non teñen logaritmos.

1.2. Propiedades dos logaritmos

Os exemplos anteriores permitíronnos enunciar algunhas propiedades dos logaritmos; a continuación enunciaremos outras propiedades dos logaritmos:

1. **O logaritmo dun produto** é igual á suma dos logaritmos dos seus factores, isto é:

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

2. **O logaritmo dun cociente** é igual ao logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor, isto é:

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

3. **O logaritmo dunha potencia** é igual ao produto do expoñente polo logaritmo da base, isto é:

$$\log_a m^k = k \cdot \log_a m$$

4. **O logaritmo dunha raíz** é igual ao cociente entre o logaritmo do radicando e o índice da raíz, isto é:

$$\log_a \sqrt[k]{m} = \frac{\log_a m}{k}$$

Exemplos

- 1 Calcula $\log_a x \cdot y$, sabendo que $\log_a x = 3,23$ e $\log_a y = 2,34$:

Solución: Pola propiedade 1, $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y = 3,23 + 2,34 = 5,57$

- 2 Calcula $\log_a(x/y)$ cos datos do exemplo 1

Solución: Pola propiedade 2 $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y = 3,23 - 2,34 = 0,89$

- 3 Calcula $\log_a x^4$ cos datos do exemplo 1

Solución: Pola propiedade 3 $\log_a x^4 = 4 \log_a x = 4 \cdot 3,23 = 12,92$

- 4 Calcula $\log_a x^2 \cdot y^3$ cos datos do exemplo 1

Solución: Polas propiedades 1 y 3, $\log_a x^2 \cdot y^3 = \log_a x^2 + \log_a y^3 =$

$$2 \log_a x + 3 \log_a y = 2 \cdot 3,23 + 3 \cdot 2,34 = 6,46 + 7,02 = 13,48$$

5 Calcula $\log_a \sqrt[3]{x}$ cos datos do exemplo 1

$$\text{Solución: Pola propiedade 4, } \log_a \sqrt[3]{x} = \frac{\log_a x}{3} = \frac{3,23}{3} = 1,07$$

6 Calcula $\log_a \sqrt[5]{x^2 y^4}$ cos datos do exemplo 1

$$\begin{aligned} \log_a \sqrt[5]{x^2 y^4} &= \frac{\log_a x^2 y^4}{5} = \frac{\log_a x^2 + \log_a y^4}{5} = \frac{2 \log_a x + 4 \log_a y}{5} = \\ &= \frac{2 \cdot 3,23 + 4 \cdot 2,34}{5} = \frac{15,82}{5} = 3,16 \end{aligned}$$

1.3 Logaritmos decimais e neperianos

No cálculo de logaritmos utilízanse usualmente como bases, o número 10 e o número $e = 2,718281\dots$

Os logaritmos de base 10 chámanse **logaritmos decimais** e escríbese simplemente log; por exemplo o $\log 1000 \longleftrightarrow 10^3 1000$.

Os logaritmos de base e chámanse **logaritmos neperianos**, e simbolízanse por ln ou L.; por exemplo $\ln e^4 = 4 \longleftrightarrow e^4 = e^4$

Estes logaritmos lévanos incorporados as calculadoras científicas, os seguintes exemplos indicaránche cómo utilizar a calculadora para calcular logaritmos.

Exemplos

1. Calcula $\log 8$.

Solución: Será un número e , tal que $10^e = 8$. Como 8 non pode expresarse como unha potencia enteira de base 10, para calcular o seu logaritmo decimal de forma aproximada recórrese á tecla \log da calculadora, mediante a secuencia seguinte:

$$8 \quad \log \quad 0.9030899 \quad \text{E escribimos: } \log 8 = 0,9030899$$

2. Calcula $\ln 8$.

Solución: Será un número e , tal que $e^y = 8$. Como no exemplo anterior, se recorre a a tecla \ln da calculadora, mediante a secuencia seguinte determínase de forma aproximada o logaritmo neperiano de 8:

$$8 \quad \ln \quad 2.0794415 \quad \text{Escríbese: } \ln 8 = 2,0794415$$

3. Calcula x se $\ln x = 2,4849066$.

Solución: Coñécese a base e e o expoñente que orixina x ; como, $x = e^{2,4849066}$, a secuencia seguinte calcula x

$$2.4849066 \quad \text{INV} \quad e^x \quad 12 \quad \text{Polo tanto: } x = 12$$

2. Porcentaxes: incrementos e diminucións porcentuais.

Recorda que porcentaxe se representa mediante o signo % e significa "**de cada cen**"; é dicir, centésimas; por este motivo, as porcentaxes pódense expresar como decimais. Por exemplo: $R = 12\%$, significa 12 de cada 100; porque se pode escribir en forma decimal así:

$$r = \frac{12}{100} = 0,12$$

Por outra banda, sabemos que

- Se unha mercadoría costa inicialmente C e o seu valor aumenta un 8%, o seu custo final será:

$$C + 0,08 \times C = (1 + 0,08) \times C = 1,08 \times C$$

- Se unha mercadoría costa inicialmente C e o seu valor diminúe un 8%, o seu custo final será:

$$C - 0,08 \times C = (1 - 0,08) \times C = 0,92 \times C$$

O custo final dunha mercadoría que aumentou ou diminuíu unha porcentaxe conséguese multiplicando o custo inicial C por un número chamado **índice de varia- ción**; nos exemplos anteriores os índices foron 1,08 e 0,92 respectivamente.

Nos **aumentos porcentuais** do $R\%$, o índice de variación é:

$$1 + \frac{R}{100} = 1+r$$

Nas **diminucións porcentuais** do $R\%$, o índice de variación é:

$$1 - \frac{R}{100} = 1-r$$

A cantidade final con aumento ou diminución porcentual obtense ao multiplicar a cantidade inicial polo índice de variación; é dicir:

$$C_{final} = \left(1 \pm \frac{R}{100}\right) \cdot C_{inicial} = (1 \pm r) \cdot C_{inicial}$$

Exemplos

- Os prezos de todos os artigos duns almacéns atópanse rebaixados o 12%. Que prezo se pagará por un artigo marcado a 500 euros?

Solución: Aplícase a fórmula; $P_f = (1 - 0,12) \cdot 500 = 0,88 \cdot 500 = 440$ euros

- O prezo dun televisor sen IVE é de 700 euros. Calcula o prezo que pagaremos se está gravado

Solución: Aplícase a fórmula; $P_f = (1 + 0,16) \cdot 700 = 1,16 \cdot 700 = 812$ euros

- Por unha lavadora pagáronse 406 euros. Se a lavadora ten un imposto do 16% de IVE, cal é o seu prezo sen incluír o imposto?

Solución: Aplícase a fórmula e despéxase o prezo inicial

$$406 = (1 + 0,16) \cdot P_i ; P_i = \frac{406}{1,16} = 350$$

2.1. Porcentaxes encadeadas

Ás veces é necesario traballar con varias porcentaxes seguidas, como se formula no exemplo seguinte:

O índice do custo da vida subiu un 14% durante 1980 e un 6% durante 1981, pero baixou un 5% durante 1982. Calcula a suba do índice de custo da vida de 1980 a 1982.

Solución:

A parte do custo dun produto de 100 euros en xaneiro de 1980.

Custo o 1-1-1981 $\longrightarrow 100 \cdot (1,14) = 114$

Custo o 1-1-1982 $\longrightarrow 114 \cdot (1,06) = 120,84$

Custo o 1-1-1983 $\longrightarrow 120,84 \cdot (0,95) = 114,798$

Polo tanto o aumento foi de 14,79%.

Observa que se sumas $14 + 6 - 5$ obtés 15; isto é debido a que os tantos por cento actúan sobre cantidades iniciais distintas.

Exemplos

- Un ordenador valía ao saír ao mercado 924 euros; ao longo dun ano sufriu as seguintes variacións, baixou o 20%, baixou un 15%, subiu un 12% e finalmente baixou un 6%. Canto era o seu prezo ao final do ano? Cal foi o índice de variación total?

Solución: O ordenador cambiou catro veces de prezo.

Prezo ao primeiro cambio $(1 - 0,20) \cdot 924 = (0,80) \cdot 924 = 739,2$ euros

Prezo ao segundo cambio $(1 - 0,15) \cdot 739,2 = (0,85) \cdot 739,2 = 628,32$ euros

Prezo ao terceiro cambio $(1 + 0,12) \cdot 628,32 = (1,12) \cdot 628,32 = 703,72$ euros

Prezo ao cuarto cambio $\square (1 - 0,06) \cdot 703,72 = (0,94) \cdot 703,72 = 661,49$ euros

Partimos da variación de 100 euros

Primeira variación	$(1 - 0,20) \cdot 100 = 0,80 \cdot 100 = 80$
Segunda variación	$(1 - 0,15) \cdot 80 = 0,85 \cdot 80 = 68$
Terceira variación	$(1 + 0,12) \cdot 68 = 1,12 \cdot 68 = 76,16$
Cuarta variación	$(1 - 0,06) \cdot 76,16 = 0,94 \cdot 76,16 = 71,5904$

O índice de variación total será 0,7159

Podíase calcular directamente: $0,80 \cdot 0,85 \cdot 1,12 \cdot 0,94 = 0,7159$ y $0,7159 \cdot 924 = 661,49$

2. Un comerciante compra os lectores de CD por 450 euros e véndeos cunha recarga do 30%; chega un amigo e, sobre o prezo de venda, rebáixao o 30%. ¿Gañou ou perdeu coa venda do lector de CD ao amigo?

Solución: O comerciante véndeos a: $P_v = (1 + 0,30) \cdot 450 = 1,30 \cdot 450 = 585$ euros

O amigo leva o lector de CD por $P_v = (1 - 0,30) \cdot 585 = 0,70 \cdot 585 = 409,5$ euros

O comerciante perdeu na venda: $450 - 409,5 = 40,5$ euros

3.1. Interese simple

Ao abrir unha libreta de aforro nunha entidade bancaria, en realidade prestamos un **capital C** á caixa ou banco; empréstito que nos remuneran ofrecéndonos un determinado **rédito R**, que é a cantidade que a entidade nos aboará anualmente, por cada 100 euros depositados. Os beneficios que se obteñen polo capital C depositado chámanse **interese**. Se os beneficios se retiran periodicamente estamos ante un **interese simple**.

Interese simple por anos

Exemplo: Supoñamos que unha persoa ingresa 2 000 euros nun banco ao 4% de rédito, o rédito sempre é anual. O interese que recibe ao finalizar o ano será:

$$i = 2000 \times 0,04 = 80 \text{ euros}$$

Polo tanto, se mantén os 2000 euros no banco, ao finalizar cada ano recibirá 80 euros en concepto de intereses. Isto permítenos construír a seguinte táboa:

Capital inicial	O primeiro	O segundo ano	O terceiro	O ano 15
2000 euros	$2000 + 80$	$2000 + 2 \cdot 80$	$2000 + 3 \cdot 80$	$2000 + 15 \cdot 80$

Os capitais finais obtéñense mediante unha relación lineal a variable da cal é o tempo que están prestados.

O capital inicial C , ingresado ao R % de rédito anual simple, ao cabo de t anos convértese en:

$$C_t = C + t \cdot i, \text{ onde } i = C \cdot r \text{ o } i = \frac{C \cdot R}{100} \text{ é dicir } C_t = C + \frac{C \cdot R \cdot t}{100}$$

Nestas fórmulas C_t é o capital final, C é o capital inicial, R é o rédito anual en porcentaxe, r o rédito anual en decimal e t é o número de anos.

Interese simple por meses

Se temos en conta que o R % anual é o $\frac{R}{12}$ % mensual, entón o interese mensual en decimal será $\frac{r}{12}$; co que:

$$C_t = C + t \cdot i, \text{ onde } i = C \cdot \frac{r}{12} \text{ o } i = \frac{C \cdot R}{1200} \text{ é dicir } C_t = C + \frac{C \cdot R \cdot t}{1200}$$

Nesta fórmula t está expresada en meses

Interese simple por días

Se temos en conta que o R % anual é o $\frac{R}{360}$ % mensual, entón o interese mensual en decimal será $\frac{r}{360}$; co que:

$$C_t = C + t \cdot i, \text{ onde } i = C \cdot \frac{r}{360} \text{ o } i = \frac{C \cdot R}{36000} \text{ é dicir } C_t = C + \frac{C \cdot R \cdot t}{36000}$$

Nesta fórmula t está expresada en días

E x e m p l o s

- 1 Calcular o interese de 3 000 euros, ao 4% durante seis meses.

Solución: Aplícase a fórmula e tense en conta que 6 meses é a metade dun ano;

$$i = 3000 \cdot 0,04 \cdot 0,5 = 60 \text{ euros}$$

- 2 Ao mirar a cartilla, un aforrador observa que lle aboaron 36 euros. Se tivo depositados 2700 euros durante 4 meses, a que rédito lle aboaron os intereses?

Solución: Aplícase a fórmula, simplifícase e despéxase R .

$$36 = \frac{2700 \cdot R \cdot \frac{4}{12}}{100} = 27 \cdot \frac{1}{3} \cdot R = 9R \quad R = \frac{36}{9} = 4\%$$

3.2. Interese composto

Cando os intereses non se retiran senón que se acumulan ao capital e se mantén o depósito, que é o máis corrente, estamos ante o interese composto:

Interese composto anual

Exemplo: Se se depositan nun banco C euros a un 5%, ao final do ano teremos o capital:

$$C = C + C \cdot \frac{5}{100} = C \cdot (1 + 0,05)$$

Ao final do segundo ano o novo capital será: $C_1 = C \cdot (1 + 0,05) = C \cdot (1 + 0,05)^2$

Ao final do terceiro ano o novo capital será: $C_3 = C_2 \cdot (1 + 0,05) = C \cdot (1 + 0,05)^3$

En xeral, ao final do ano t o capital será: $C_t = C \cdot (1 + 0,05)^t$

Polo tanto, se se depositan C euros ao $R\%$ de rédito, o capital final ao cabo de t anos depositado a interese composto será: **$C_t = C \cdot (1 + r)^t$**

Interese composto mensual

Como no caso do interese simple o rédito $R\%$ anual, transformase en $\frac{R}{12} \%$

mensual, o que equivale a $\frac{r}{12}$ decimal, polo que o capital final ao cabo de t meses será:

$$C_t = C \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^t$$

Interese composto por días

O $R\%$ rédito anual será $\frac{R}{360} \%$ o que equivale a $\frac{r}{360}$ decimal diario; y o capital final ao cabo de t días será:

$$C_t = C \cdot \left(1 + \frac{r}{360}\right)^t$$

Cálculo dos intereses

O interese ou a nosa ganancia será a diferenza entre o último capital e o capital inicial; que no caso de capitalizar por anos será:

$$i = C_t - C = C \cdot (1 + r)^t - C$$

Sacando factor común C obtemos:

$$i = C \cdot [(1 + r)^t - 1]$$

Exemplos

1. Calcular o capital acumulado durante 10 anos a partir de 12 000 euros colocados ao 4% de interese composto aboando os intereses anualmente.

Solución: Aplícase a fórmula. $C_{10}=C(1+r)^{10}=12000 \cdot (1+0,04)^{10}=12000 \cdot 1,04^{10}$

A seguinte secuencia na calculadora determina o capital.

$$12000 \times 1.04 \times^{10} = 17762.932$$

O capital acumulado será 17 762,93 euros

2. Repetir o problema anterior pero con pagamento de intereses cada trimestre.

Solución: É necesario interpretar a fórmula para xeneralizar. O capital $C=12000$; cada ano cóbranse catro veces intereses; os períodos de cobramento ou capitalización serán $4 \cdot 10 = 40$; o rédito será trimestral é dicir $4/4 = 1\%$ trimestral. Con estes razoamentos a formula será:

$$C_{10 \cdot 4} = 12000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{10 \cdot 4} = 12000 \cdot 1,01^{40} = 17866,36$$

A seguinte secuencia na calculadora determina C

$$1200 \times 1,01 \times^{40} = 17866,36$$

O capital acumulado nesta situación será: 17 866,36 euros.

Obsérvase un aumento do capital acumulado, debido a que os intereses se converten en capital ao comezar cada trimestre, en lugar de anualmente.

3. Calcula o tempo a que deben estar prestados 1 000 euros ao 6% de interese composto anual, para que se convertan en 1 504 euros.

Solución: Aplícase a fórmula e obtense $1\,504 = 1\,000 \cdot (1+0,06)^t$; resolvemos a ecuación: $1,504 = 1,06^t$; nesta ecuación, chamada exponencial, tómanse logaritmos para despexar t .

$$\log 1,504 = t \log 1,06 \qquad t = \frac{\log 1,504}{\log 1,06} = 7$$

A seguinte secuencia na calculadora determina t : $1,06 \log M_{in} 1,504 \log : MR = 7$

3.3. Taxa Anual Equivalente (T.A.E.)

Na prensa diaria aparecen ofertas de depósitos ou créditos nos que o % do rédito indícase seguido das siglas T. A. E. "Taxa anual equivalente". O exemplo que propoñemos corresponde á oferta dunha caixa de aforros, e con el aclaramos o significado das mencionadas siglas.

Exemplo: *Se nos confía o seu diñeiro na nosa Conta Aforro dámoslle o 6% anual, con pagamentos mensuais de intereses, o que equivale ao 6,17% T. A. E.*

Que significa o T. A. E. nesta oferta?

O 6% anual equivale ao $\frac{6}{12} \% = 0,5 \%$

Como o ano ten 12 meses o capital depositado, C, converteríase en:

$$C_f = C \cdot (1 + 0,005)^{12} = C \cdot (1,005)^{12} = C \times 1,0616778$$

Como se pode observar ao final de ano o 6% anual, con capitalizacións mensuais convértese mediante redondeo no 6,17%; esta porcentaxe é precisamente o anunciado T. A. E.

Nos empréstimos hipotecarios que os bancos conceden a T. A. E. é, por suposto, superior ao rédito anual anunciado.

Exemplo

1. Calcula a T. A. E. que corresponde a un rédito anual do 12% con pagamentos mensuais de intereses.

Solución: Ao 12% anual correspóndelle o $12/12 = 1\%$ mensual.

Cada mes, o capital multiplícase por 1,01; polo tanto, nun ano multiplícarase por

$$1,01^{12} = 1,126825 \approx 1 + 0,1268 = 1 + \frac{12,68}{100} \text{ . logo a T.A.E será } 12,68\%$$

4. Progresións xeométricas

Se unha cuartilla a partimos pola metade, e as metades as partimos pola metade e así sucesivamente, as partes que resultan son: 2, 4, 8, 16, 32, ... Esta sucesión de números é unha **progresión xeométrica**, cada termo é igual ao anterior multiplicado por 2.

As progresións xeométricas son sucesións nas que un termo calquera se obtén do anterior ao multiplicalo por unha cantidade constante r , chamada razón; isto é:

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Para saber cando unha sucesión de números é unha progresión xeométrica compróbase se os cocientes de termos consecutivos dan o mesmo resultado; este resultado é a razón da progresión.

Exemplos

- 1 Comproba que a seguinte sucesión de números é unha progresión xeométrica; 2, 6, 18, 54, 162, ... Calcula a razón.

Solución: Divídese cada termo polo anterior $\frac{162}{54} = \frac{54}{18} = \frac{18}{6} = \frac{6}{2} = 3$

A razón é **3**

- 2 Forma unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo sexa 40 e a razón 0,5.

Solución: 40 ; $40 \cdot 0,5 = 20$; $20 \cdot 0,5 = 10$; $10 \cdot 0,5 = 5$; $5 \cdot 0,5 = 2,5$...

A progresión é 40, 20, 10, 5, 2,5,...

4.1. Termo xeral dunha progresión

Unha das propiedades das progresións xeométricas é que o **termo xeral** pódese dar mediante unha expresión alxébrica como veremos a continuación.

Supoñamos que a sucesión: $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n \dots$ é unha progresión xeométrica de razón r .

O termo a_2 será: $a_2 = a_1 \cdot r$

O termo a_3 será: $a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

O termo a_4 será: $a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

Obsérvase que un termo calquera é igual ao primeiro termo pola razón elevada ao subíndice do termo menos a unidade; polo tanto, o termo xeral da devandita sucesión será:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

A expresión anterior indica que para coñecer o termo xeral dunha progresión xeométrica abonda con coñecer o primeiro termo a_1 e a razón r .

Exemplos

1. Calcula o termo quinto dunha progresión xeométrica, sabendo que $a_1=2$ e $r=3$.

Solución: Aplícase a fórmula. $a_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

2. Calcula o primeiro termo dunha progresión xeométrica o termo da cal 4 vale 192 e a razón 4.

Solución: Aplícase a fórmula e despéxase a_1 ; $a_4 = a_1 \cdot r^3$; $192 = a_1 \cdot 4^3 = a_1 \cdot 64$;

$$a_1 = \frac{192}{64} = 3$$

4.2. Suma dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica

Dada a progresión xeométrica $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ de n termos e razón r . Deséxase atopar unha expresión para calcular a suma destes números.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

A **suma de n termos dunha progresión xeométrica** pódese expresar en función de a_1 e r , para iso abonda substituír $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ na fórmula S_n e obtense:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Exemplos

- 1 Calcula a suma de 12 termos dunha progresión xeométrica se o primeiro termo é 5 e a razón 2

Solución : Aplícase a formula $S_{12} = \frac{a_1 \cdot (r^{12} - 1)}{r - 1} = \frac{5 \cdot (2^{12} - 1)}{2 - 1} = 5 \cdot (2^{12} - 1) = 20475$

Usa a calculadora ca secuencia de teclas $2 \times^{12} - 1 = \times 5 = 20475$

- 2 Calcula o primeiro termo dunha progresión xeométrica se a suma dos 5 primeiros termos é 155 e a razón 0,5

Solución: Aplícase a fórmula e despéxase a_1 : $S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1}$

$$155 = \frac{a_1 \cdot (0,5^5 - 1)}{0,5 - 1} = \frac{a_1 \cdot (-0,96875)}{-0,5} \quad \text{logo} \quad a_1 = \frac{155 \cdot (-0,5)}{-0,96875} = 80$$

5. Anualidades de capitalización. Fondos

Na vida cotiá é frecuente querer dispoñer dun capital ao cabo dalgún tempo mediante depósitos iguais realizados todos os anos. É o caso típico de fondos ou plans de pensións tan en voga ultimamente. A cantidade dos nosos aforros que depositamos todos os anos é unha anualidade de capitalización.

Supoñamos que ao principio de cada ano se ingresa unha anualidade A , e deséxase calcular o capital que se formou ao cabo de t anos, ao rédito R % anual.

Expresamos o rédito de forma decimal: $r = \frac{R}{100}$

- A primeira anualidade A , que estivo depositada de t anos, transfórmase en:

$$A \cdot (1+r)^t$$

- A segunda anualidade A , que estivo depositada $t-1$ anos, transfórmase en:

$$A \cdot (1+r)^{t-1}$$

- A última anualidade está depositada só un ano, e transfórmase en:

$$A \cdot (1+r)$$

O capital que se obtén é:

$$C = A(1+r) + A(1+r)^2 + A(1+r)^3 + \dots + A(1+r)^{t-1} + A(1+r)^t$$

O capital obtense mediante a suma de n termos dunha progresión xeométrica de razón $(1+r)$.

$$C = \frac{A \cdot (1+r)^t \cdot (1+r) - A \cdot (1+r)}{(1+r) - 1} = \frac{A \cdot (1+r) \cdot [(1+r)^t - 1]}{r}$$

Se desexase coñecer a anualidade que se debe pagar anualmente, despéxase na fórmula anterior e queda:

$$A = \frac{C \cdot r}{(1+r) \cdot ((1+r)^t - 1)}$$

Ás veces os pagamentos fanse en períodos non anuais; por exemplo en semestres, trimestres ou meses; nestes casos aplícase a fórmula seguinte:

$$A = \frac{C \cdot \frac{r}{n}}{\left(1 + \frac{r}{n}\right) \cdot \left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} - 1\right)}$$

Onde n é o número de pagamentos que se efectúan nun ano; polo tanto os seus posibles valores son: 2 en pagamentos semestrais; 4 en pagamentos trimestrais e 12 en pagamentos mensuais.

Exemplos

1. Unha entidade bancaria ofrece un plan de pensións de modo que durante 15 anos debemos achegar 600 euros ao 8% Que capital teremos ao finalizar o prazo?

Solución: Aplícase a fórmula

$$C_{15} = \frac{A \cdot (1+r) \cdot [(1+r)^t - 1]}{r} = \frac{600 \cdot (1+0,08) \cdot [(1+0,08)^{15} - 1]}{0,08} =$$

$$= \frac{600 \cdot 1,08 \cdot [1,08^{15} - 1]}{0,08} = 17594,57$$

A secuencia seguinte determina

$$1,08 \times^{15} - 1 = x \quad 1,08 \times 600 \quad P \quad 0,08 = 17594,57$$

1

O capital acumulado será: 17 594,57 euros.

2. Repetir o problema anterior se se realizan os pagamentos trimestralmente.

Solución: É necesario interpretar a fórmula para xeneralizar. A anualidade vaixe pagar en catro prazos $600 / 4 = 150$ euros ao trimestre; cada ano páganse catro cotas co que o rédito será: $8/4 = 2\%$ trimestral; o número de pagamentos a efectuar será $15 \cdot 4 = 60$. Con estes razoamentos a fórmula será:

$$C_{60} = \frac{150 \cdot (1+0,02) \cdot [(1+0,02)^{60} - 1]}{0,02} = \frac{150 \cdot 1,02 \cdot (1,02^{60} - 1)}{0,02} = 17\,449,88$$

A seguinte secuencia calcula C_{60}

$$1,02 \times^{60} - 1 = \times \quad 1,02 \times 150 : 0,02 = 17\,449,88$$

O capital acumulado será 17 449,88 euros

Neste caso o capital acumulado é menor debido a que se entrega menor cantidade inicial.

- 3 Podemos aforrar todos os anos 500 euros, e un plan de xubilación ofrécenos un interese do 6% Canto tempo debemos pagar para obter un capital de 12336 euros?

Solución: Aplícase a fórmula e despéxase t, tomando logaritmos.

$$12336 = \frac{500 \cdot (1+0,06) \cdot ((1+0,06)^t - 1)}{0,06} ; 12336 \cdot 0,06 = 500 \cdot 1,06 (1,06^t - 1) ;$$

$$740 = 530 (1,06^t - 1); \quad \frac{740}{530} = 1,06^t - 1; \quad \frac{74}{53} + 1 = 1,06^t$$

Tómanse logaritmos e queda: $t \cdot \log 1,06 = \log \left(\frac{74}{53} + 1 \right) \quad t = \frac{\log \left(\frac{74}{53} + 1 \right)}{\log 1,06}$

A seguinte secuencia calcula t :

$$1,06 \log M_{in} 74 : 53 = + 1 = \log : RM = 14,9976$$

O tempo, redondeando, será: $t = 15$ anos

6. Anualidades de amortización. Prestamos

De xeito similar, pero con maior frecuencia, solicítase un empréstito que temos que devolver nun determinado prazo de tempo, aboando cantidades iguais en certos períodos de tempo. É o caso típico de crédito hipotecario, para o pagamento dun ben comprado a prazos. Estes pagamentos reciben o nome de anualidades de amortización.

Supoñamos que ao final de cada ano se aboa unha anualidade A , para pagar unha débeda D en t anos ao tanto por cento anual R .

Transfórmase o tanto por cento R en decimal; $r = R/100$ e se contraemos unha débeda D , esta convértese ao cabo de t anos de tempo en: $D(1 + r)^t$

Por outra banda, como as anualidades entréganse ao final da unidade de tempo, a primeira anualidade A convértese, despois de $t - 1$ anos, en: $A(1 + r)^{t-1}$

A segunda converterase en: $A(1 + r)^{t-2}$

Coa última anualidade A cancélase a débeda.

A suma das cantidades anteriores deben coincidir con: $D(1 + r)^t$

$$D(1 + r)^t = A + \dots + A(1 + r)^{t-2} + A(1 + r)^{t-1}$$

O segundo membro da igualdade é a suma de t termos dunha progresión xeométrica de razón $(1 + r)$; polo que:

$$D \cdot (1 + r)^t = \frac{A \cdot (1 + r)^{t-1} \cdot (1 + r) - A}{(1 + r) - 1} = \frac{A((1 + r)^t - 1)}{r}$$

Desta igualdade pódese despegar tanto A (valor da anualidade) como D (valor da débeda).

$$A = \frac{D \cdot r \cdot (1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1} \quad D = \frac{A((1 + r)^t - 1)}{r(1 + r)^t}$$

Como na anualidades de capitalización, o pagamentos ás veces non se fan en períodos anuais e como se fixo alí xeneralizamos as fórmulas.

$$A = \frac{D \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} - 1} \qquad D = \frac{A \left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} - 1 \right)}{\frac{r}{n} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

Onde n é o número de pagamentos que se efectúan nun ano; polo tanto os seus posibles valores son: 2, en pagamentos semestrais; 4, en pagamentos trimestrais e 12, en pagamentos mensuais.

Exemplos

- 1 Para pagar un empréstimo hipotecario sobre unha vivenda de 7 000 euros nun prazo de 14 anos a un interese de 6%, que cantidade se debe pagar anualmente?; e trimestralmente?

Solución: Aplícase a fórmula

$$A = \frac{7000 \cdot 0,06 \cdot (1+0,06)^{14}}{(1+0,06)^{14} - 1} = \frac{7000 \cdot 0,06 \cdot 1,06^{14}}{(1,06)^{14} - 1} = 753,09435$$

A secuencia seguinte de teclas determina a anualidade:

$$1,06 \text{ X}^y 14 - 1 = M_{in} = x 0,06 x 7000 : MR = 753,09435$$

A anualidade que corresponde pagar é de 753,09 euros.

Para responder á segunda pregunta é necesario xeneralizar a fórmula.

Debese pagar 7000 euros , mediante pagamentos trimestrais ; polo tanto, en 14 anos faranse $14 \cdot 4 = 56$ pagamentos; o 6% anual , equivale a $6/4 = 1,5\%$ trimestral; con estes novos datos aplicamos a fórmula.

$$A = \frac{7000 \cdot 0,015 \cdot (1 + 0,015)^{56}}{(1 + 0,015)^{56} - 1} = \frac{7000 \cdot 0,015 \cdot 1,015^{56}}{1,015^{56} - 1}$$

A secuencia determina o pagamento trimestral

$$1'015 \text{ X}^y 56 - 1 = M_{in} + 1 = x 0,015 x 7000 P MR = 185,64745$$

O pagamento trimestral será 185,65 euros.

- 2 Mediante o pagamento de 4 000 euros anuais ao 8% de interese composto durante 5 anos , que débeda saldamos?

Solución : Aplícase a fórmula :

$$D = \frac{4000((1 + 0,08)^5 - 1)}{0,08(1 + 0,08)^5} = \frac{4000((1,08)^5 - 1)}{0,08 \cdot (1,08)^5}$$

A seguinte secuencia calcula a débeda:

$$1,08^5 \times 4000 - 4000 \times 0,08 = M_{in} \quad P \quad 0,08 \quad -1 = x \quad 4000 \quad P \quad MR = 15970,841$$

Na práctica, a débeda saldada é de 15 970,84 euros.

3. Se pagamos 3 000 euros anuais para amortizar unha débeda de 18 629,38 euros ao 6%, cantos anos teremos que pagar?

Solución: Aplícase a fórmula

$$3000 = \frac{18629,38 \cdot 0,06 \cdot 1,06^t}{1,06^t - 1}$$

Opérase sobre esta ecuación para transformala noutra na que se poidan tomar logaritmos.

$$3000 (1,06^t - 1) = 1117,7628 \cdot 1,06^t, \quad 1,06^t - 1 = 0,3726 \cdot 1,06^t$$

$$(1 - 0,3726) \cdot 1,06^t = 1 \quad 0,6274 \cdot 1,06^t = 1 \quad 1,06^t = \frac{1}{0,6274}$$

$$\text{Tómanse logaritmos} \quad t \cdot \ln 1,06 = - \ln 0,6274 ; \text{ de onde } t = \frac{-\ln 0,6274}{\ln 1,06} = 8,00033$$

Redondeamos o valor de t a 8 anos

A secuencia para o cálculo de t : $1,06 \ln M_{in} 0,6274 \ln \sum P MR$